Continuidad de una función en un punto. Discontinuidades.

Universidad Europea
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Introducción

De forma intuitiva podemos decir que una función es **continua** si podemos dibujar su gráfica sin tener que levantar el lápiz del papel.

La continuidad de las funciones se estudia en cada punto, de manera que diremos que una función es continua si lo es en todos sus puntos.

Cuando una función no es continua en un punto, diremos que presenta una **discontinuidad** y las clasificaremos según sus características.

Por último presentaremos **algunos teoremas importantes** relacionados con la continuidad de funciones.

Continuidad en un punto

Decimos que una función es **continua en un punto *a*** si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe el limite $\lim_{x\to a} f(x)$
3. Se cumple que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos

- Estudia la continuidad de las funciones en los puntos indicados

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$$ en x=3

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$ en x=1

Discontinuidades

Si una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

Las discontinuidades pueden clasificarse en:

- **Evitable**

Si existe el límite de la función en el punto a pero no coincide con *f(a)*, bien porque no existe la función en ese punto o bien porque son distintas.

- **Discontinuidad de salto finito**

Si existe la función en el punto y los límites laterales pero estos no son iguales.

- **Discontinuidad de salto infinito**

Si no existe alguno (o ninguno) de los límites laterales.

Ejemplos

Estudia la continuidad de las funciones en los puntos indicados y en caso de discontinuidad, clasifícala.

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ en $x = 1$
2. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ en $x = -2$

Solución

1. En $x = 1$. No existe $f(1)$, ya que no pertenece al dominio.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \{0/0\} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \{0/0\} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

Por lo tanto existe el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1} = 2$$

Solución

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable. 2. En $x = -2$ No existe $f(-2)$, ya que no pertenece al dominio.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \{0/0\} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \{0/0\} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

Por lo tanto NO existe el límite

$$\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

En $x = -2$ hay una discontinuidad de salto infinito.

Continuidad de las funciones definidas a trozos

Las funciones definidas a trozos tienen diferentes expresiones según los distintos valores de *x*.

Este tipo de funciones suelen tener problemas de continuidad en los puntos de cambio de expresión ya que, para que sean continuas en dichos puntos, las gráficas de cada trozo se tienen que "pegar bien".

Ejemplo Estudiar la continuidad de la función en el punto $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 3 \\ x - 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 0 \\ \frac{x+4}{x-2} & 0 \leq x < 4 \\ x^2 - x - 8 & x \geq 4 \end{cases}$$

Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g funciones continuas en $x=a$.

- La función $f(x)+g(x)$ es continua en $x=a$
- La función $f(x)-g(x)$ es continua en $x=a$
- La función $f(x)\cdot g(x)$ es continua en $x=a$
- La función $f(x)/g(x)$ es continua en $x=a$ si $g(a)\neq 0$.
- La función fog es continua en $x=a$, siempre que g sea continua en $f(a)$.

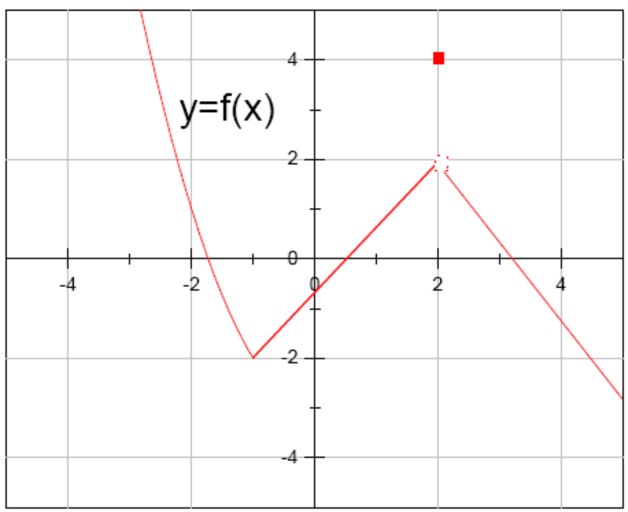
Observación

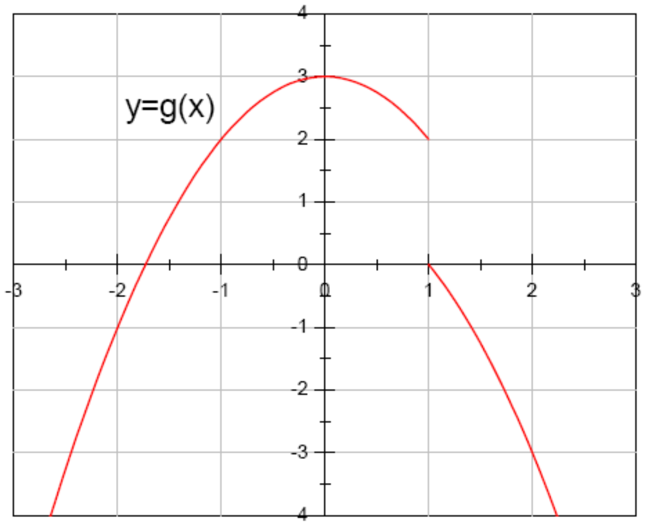
Las funciones lineales, polinómicas, racionales, raíces, exponenciales y logarítmicas son continuas en todos los puntos de su dominio.

Es importante calcular el dominio de una función antes de comenzar cualquier estudio. Los puntos que no están en el dominio serán discontinuidades de la función.

Ejemplos

Observa las siguientes gráficas de funciones y clasifica las discontinuidades



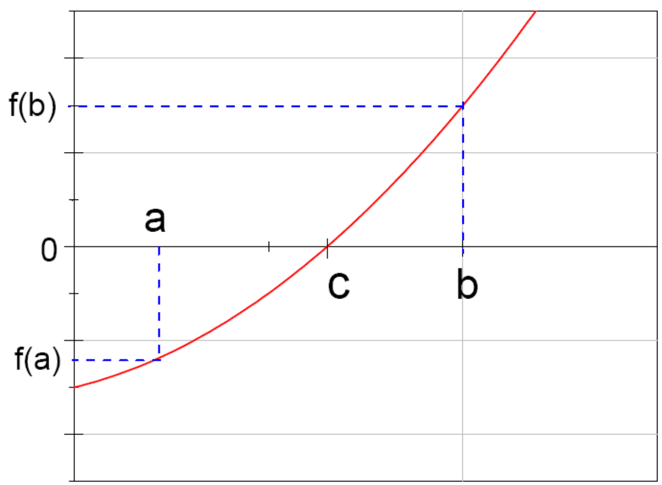


La función *f(x)* es continua excepto en el punto ***x=2,*** en el que presenta una **discontinuidad evitable**, ya que existen los límites laterales de la función en el punto pero no coinciden con *f(2)*

En ***x=1,*** existe una **discontinuidad de salto finito** ya que los límites laterales existen pero son distintos, por la derecha de 1 la función tiende a 0, pero por la izquierda tiende a 2.

Teorema de Bolzano

Toda función continua en un intervalo *[a,b]*, tal que $f(a)\cdot f(b)<0$ tiene, al menos, un punto c del intervalo en el que $f(c)=0$.



Este teorema nos dice que si una función es continua en un intervalo cerrado y en los extremos del intervalo toma valores con signo contrario (uno positivo y otro negativo), entonces en, al menos, un punto del intervalo cortará al eje *OX*.

Gracias al Teorema de Bolzano podemos acotar las raíces de una función en un intervalo.

Ejemplo de aplicación

Demostrar, utilizando el teorema adecuado, que el polinomio $P(x)=2x^4-14x^2+14x-1$ tiene, al menos, una raíz en el intervalo[-10,0] y otra en [0,1].

¿Podrías dar otro intervalo donde hay otra raíz?.

Teorema del valor intermedio

Teorema del valor intermedio

Sea una función f continua en un intervalo *[a,b]*, y consideremos *K* tal que $f(a)<K<f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c del intervalo en el que $f(c)=K$.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua en un intervalo toma todos los valores intermedios entre los valores $f(a)$ y $f(b)$.