Grado en Ingeniería Informática
Doble Grado en Informática y Administración de Empresas

Colección de Problemas de Cálculo Diferencial Aplicado

Manuel Carretero (**coordinador del curso**) [Mag 81-82; Mag 83; Gr 81; Gr82]
Luis L. Bonilla [Mag 88; Gr 88; Gr 89] (Leganés, inglés)
José María Gambí [Gr 83] (Leganés)
Sergei Iakunin [Gr 88] (Leganés, inglés)
Rafael Sánchez [M80; Gr 80] (Colmenarejo)
José Ángel Bolea [Mag 50-51; Gr 50; Gr 51] (Colmenarejo)

Curso 2016–2017

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Escuela Politécnica Superior, campus de Leganés y Colmenarejo

Departamento de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química,

Grado en Ingeniería Informática

ASIGNATURA: CÁLCULO DIFERERENCIAL APLICADO

Curso: **2014-2015**

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
   - Estudio de ecuaciones lineales, separables, exactas y homogéneas.
2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN
   - Estudio de ecuaciones lineales y no lineales.
   - Estudio de ecuaciones lineales homogéneas.
   - Estudio de la reducción de orden.
   - Estudio de las ecuaciones de Euler-Cauchy.
3. SUCESIONES Y SERIES
   - Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante series de potencias.
4. TRANSFORMADA DE LAPLACE
   - Aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.
5. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
   - Métodos de resolución.
6. SERIES DE FOURIER Y SEPARACIÓN DE VARIABLES
   - Estudio de series de Fourier.
   - Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Resolución mediante el método de separación de variables.
7. MÉTODOS NUMÉRICOS
   - Métodos de Euler y Runge-Kutta.

Bibliografía Básica:

BOYCE, WILLIAM E. Y DIPRIMA R. C.
Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Tercera Edición. Limusa (1991).
SIMMONS, GEORGE FINLAY.
Ecuaciones diferenciales : con aplicaciones y notas históricas. Segunda Edición. McGraw-Hill.
ZILL, DENNIS G.
Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Sexta Edición. International Thomson (1997).

Bibliografía Complementaria:

KISELIOV, ALEKSANDR I.
Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sexta Edición. Mir (1984).

HABERMAN, RICHARD.
Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno. Tercera Edición..
Pearson-Prentice Hall.
WEINBERGER, HANS F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales : con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales*. Reverté.
SIMMONS, GEORGE FINLAY.
Ecuaciones diferenciales : teoría, técnica y práctica. McGraw-Hill Interamericana.

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1.1. Aplicaciones físicas

Problema 1.1 Consideremos un circuito eléctrico que consta de un condensador de capacidad C cargado con una carga Q, conectado en serie con una resistencia R y un interruptor, inicialmente abierto. Al cerrar el interruptor, se genera una diferencia de potencial a través de la resistencia e, inmediatamente, comienza a fluir una corriente, disminuyendo la carga en el condensador. La ecuación que describe el comportamiento de dicho circuito es:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} q = 0\,,$$

donde $q(t)$ denota la carga en el condensador en función del tiempo. Demostrar que la descarga del condensador tiene un comportamiento exponencial. Establecer el tiempo necesario para que el condensador adquiera una carga igual a $1/\mathrm{e} \approx 0.37$ veces la carga inicial.

Problema 1.2 Supongamos que el ritmo al que se enfría un cuerpo caliente es proporcional a la diferencia de temperatura entre éste y el ambiente más frío que lo rodea (ley de enfriamiento de Newton). Un cuerpo se calienta a $110^{\mathrm{o}}C$. Calcular el tiempo que debe transcurrir para que se enfríe a $30^{\mathrm{o}}C$. Considérese que la constante de proporcionalidad antes señalada toma el valor $-1\mathrm{h}^{-1}$, con $1\mathrm{h} = 60\mathrm{min}$, siendo la temperatura ambiente $T_m = 20^{\mathrm{o}}C$. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir según este modelo teórico hasta que el objeto alcance la temperatura ambiente?

Problema 1.3 Cuando el agua sale por el orificio de un recipiente, su velocidad es $\sqrt{2gh}$, donde h es la distancia vertical desde el orificio a la superficie libre del agua en el recipiente y g es la aceleración de la gravedad. La velocidad efectiva de salida del agua por un pequeño orificio de área A es aproximadamente $0.6A\sqrt{2gh}$ unidades cúbicas por segundo. El factor 0.6 aparece por la fricción y por una cierta contracción del tamaño del chorro. Hallar el tiempo requerido en vaciar un contenedor cilíndrico a través de un agujero circular de radio R_0 en su fondo; supóngase que el radio del cilindro es R y que el agua alcanzaba inicialmente una altura h_0.

1.2. Resolución de EDOs de primer orden

Problema 1.4 Resolver las siguientes EDOs lineales de primer orden:

1. $y' + y = 2e^{-x} + x^2$.
2. $y' + \frac{1}{x}y = x^2 - 1\,,\ x > 0$.
3. $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x$.

Problema 1.5 Resolver las siguientes EDOs separables:

1. $y' = x^2/y$.
2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$.
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$.

Problema 1.6 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PC) \begin{cases} (1-x)(1-y)y' = \alpha \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Problema 1.7 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0$.
2. $e^y + \big(xe^y + 2y\big)y' = 0$.
3. $y^2e^{xy} + \cos x + \big(e^{xy} + xye^{xy}\big)y' = 0$.

Problema 1.8 Resolver la siguiente ecuación diferencial encontrando un factor integrante para la misma dependiente únicamente de la variable independiente x:

$$(x+2)\operatorname{sen} y + (x\cos y)y' = 0\,, \quad x > 0\,.$$

Problema 1.9 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

1. $y' = (2x + y)/(x - y)$.
2. $y' = (x^2 + 3y^2)/2xy$.
3. $y' = (y + \sqrt{x^2 - y^2})/x$.

2. Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

2.1. Aplicaciones físicas

Problema 2.1 Resolver la ecuación de movimiento de una masa m unida a un resorte de constante elástica k: (a) en ausencia de amortiguamiento; (b) en presencia de amortiguamiento. En este último caso, distinguir entre sobreamortiguamiento, amortiguamiento crítico y subamortiguamiento.

2.2. Resolución de EDOs de segundo orden

Problema 2.2 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$\text{(a)}\quad 2y'' - 5y' - 3y = 0 \qquad \text{(b)}\quad y'' - 10y' + 25y = 0 \qquad \text{(c)}\quad y'' + 4y' + 7y = 0\,.$$

Problema 2.3 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a)}\quad y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x} \qquad \text{(b)}\quad 4y'' + 36y = \csc(3x)\,.$$

Problema 2.4 Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x} \\ y(0) = 0\,, \;\; y'(0) = -2 \end{cases}\,.$$

Problema 2.5 Resolver las siguientes EDOs aplicando el método de los coeficientes indeterminados, utilizando el principio de superposición en caso necesario:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & y'' - 4y = \operatorname{sen} x & \text{(b)} & y'' + 4y = 4\cos(2x) \\ \text{(c)} & y'' + 4y = -4x & \text{(d)} & y'' + 4y = 4\cos(2x) - 4x\,. \end{array}$$

3. Sucesiones y Series

Problema 3.1 Determinar la serie de Taylor en el origen para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \operatorname{sen}(x)\,;$ (b) $f_2(x) = \cos(x)\,;$ (c) $f_3(x) = e^x\,;$ (d) $f_4(x) = e^{-x}\,;$

(e) $f_5(x) = \ln(1+x)\,;$ (f) $f_6(x) = \ln(1-x)\,;$ (g) $f_7(x) = \dfrac{1}{1-x}\,;$ (h) $f_8(x) = \dfrac{1}{1+x}\,;$

Problema 3.2 Comprobar que se verifican las siguientes igualdades:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} a_{n+m}\, x^{n+p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m+p}\, x^{n+p+k}\,; \quad x > 0$

   donde p una constante y k, m son dos números enteros dados.

5. $\displaystyle x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n\, x^{n+r-2} + \alpha x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n\, x^{n+r-1} + \beta x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+r} =$

   $\displaystyle [r(r-1) + \alpha r]\, a_0\, x^r + [(r+1)r + \alpha(r+1)]\, a_1\, x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+r)(n+r-1) a_n + \alpha(n+r) a_n + \beta a_{n-2}]\, x^{n+}$

   $x > 0$, donde α, β y r son constantes dadas.

Problema 3.3

Hallar los términos a_n de modo que se satisfaga la ecuación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\, x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 0$$

Identificar la función representada por la serie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

Problema 3.4 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando series de potencias centradas en el origen:

1. $y'' - y = 0\,.$
2. $y'' - xy' - y = 0\,.$
3. $y'' - xy' - y = 0\,, \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1.$
4. $y'' + k^2 x^2 y = 0\,, \qquad$ siendo k una constante real positiva.
5. $(1-x)y'' + y = 0\,.$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0\,.$

4. Transformada de Laplace

Problema 4.1 Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valores iniciales (consúltese la tabla de tranformaciones en [*Boyce*; página 293]):

1. $y'' - 4y' + 4y = 0\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 1.$
2. $y'' - y' - 2y = 0\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 0.$
3. $y'' + 3y' + 2y = 0\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 0.$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1.$
5. $y'' - 2y' + 2y = \cos x\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 0.$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1\,,\ \ y''(0) = 0.$
7. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1\,,\ \ y''(0) = 0\,,\ \ y'''(0) = 1.$

5. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Problema 5.1 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$, para:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$
2. $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$
4. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$
5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$
6. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$
7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$
8. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$
9. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.$
10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix},\ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$

6. Series de Fourier y Separación de Variables

Problema 6.1 Resolver la ecuación del calor bajo las condiciones de frontera:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0\,, \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1\,, & 0 < x < L/2 \\ 0\,, & L/2 < x < L \end{cases} \end{cases} ,$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0\,, \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x < L/2 \\ L - x\,, & L/2 < x < L \end{cases} \end{cases} .$$

Problema 6.2 Encontrar la solución al problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in [0, L]\,, \quad t \in \mathbb{R}^+\,, \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0\,, \quad \forall t\,, \\ &u(x,0) = f(x)\,. \end{aligned}$$

Problema 6.3 Resolver la ecuación de onda bajo las condiciones de frontera:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0\,, \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{4}x(L-x)\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} ,$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} u(0,t) = 0\,, \quad u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x \end{cases} .$$

Problema 6.4 Resolver la ecuación bidimensional de Laplace bajo las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = 100 \end{cases} .$$

Problema 6.5 Demostrar que la solución del problema de valores en la frontera (problema de Dirichlet) para una región rectangular

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad x \in [0,a]\,, \quad y \in [0,b]\,, \\ &u(0,y) = 0\,, \quad u(a,y) = 0\,, \quad \forall y \in [0,b]\,, \\ &u(x,0) = 0\,, \quad u(x,b) = g(x)\,, \quad \forall x \in [0,a]\,, \end{aligned}$$

es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

con

$$A_n = \frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcular los coeficientes $(A_n : n \in \mathbb{N})$ cuando $g(x) = 100$ y $a = 1 = b$.

7. Métodos Numéricos

Problema 7.1 Consideremos un pequeño dispositivo electrónico que tiene una temperatura $y(t)$ en el instante de tiempo t. Se pretende hacer un estudio de cómo reduce su temperatura cuando dicho dispositivo no está en funcionamiemto. Si dicho dispositivo está en inactividad, se deduce después de múltiples experimentos que la velocidad a la que se enfría es proporcional a su temperatura en cada instante. Si la constante de proporcionalidad es $k = -22$ y además se parte de que en el instante $t = 0$ de inactividad la temperatura es $y(0) = 1$ (la temperatura está normalizada), modeliza mediante una ecuación diferencial el comportamiento del dispositivo cuando está inactivo y obtén el PVI correspondiente.
Obtén una solución numérica al PVI para $t = 0.5$ mediante el método de Euler explícito con un espaciado $h = 0.1$.
¿Por qué la solución numérica no se aproxima adecuadamente a la solución exacta?
Aplica el método de Euler implícito. ¿Mejora la aproximación? ¿Por qué?

Problema 7.2 Calcula los valores aproximados correspondientes a $t = 0.1$ y $t = 0.2$ obtenidos al aplicar el método de Euler explícito para las soluciones de los siguientes PVI, donde el tamaño de paso es $h = 0.05$. ¿Qué nuevo paso h deberíamos elegir para reducir aproximadamente el error en un factor 100? Razona tu respuesta.

$$a)\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & 3+t-y \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & 2y-3t \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Problema 7.3 Aproxima las soluciones de los siguientes PVI's para $t = 1$ utilizando un paso $h = 0.25$. Para ello elige uno de los métodos de Euler explícito o implícito y calcula la aproximación. Razona la elección del método en cada PVI.

$$a)\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & 5t-3\sqrt{y} \\ y(0) & = & 2 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & \sqrt{2y-3t} \\ y(0) & = & 3 \end{array}\right. \qquad c)\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & -12y+\operatorname{sen}(\pi t) \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

Problema 7.4 Sea el siguiente PVI

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & g(y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right. ,$$

donde $g(y)$ es una función continua y diferenciable en todo el dominio. Se considera el siguiente esquema numérico (Crank-Nikolson) para resolver el anterior PVI:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_{n+1})\,)$$

¿Es un método explícito o implícito? Razona tu respuesta. Además, obtén el error de truncamientio local del método aplicado al anterior PVI, una estimación del error de truncamiento global y el orden del método. Por último aplica el esquema al PVI del ejercicio 1) a partir de los datos que se encuentran en dicho ejercicio y compara los resultados con los anteriormente obtenidos.

Problema 7.5 Sea el siguiente PVI

$$\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & 1-t+4y \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. ,$$

donde se ha aproximado el valor de $y(0.4)$ mediante un método de Runge-Kutta utilizando los pasos $h_1 = 0.1$ y $h_2 = 0.05$ obteniendo las aproximaciones $Y^{h_1}_{x=0.4} = 5.7927853$, $Y^{h_2}_{x=0.4} = 5.7941198$. Estima el orden del método a partir de los resultados y de la solución exacta.

8. Problemas propuestos en exámenes de cursos anteriores

Problema 8.1 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PVI) \left\{ \begin{array}{ll} y' = \dfrac{1}{x} y + x e^x \,, & x > 0 \\ y(1) = 1 & \end{array} \right. .$$

Problema 8.2 Dada la EDO

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0\,, \quad x \neq 0\,,$$

discutir si es exacta y calcular su solución general.

Problema 8.3 Resolver la siguiente EDO aplicando el método de variación de constantes:

$$y'' - 2y' + y = xe^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 8.4 Resolver la siguiente EDO aplicando el método de coeficientes indeterminados:

$$y'' - y' - 6y = 12x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Problema 8.5 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace, expresando el resultado en términos de funciones hiperbólicas:

$$y'' - 2y' - 2y = 0\,; \;\; y(0) = 2\,, \;\; y'(0) = 0\,.$$

Datos: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right] = e^{at}$, $s > a$. $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\operatorname{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Problema 8.6 Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

bajo la condición inicial $\vec{x}(0) = [5, 0]^{\mathrm{T}}$. Comprobar explícitamente que la solución obtenida verifica el sistema de ecuaciones.

Problema 8.7 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; x \in [0, L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{rl} (CC) & u(0,t) = 0\,, \;\; u(L,t) = 0\,, \;\; \forall t > 0\,, \\ (CI) & u(x,0) = f(x)\,, \;\; \forall x \in [0, L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x\,,$$

con $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(a) Deducir, con todo detalle, las expresiones de $(A_n : n \in \mathbb{N})$, imponiendo la condición inhomogénea $u(x,0) = f(x)$, $\forall x \in [0, L]$, y sabiendo que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases} .$$

(b) Calcular los coeficientes $(A_n : n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{L}\right) .$$

Problema 8.8 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, clasificando previamente la ecuación diferencial:

$$(PVI) \begin{cases} \operatorname{sen} x - y e^{-x} + (e^{-x} + 2y) y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Problema 8.9 Resolver el problema de valores iniciales

$$(PVI) \begin{cases} y'' - y' - 2y = 3e^{2x}\,, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0\,, \; y'(0) = 4 \end{cases}$$

aplicando el método de coeficientes indeterminados.

Problema 8.10 Resolver el ejercicio anterior aplicando la transformada de Laplace.
Puede ser útil: $\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right](s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Problema 8.11 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

bajo la condición inicial $\vec{x}(0) = [1, 0]^{\mathrm{T}}$. Comprobar explícitamente que la solución obtenida verifica el sistema. Representar la trayectoria del sistema en el espacio de fase y discutir su periodicidad.

Problema 8.12 Condidérese la ecuación de Laplace en una región cuadrada de lado unidad

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad x, y \in [0, 1]\,,$$

sometida a las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0\,, \;\; \forall y \in (0, 1)\,, \\ &u(x, 0) = 0\,, \quad u(x, 1) = f(x)\,, \;\; \forall x \in (0, 1)\,, \end{aligned}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}(n\pi y) \cos(n\pi x)\,,$$

donde

$$A_0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

y

$$A_n = \frac{2}{\operatorname{senh}(n\pi)} \int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x\,,$$

para todo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_0 y $(A_n \,:\, n \in \mathbb{N})$, imponiendo la condición inhomogénea $u(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in (0, 1)$, y sabiendo que

$$\int_0^1 \cos(m\pi x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{mn}\,, \quad m, n \in \mathbb{N}\,,$$

donde δ_{mn} denota la delta de Kronecker.

(b) Calcular los coeficientes A_0 y $(A_n \,:\, n \in \mathbb{N})$, así como la expresión final de la solución $u(x, y)$, para

$$f(x) = \sum_{m=100}^{200} m\cos(m\pi x)\,.$$

Problema 8.13 La obtención de la solución general de la ecuación de Laplace en el ejercicio anterior pasa por la resolución del siguiente problema regular de Sturm-Liouville:

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0\,,\ \ X'(1) = 0 \end{array}\right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Determinar sus *autovalores*, es decir, los valores de λ que conducen a soluciones no triviales $X \neq 0$ del problema. Determinar, asimismo, la solución asociada a cada autovalor (*autofunciones* del problema).

Problema 8.14 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$-5x^4 + 2y + xy' = 0 \quad \text{con} \quad x > 0;$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la EDO.

ii) Resolver la ecuación sabiendo que $y(1) = 2$.

iii) Comprobar el resultado obtenido en el apartado anterior.

Problema 8.15 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ax}\,; \quad \text{donde } a \text{ es un parámetro real.}$$

Se pide:

i) Resolver la EDO cuando $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

ii) Resolver la EDO cuando $a = 1$.

Problema 8.16 Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de la función $y(t)$. Sabiendo que $y(t)$ resuelve el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 4y = e^t\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0\,.$$

Se pide:

i) Hallar el valor de $F(2)$.

ii) Hallar el valor de $y(2)$.

Nota: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Problema 8.17 Se considera el siguiente Problema de Valor Inicial (PVI):

$$y'' + 4y' + 3y = 0\,; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2\,.$$

Se pide:

i) Aplicar el cambio de variables $X_1 = y\,; X_2 = y'$, con $\vec{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}}$ para transformar el PVI anterior en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \vec{X}(t)\,; \quad \text{bajo la condición inicial} \quad \vec{X}(0) = (1, 2)^{\mathrm{T}}.$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior.

Problema 8.18 Consideremos la ecuación del calor

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad t > 0\,, \quad x \in [0, L]\,,$$

sometida a las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{array}{ll} (CC) & u(0,t) = 0\,, \ u(L,t) = 0\,, \ \forall t > 0\,, \\ (CI) & u(x,0) = f(x)\,, \ \forall x \in [0, L]\,. \end{array}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se expresa:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}\left(-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x\,, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Se pide:

i) Deducir, con todo detalle, las expresiones de A_n, $n \in \mathbb{N}$, sabiendo que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases} .$$

ii) Tomando $L=\pi$, hallar la solución $u(x,t)$, para

$$f(x) = 3\ \mathrm{sen}(2x) + \frac{5}{3}\ \mathrm{sen}(4x).$$

Problema 8.19 Dada la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + 5\,x\,y' - 21 y = 5\,x\,\cos\left(\,\ln(x)\,\right);$$

Se pide:

i) Clasificar, razonadamente, la ecuación.

ii) Aplicar el cambio de variable independiente: $x = e^t$, y demostrar que la ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} - 21 y(t) = 5\cos(t) e^t$$

iii) Comprobar que la solución de la ecuación del apartado ii) es

$$y(t) = Ae^{-7t} + Be^{3t} + \frac{e^t}{65}(6\,\mathrm{sen}(t) - 17\cos(t))\,; \quad \text{siendo } A, B \text{ constantes.}$$

iv) Hallar la solución de la ecuación del enunciado.

Problema 8.20 Resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}\,.$$

Problema 8.21 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 4x_2 \end{cases},$$

Se pide:

i) Resolver el sistema bajo la condición inicial $\vec{X}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (1,1)$.

ii) Comprobar la solución obtenida en i)

Problema 8.22 Resolver el siguiente problema de valores iniciales, en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$(PVI)\begin{cases} y' - \dfrac{\alpha x^2}{y(1+x^3)} = 0\,, \quad x \in [0, +\infty) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 8.23 Dado el siguiente problema de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,,\ t > 0 \\ u(0,t) &= 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \text{(condiciones frontera)} \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi \text{ (condición inicial con } f(x) \text{ función conocida)} \end{aligned}$$

Se pide:

i) Aplicar el método de separación de variables tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ y hallar la ecuación diferencial que satisface la función $T(t)$

ii) Demostrar que la función $X(x)$ satisface el problema de contorno:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(0) = 0; \quad X'(\pi) = 0\,;$$

iii) Hallar los autovalores y las autofunciones del problema del apartado ii)

Problema 8.24 Dado el problema de valor inicial

$$\text{(PVI)} \begin{cases} y \operatorname{sen} x + (2y - \cos x)y' = \dfrac{-x}{x^2+1}\,, & 0 \le x \le 1/2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

clasificar, razonadamente, la ecuación diferencial y resolver el PVI.

Problema 8.25 Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 4y' + 13y = e^x \operatorname{sen}(3x)\,.$$

Problema 8.26 Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Problema 8.27 A una ecuación diferencial de tercer orden lineal no homogénea con coeficientes constantes y con sus respectivas condiciones iniciales se le ha aplicado la transformación de Laplace obteniendo la siguiente ecuación algebraica:

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s) = \frac{2}{s^3(s-1)}$$

Se pide:

1. Mediante el teorema de convolución obtener la solución de la ecuación diferencial original.
2. Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'''(t) = 2e^t\,, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0,\, y''(0) = 0$$

Nota: pueden ser útiles las siguientes fórmulas: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, con n entero positivo y $s > a$.

Problema 8.28 Aplicar el método de variación de los parámetros para hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Problema 8.29 Resuelve la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$$

Problema 8.30 Resolver el siguiente problema de valor inicial, aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}; \qquad y(0) = 2;\ y'(0) = 12;$$

Problema 8.31 Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Problema 8.32 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(yx^2 + x\cos(y) + y^3)y' = -xy^2 - \operatorname{sen}(y)$$

Se pide:

a) Clasificarla razonadamente.
b) Resolverla sabiendo que $y(0) = 1$.

Problema 8.33 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de 2^o orden

$$y'' - 6y' + 10y = e^x \operatorname{sen}(3x)$$

Se pide:

a) Hallar la solución de la ecuación homogénea.

b) Resolver la EDO encontrando una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados.

Problema 8.34 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'''(t) = 2e^t\,, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$$

se pide:

a) Resolver directamente el PVI integrando tres veces consecutivas, obteniendo las correspondientes contantes de integración.
b) Resolver el PVI mediante la transformada de Laplace.

Nota 1: Al resolver el apartado b) puedes usar resultados obtenidos en a)
Nota 2: Pueden ser útiles las siguientes fórmulas: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$; $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$, con n entero positivo y $s > a$.

Problema 8.35 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2, \;\; 0, \;\; 1)^T$ y comprobar el resultado obtenido.

Problema 8.36 Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(x+\sqrt{xy})y' = y\,; \qquad x>0$$

Se pide:

a) Clasificarla razonadamente.
b) Resolverla.

Problema 8.37 Dada la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de 2^o orden

$$y'' - 6y' + \lambda y = 0 \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se pide:

a) Obtener razonadamente los valores de λ para los que en la solución general no aparecen funciones trigonométricas.

b) Resolverla para $\lambda = 10$.

Problema 8.38 Resolver el siguiente problema de valores iniciales aplicando la transformada de Laplace:

$$y''' - 3y'' + 4y = e; \quad y(0)=1, \;\; y'(0)=0, \;\; y''(0)=1$$

Problema 8.39 Encontrar la solución del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}(t)$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

bajo la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = (2, \;\; 0, \;\; 4)^T$

Problema 8.40 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$$

i) Hallar la solución general de la EDO.

ii) Encontrar la solución que satisface las siguientes condiciones iniciales: $y(0)=1, \quad y'(0)=1$.

Problema 8.41 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}\,; \quad y(0)=1\,; \quad y'(0)=5$$

i) Hallar la solución del PVI aplicando la transformada de Laplace.

ii) Calcular $f(\frac{1}{4})$ sabiendo que $f(t) = 6y(t) - 9y'(t) + 3y''(t)$

Problema 8.42 Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{X}'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{X}(t)$$

siendo $t>0$.

i) Hallar la solución general del sistema y comprobar los resultados.

ii) Analizar el comportamiento de la solución del apartado i) cuando el tiempo t tiende a infinito. ¿Puede depender dicho comportamiento de la condición inicial que se asigne al sistema?

Problema 8.43 Sabiendo que $g(x) = -1 - x/2$, resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} -\dfrac{2y+x}{y+x}y' &= \dfrac{2y}{x^2}(1+g)\,, \quad x \geq 1\,, \\ y(1) &= 1 \end{cases}$$

Problema 8.44 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \;\; t > 0\,, \;\; x \in (0,\pi) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad u(0,t) = 0\,, \;\; u(\pi,t) = 0\,, \;\; t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = f(x)\,, \;\; x \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $T(t) = ce^{-\lambda t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y λ la constante de separación.

ii) Demostrar que $X(x)$ satisface: $X'' + \lambda X = 0\,; X(0) = 0\,;\ X(\pi) = 0\,;$ y hallar los valores de $\lambda > 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

iii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar los coeficientes $A_n\,, n \in \mathbb{N}$, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$

Nota: Pueden ser útiles los siguientes resultados:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,, & m \neq n \\ L/2\,, & m = n \end{cases}$
- $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(x)(3 - 4\operatorname{sen}^2(x))\,, \forall x \in \mathbb{R}\,;$

Problema 8.45 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' &= 1 + \dfrac{y}{2}\,, \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

al que se le aplica el siguiente esquema numérico (Euler mejorado):

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(\, f(t_n, Y_n) + f(t_{n+1}, Y_n + hf(t_n, Y_n))\,)$$

i) Calcular, usando los pasos $h_1 = 0.2$ y $h_2 = 0.1$, las soluciones aproximadas $Y_{t=0.4}^{h_1}$, $Y_{t=0.4}^{h_2}$ de $y(0.4)$.

ii) Estimar el orden del método a partir de los resultados anteriores, sabiendo que la solución exacta del PVI es: $y(t) = 2(e^{t/2} - 1)$.

Problema 8.46 Dada la ecuación diferencial $\quad x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \quad x > 0, \quad$ se pide:

i) Efectuar el cambio de variable adecuado que permite transformarla en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación diferencial así obtenida sujeta a las condiciones $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = 1$.

Problema 8.47 Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' + 16y = e^{4t}\,, \quad y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1\,.$$

Problema 8.48 Considera el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} X_1'(t) \\ X_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

i) Encuentra el valor de α para el cual el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema cambia (*sugerencia*: calcula los valores propios de la matriz de coeficientes en términos de α). Justifica tu respuesta.

ii) Halla la solución del sistema cuando $\alpha = 1$ y $(X_1(0), X_2(0)) = (1, 0)$. Además, calcula la distancia $d(t)$ desde la posición $(0, 0)$ hasta la posición de la partícula que esté moviéndose acorde a la solución calculada (*sugerencia*: utiliza la fórmula $d(t) = \sqrt{X_1(t)^2 + X_2(t)^2}$).

Problema 8.49 Resuelve el siguiente PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + e^y + (xe^y + \cos y)y' & = & 0 \\ y(0) & = & g(\pi/2) \end{array} \right.$$

sabiendo que la función g cumple

$$g'(x) = \operatorname{sen}(x)\,, \quad g(0) = -1\,.$$

Problema 8.50 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{array}{rcl} \text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} & : & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,,\;\; t > 0\,,\;\; x \in (0, \pi/3) \\ \text{Condiciones de Contorno (CC)} & : & \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,,\;\; \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,,\;\; t > 0\,, \\ \text{Condición Inicial (CI)} & : & u(x,0) = f(x)\,,\;\; x \in [0, \pi/3]\,. \end{array}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\; X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx) \; ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R} \, ,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior, sabiendo que la función del dato inicial es: $f(x) = 2x + 1$

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,; \; m \neq n \\ L/2\,; \; m = n \neq 0 \\ L\,; \; m = n = 0 \end{cases}$

Problema 8.51 Se quiere resolver numéricamente el siguiente PVI

$$\begin{cases} y' &= t + \dfrac{y}{2} + 1\,, \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

mediante el esquema numérico de Adams-Bashforth:

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} + \frac{3}{2} h f(t_{n+1}, Y_{n+1}) - \frac{1}{2} h f(t_n, Y_n)$$

i) Calcula con paso $h_1 = 0.1$ la solución aproximada $Y^{h_1}_{t=0.3}$ de $y(0.3)$, sabiendo que Y_1 debe calcularse mediante el método de Euler explícito.

ii) Usando el paso $h_2 = 0.01$ se obtiene la aproximación $Y^{h_2}_{t=0.3} = 1.5327258$. Estima el orden del método a partir de $Y^{h_1}_{t=0.3}$, $Y^{h_2}_{t=0.3}$ y la solución exacta $y(t) = 7e^{t/2} - 2(t+3)$.

Problema 8.52 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y^2 \; + \; \left(2xy - \cos x - \frac{1}{1+y^2}\right) y' \; = \; -y \operatorname{sen} x$$

junto con la condición inicial $y(\alpha) = 1$, donde α es un parámetro real.

Problema 8.53 Considerar la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 6\,(\ln x)^2 \quad \text{for } \; x > 0\,.$$

i) Aplicar un cambio de variable que transforme la ecuación en otra con coeficientes constantes.

ii) Resolver la ecuación obtenida en i) usando un método apropiado.

Problema 8.54

i) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} X\,; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Comprobar la solución del sistema obtenida en el apartado anterior.

Problema 8.55 Resuelve el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1\,,$$

Problema 8.56 Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$y \;=\; (x + \sqrt{xy})\; y'$$

para $x > 0$, junto con la condición inicial $y(1) = 1$.

Problema 8.57 Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 3y' + 2y \;=\; \operatorname{sen}(e^{\,x})$$

y comprobar el resultado obtenido.

Problema 8.58

i) Demostrar que ecuación diferencial ordinaria $y'' - 6y' + 13y = 0$ es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} X\,; \quad \text{siendo} \quad X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

ii) Resolver el sistema del apartado anterior sabiendo que:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 8.59 Resuelve el siguiente problema de valor inicial (PVI) utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0\,,$$

Problema 8.60 Resuelve el siguiente PVI

$$\begin{cases} xy' \operatorname{sen} \frac{y}{x} + x = y \operatorname{sen} \frac{y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x > 0.$$

Problema 8.61 Halla, mediante serie de potencias, la solución a la siguiente EDO:

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Problema 8.62

- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X$$

- Halla la solución a la EDO

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}$$

- Demuestra la equivalencia de la EDO homogénea asociada a la EDO de segundo orden anterior y el sistema de ecuaciones del primer apartado.

Problema 8.63 Resuelve el siguiente PVI utilizando la transformada de Laplace:

$$y'' - y' - 2y = 3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2\,,$$

Problema 8.64 Sea el problema de valor inicial (PVI) dado por la ecuación diferencial ordinaria:

$$y''' + 4y' = 4e^{2t}\;; \quad \text{y las condiciones iniciales} \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 1;$$

Se pide, resolver el PVI mediante los dos métodos siguientes:

M1) Aplicando la transformada de Laplace.

M2) Siguiendo los siguientes pasos:
(i) Aplicar el cambio $v(t) = y'(t)$ a la ecuación diferencial del PVI y hallar la solución general de la ecuación de segundo orden resultante.
(ii) Deshacer el cambio hecho en (i), integrar y obtener la solución $y(t)$ del PVI.

Problema 8.65 Dada la ecuación diferencial ordinaria (EDO): $y'' - 4xy' - 4y = e^{x}$; se pide:

(a) Asumiendo que la solución de la EDO viene dada por la serie de potencias: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$; encontrar la relación de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes a_n.

(b) Suponiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, hallar el valor aproximado de la solución de la EDO en el punto $x = 2$, usando solamente los cinco primeros términos de la serie de potencias del apartado (a).

NOTA: Puede ser útil el siguiente resultado: $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Problema 8.66 Sea el problema de valor inicial (PVI)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ty + (t^2 + y)y' = 0 \\ y(0) = -2 \end{array} \right. \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

Se pide:

i) Clasificar la ecuación diferencial y demostrar que la solución del PVI es: $y(t) = -t^2 - \sqrt{t^4 + 4}$

ii) Expresar la ecuación diferencial de i) en la forma $y' = f(t, y)$ y considerar el esquema numérico:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, \tilde{Y}_{n+1}) + f(t_n, Y_n))\,, \quad \text{con} \quad \tilde{Y}_{n+1} = Y_n + hf(t_n, Y_n)\,.$$

Demostrar que $Y_1 = \dfrac{4}{h^2 - 2}$ para cualquier paso h. Además, encontrar el valor aproximado a $y(1)$ utilizando un paso $h_1 = 0.5$.

iii) Estimar el orden del método numérico sabiendo que la aproximación a $y(1)$ es $Y_{10}^{h_2} = -3.239$ donde se ha utilizado un paso $h_2 = 0.1$.

Problema 8.67 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)} &: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t>0\,, \ \ 0<x<\pi/3 \\
\text{Condiciones de Contorno (CC)} &: \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) = 0\,, \ \ t>0\,, \\
\text{Condición Inicial (CI)} &: \quad u(x,0) = 2x+1\,, \ \ 0 \le x \le \pi/3\,.
\end{aligned}$$

Aplicando separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, se pide:

i) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \lambda X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,; \, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de la constante de separación $\lambda \ge 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

ii) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\ ; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L>0$ y $m\,,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m\neq n \\ L/2\,;\ m=n\neq 0 \\ L\,;\ m=n=0 \end{cases}$

Problema 8.68 Dado el sistema de ecuaciones diferenciales $\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t)$, con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ que satisface la condición inicial $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, se pide:

(a) Hallar la solución $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.

(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial aplicando la transformada de Laplace.

$$y'' - 6y' + 9y = 0; \qquad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 6,$$

(c) Aplicando el cambio de variables, $X_2(t) = y(t)$, demostrar que el sistema de ecuaciones es equivalente al problema de valor inicial del apartado (b). Comparar las soluciones obtenidas en los apartados (a) y (b)

NOTA: Puede ser útil la siguiente fórmula: $\mathcal{L}\{\frac{t^n e^{at}}{n!}\} = 1/(s-a)^{n+1}$ para $n = 0, 1, 2, ...$

Problema 8.69 Sea la función $f(x) = 27 + (x^2+1)\,y'$, donde y' es la derivada primera de la función $y = y(x)$ respecto de la variable independiente x. Sabiendo que y es suficientemente derivable, se pide:

(a) Demostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ equivale a la ecuación diferencial $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.

(b) Resolver la ecuación diferencial del apartado (a) mediante series de potencias de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(c) Imponer la condición inicial $y(0) = \beta$, $y'(0) = 1$. Hallar para qué valor del parámetro $\beta \in \mathbb{R}$ se obtiene una solución impar, esto es, $y = y(x)$ satisface que $y(-x) = -y(x)$.

Problema 8.70 Dado el siguiente problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' + ky = k \operatorname{sen} t + \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad t \geq 0\,,$$

donde k es un parámetro real positivo.

(a) Clasificar la ecuación diferencial del PVI y hallar su solución.

(b) Tomando $k = 3$ en el PVI, hallar el valor aproximado de $y(\pi/4)$ mediante el método de Euler explícito con paso $h = \pi/4$. Comparar el resultado con el obtenido usando la solución exacta $y(t) = \operatorname{sen} t + e^{-3t}$

(c) ¿Es admisible la aproximación obtenida en el apartado (b) con el paso $h = \pi/4$? En caso afirmativo, justificar la respuesta. En caso negativo, obtener una cota superior del paso h que aproxime $y(\pi/4)$ de manera admisible.

Problema 8.71 Consideremos el siguiente modelo de ecuación del calor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \ \ t > 0\,, \ \ 0 < x < \pi/3 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi/3,t) &= 0\,, \ \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x+1\,, \ \ 0 \leq x \leq \pi/3\,. \end{aligned}$$

(a) Aplicando el método de separación de variables $u(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, demostrar que $T(t) = ce^{-\alpha t}$, siendo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y α la constante de separación.

(b) Demostrar que $X(x)$ satisface el siguiente problema de valores en la frontera:

$$X'' + \alpha X = 0\,; \quad X'(0) = 0\,;\, X'(\pi/3) = 0\,;$$

y hallar los valores de $\alpha \geq 0$ que dan lugar a soluciones no nulas.

(c) Sabiendo que la solución $u(x,t)$ se puede expresar como:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-9n^2 t} \cos(3nx)\;; \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}\,,$$

hallar el valor aproximado de $u(\pi/6, 1/9)$, tomando solamente los tres primeros sumandos de la serie anterior.

Nota: Puede ser útil el siguiente resultado:

- Dados $L > 0$ y $m\,, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0\,;\ m \neq n \\ L/2\,;\ m = n \neq 0 \\ L\,;\ m = n = 0 \end{cases}$