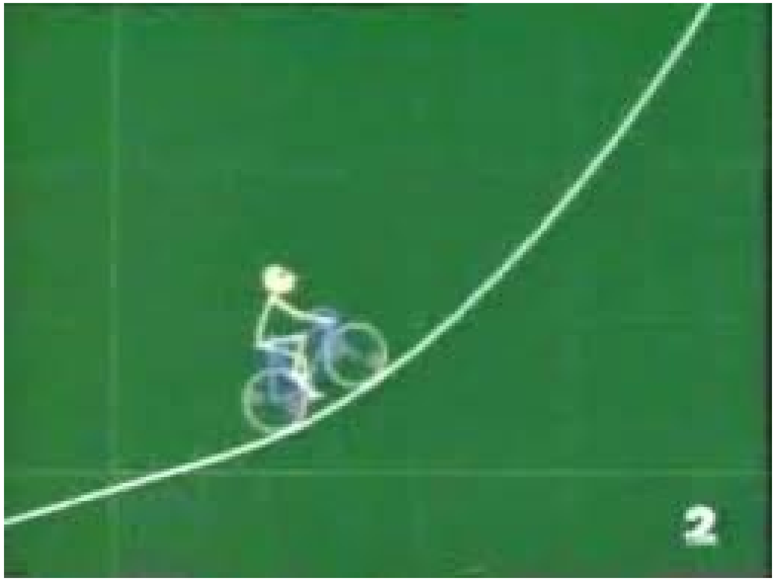
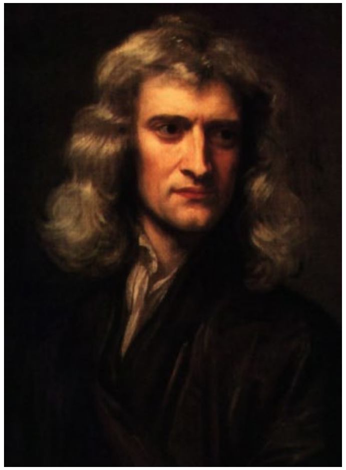
Derivada

Universidad Europea
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES



Concepto de derivada de una función en un punto

- Dos problemas aparentemente distintos (cómo determinar la velocidad de un móvil en cualquier punto y cómo determinar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto) tienen un mismo punto de partida: el concepto de derivada.
- A finales del siglo XVII nació el cálculo diferencial e integral de la mano de Newton y de Leibniz. Estos matemáticos desarrollaron, por separado y mediante dos procedimientos distintos, una herramienta que revolucionaría las Matemáticas y que permitió el extraordinario avance que, durante los siglos posteriores, registraron las matemáticas y la física.
- A partir de la derivada es posible también estudiar el crecimiento (y decrecimiento) de las funciones, sus puntos máximos y mínimos y su curvatura.



La derivada como un límite

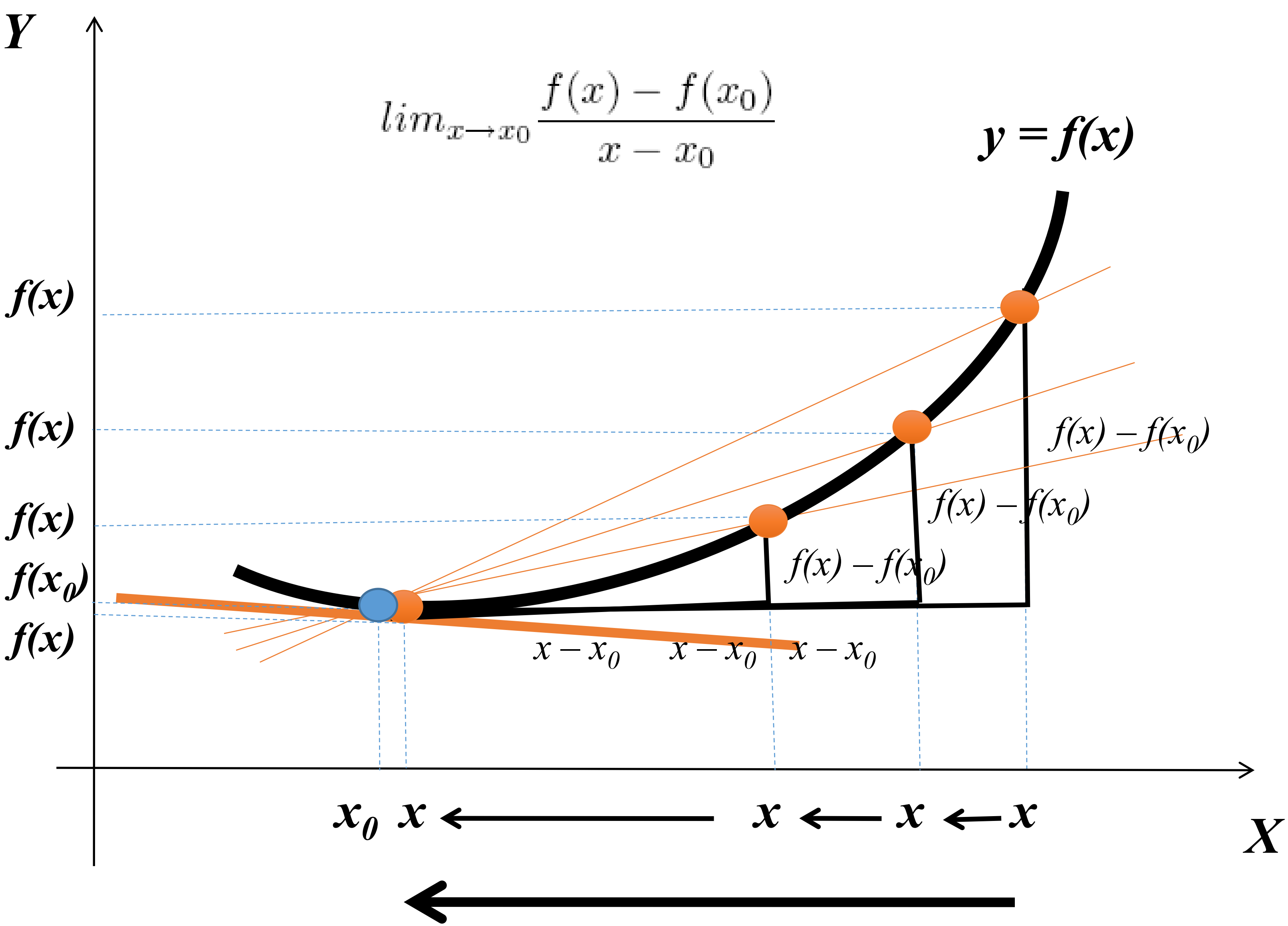
- Cuando tratamos de determinar lo que ha cambiado una función desde el punto $x=a$ hasta el punto $x=b$ podemos calcular la diferencia $f(b)-f(a)$ sin embargo este cálculo NO nos da demasiada información si no lo relacionamos con los puntos a y b.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si ahora, en lugar de querer conocer el cambio producido entre dos puntos quisiésemos saber el ***cambio instantáneo*** en un punto, tendríamos que recurrir al concepto de límite, así podríamos calcular

$$lim_{a\to b}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La derivada como un límite



Definición

- Diremos que una función es **derivable en el punto x_0** si existe el límite

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o lo que es lo mismo

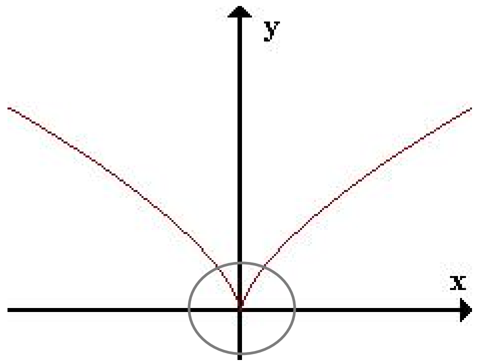
$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

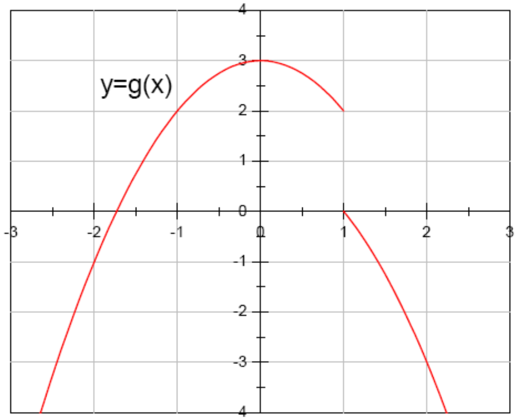
Al valor obtenido en dicho límite lo denotamos por ***f'(x_0).***

Funciones no derivables

- Acabamos de definir la derivada de una función en un punto como un límite, sin embargo, este límite puede no existir, ya que no todas las funciones son derivables en todos los puntos.

- Un ejemplo de funciones no derivables son las funciones que presentan discontinuidades y las que presentan "picos".





Continuidad y derivabilidad

Teorema

Toda función derivable es continua.

Decimos entonces, que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad, pero no suficiente.

Función derivada. Reglas para derivar

- Si una función es derivable podemos calcular la derivada de una función en cualquier punto, esto implica calcular el límite de la definición para cualquier valor de *x*. Este cálculo se puede realizar de forma sencilla si aplicamos las reglas de derivación.

- Comenzaremos por las reglas de las funciones más simples, donde k es una constante.

1. $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
3. $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
4. $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Operaciones con derivadas de funciones

- Para obtener la función derivada es importante conocer también cómo es la derivada de las distintas operaciones entre funciones. Así tenemos que si f y g son dos funciones derivables:

1. $(kf)'(x) = kf'(x)$ donde k es una constante.
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
4. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Ejemplos

- Calcula la función derivada de:

$$f(x) = 5$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - x + 5 - \tfrac{3}{x^2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$f(x) = x^2 + x^3 + e^x - \ln x$$

$$f(x) = xe^x$$

$$f(x) = x^2e^x$$

Regla de la cadena: derivada de la composición de funciones.

- Hemos visto la manera de derivar operaciones de funciones como la suma, resta, división o multiplicación. Veamos ahora cómo derivar funciones compuestas, o lo que es lo mismo, la derivada de la composición de funciones. Esta regla se denomina la **regla de la cadena** y se define como: Sean f y g dos funciones derivables, de modo que g es derivable en el punto a y f es derivable en *g(a)* entonces la composición de f y g es derivable en a y se verifica que

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a)$$

Si aplicamos esta regla a las fórmulas anteriores obtenemos que:

1. $f(x) = (g(x))^n \rightarrow f'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$
2. $f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$
3. $f(x) = \ln g(x) \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Ejemplos

- Calcula la derivada de

$$f(x) = (x^2 + x - 3)^5$$

$$f(x) = e^{x^3}$$

$$f(x) = \ln 2x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x + 2}$$

Interpretación geométrica de la derivada

La derivada resuelve el problema de cómo calcular la recta tangente a una función en un punto.

Decimos que una recta es **tangente** a una función en un punto si únicamente toca a la función en dicho punto.

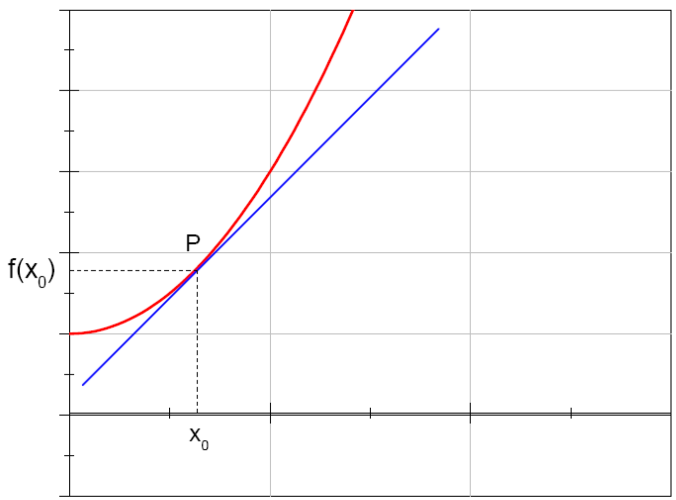
Para calcular la ecuación de una recta necesitamos, por ejemplo, un punto (x_0,y_0) y su pendiente (m), de forma que la ecuación es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

¿Cómo calculamos la ecuación de la recta tangente a una función f en el punto P?

Interpretación geométrica de la derivada

- La derivada de una función en un punto es, geométricamente, la **pendiente de la recta tangente** a la función en dicho punto.



$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo

- Calcular la recta tangente a la función $f(x)=x^2-x+5$ en el punto $x_0=3$.

Solución:
Calculamos la pendiente de la recta tangente a la función en un punto derivando la función $f'(x)=2x-1$ en el punto 3, tenemos $f'(3)=5$.

Como $f(3)=3^2-3+5=11$, sustituyendo en la ecuación tenemos

$$y - 11 = 5(x - 3)$$

o lo que es lo mismo $y=5x-4$.

Interpretación económica: la función marginal

Coste marginal : variación en el coste total ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, es el coste de producir una unidad adicional.

Ingreso marginal: cambio en el ingreso total que se produce cuando la cantidad vendida se incrementa una unidad, es decir, al incremento del ingreso total que supone la venta adicional de una unidad de un determinado bien.

- Conocer estas funciones marginales, ayudarán a las empresas a determinar a qué precio puede y tiene que vender sus productos y en función de ello decidirá qué cantidad les conviene producir. Si las empresas quieren maximizar sus beneficios, no producirán ninguna unidad cuyo coste marginal sea superior al precio.

- Desde un punto de vista matemático, **las funciones marginales se calculan a partir de la función derivada,** de modo que el coste marginal es la derivada de la función coste respecto de la cantidad producida y el ingreso marginal es la derivada del ingreso respecto de la cantidad

Derivadas sucesivas

- Si la función que obtenemos (función derivada) es también derivable, podemos derivarla obteniendo, de nuevo, una función que llamaremos derivada segunda y que denotaremos por $f''(x)$ y así, sucesivamente, obtendremos $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$,…

- En Física, cuando se mide el cambio en el espacio recorrido por unidad de tiempo hablamos de la velocidad (primera derivada), y si medimos el cambio de la velocidad, hablamos de aceleración (segunda derivada).

Las derivadas sucesivas nos ayudarán a estudiar los máximos y mínimos de las funciones, su curvatura o sus puntos de inflexión.

Derivadas sucesivas en economía

Si la primera derivada nos indica cómo cambia la función f, la segunda derivada nos indicará la variación de la primera. De esta forma cuando decimos que "el número de parados ha aumentado con un ritmo más lento", o bien, que "se ha producido una desaceleración en el aumento del paro", estamos utilizando la segunda derivada: la primera derivada nos indica un crecimiento del paro y la segunda nos habla de un aumento cada vez menor.

Ejemplo

- En una empresa el coste total de producir x unidades viene dado por la función $C(x)= 3x^3 +2x^2 +x-2$ y el ingreso por la función $I(x)=-0.2x^2-x+9$.

Calcular el coste marginal y el ingreso marginal

Ejemplo

- Sea $f(x)=3x^4 +x^2 -x+11$ calcular las cuatro primeras derivadas

$$f'(x) = 12x^3 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 36x^2 + 2$$

$$f'''(x) = 72x$$

$$f^{iv}(x) = 72$$