Mecánica Clásica
Tema 4
Ecuaciones Generales de los Sistemas Materiales

EIAE

19 de octubre de 2011

Principios y modelos

Ecuaciones generales

Fuerzas de contacto

Principios y modelos

Principios y modelos

- Conocimientos previos de Física I
- Leyes de Newton
- Comentarios a las leyes de Newton
- Sistemas inerciales
- Limitaciones de las Leyes de Newton
- Ecuaciones de Newton-Euler
- Límites de la mecánica clásica
- Sistemas a considerar
- Conceptos auxiliares

Conocimientos previos de Física I

1. Partícula
   - Leyes de Newton
   - Fuerzas
     - Acción-reacción
     - Rozamiento
     - Fuerzas conservativas
   - Trabajo y energía. Energía potencial
   - Momento cinético
2. Sistemas de partículas
   - Ecuación (teorema) de la cantidad de movimiento
   - id. momento cinético. Cálculo de momentos cinéticos
   - id. energía. Cálculo de energías cinéticas
   - Conservación de la energía

Leyes de Newton

Las tres leyes de Newton son los principios de la Mecánica Clásica:[a]

1. **Inercia:** *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento* uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

2. *El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.*

$$\mathbf{F} = m\,\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(m\,\dot{\mathbf{r}})$$

3. **Acción-reacción:** *Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria. O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.*

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

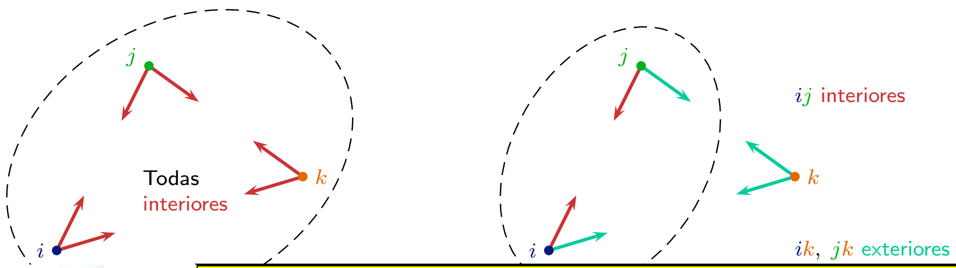
Comentarios a las leyes de Newton

- La constante de la segunda ley (masa inerte) es proporcional a la de la ley de la gravitación (masa gravitatoria). Se ha comprobado la proporcionalidad hasta una precisión de 10^{-12}. Escogiendo las unidades adecuadamente, se pueden considerar como la misma magnitud (principio de equivalencia de Einstein).
- La primera ley ya fue enunciada por Galileo. Es el comienzo de la ciencia moderna. Aristóteles pensaba que el movimiento necesita una acción continua que lo mantenga, lo que daba lugar a ideas bizarras y erróneas (torbellinos de aire propulsores).
- En la tercera ley se pueden distinguir dos grados o formulaciones:
  - débil: igual dirección y sentido contrario, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$
  - fuerte: además, son colineales, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} = \lambda\, \mathbf{r}_{ij}$

- La 3ª ley no se cumple en efectos relativistas (fuerzas de Lorentz)

Comentarios a las leyes de Newton

- La primera ley se puede considerar definición de sistema aislado:
  - Partícula aislada: $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{r}} = \vec{Cte}$ ($\equiv$ 1ª ley de Newton)
  - Dos partículas aisladas: $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$ ($\equiv$ 3ª ley de Newton)
- Definir qué partículas forman parte del sistema:
  - Fuerzas interiores: ejercidas sobre una partícula del sistema por otra también del sistema
  - Fuerzas exteriores: ejercidas por partículas que no son parte del sistema



Sistemas inerciales

- Las leyes de Newton tienen su forma más sencilla en el espacio absoluto, que no es fácilmente observable; él consideraba que se podría encontrar "en la región de las estrellas fijas".
- Más tarde (Lange, 1816) lo precisa introduciendo el concepto de sistema inercial, como sistema de referencia en el que se cumplen las leyes de Newton.
- Conocido un sistema inercial, cualquier otro sistema que se mueva con velocidad rectilínea y uniforme, sin girar —transformación de Galileo— es también inercial o galileano. Esto constituye el principio de relatividad de Galileo, y se deduce directamente de la segunda ley.
- En la teoría especial de la Relatividad de Einstein también se postula un sistema de referencia inercial global, pero ahora la transformación no es la de Galileo sino la de Lorentz.
- Finalmente, en la teoría general de la Relatividad no hay sistemas inerciales globales.

Limitaciones de las Leyes de Newton

- Los conceptos de masa y fuerza no están claros: las definiciones pecan de circulares. Incluso cuando se define una fuerza por la deformación estática (dinamómetros). Lo que sí es una magnitud perfectamente clara y medible es la aceleración.
- En la mecánica clásica, las fuerzas pueden depender de la posición de las partículas, de su velocidad, y del tiempo, pero no de las aceleraciones: $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t)$ (¡lo que observamos son aceleraciones!)
- Por tanto, la segunda ley se puede expresar diciendo que las aceleraciones se pueden expresar mediante una relación funcional sencilla de las posiciones, velocidades, y del tiempo.
- La segunda ley se aplica también a sistemas de masa variable. Hay que usar entonces la forma $\frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v})$, que da lugar al empuje: $-\dot{m}\,\mathbf{v}$.
- Newton habla solo de cuerpos, sin aclarar mucho, lo que corresponde a la partícula material. Para poder tratar sólidos o medios continuos hay que hacer hipótesis adicionales, como las de Euler.

Ecuaciones de Newton-Euler

Para poder tratar sólidos con las ecuaciones de Newton, hacen falta hipótesis adicionales:

- Un método es suponer que las fuerzas internas entre las partículas de un sólido siguen la tercera ley de Newton en su formulación fuerte.
- Otro camino, seguido por Euler, es postular la ecuación del momento cinético como principio independiente.

Por tanto, Euler formula dos principios básicos para la dinámica de cualquier sistema:

1. Cantidad de movimiento: $\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$
2. Momento de la cantidad de movimiento: $\mathbf{M}_G = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_G)$

También fue Euler el primero en escribir la segunda ley en la forma hoy conocida, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$

Límites de la mecánica clásica

Teoría especial de la relatividad: La velocidad de la luz es igual en todos los sistemas inerciales: transformación de Lorentz: $\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}$, espacio-tiempo de Minkowski. Apreciable en grandes distancias y cuando $v \to c$

Teoría general de la relatividad: Espacio de Riemann (espacio-tiempo-masa) que incorpora la masa en la matriz métrica: la gravedad curva el espacio. No hay sistemas inerciales globales. Válido en la proximidad de grandes masas. Despreciable cuando $r \gg r^* \simeq KGm/c^2$ ($K \simeq 10^5$, espacio plano)

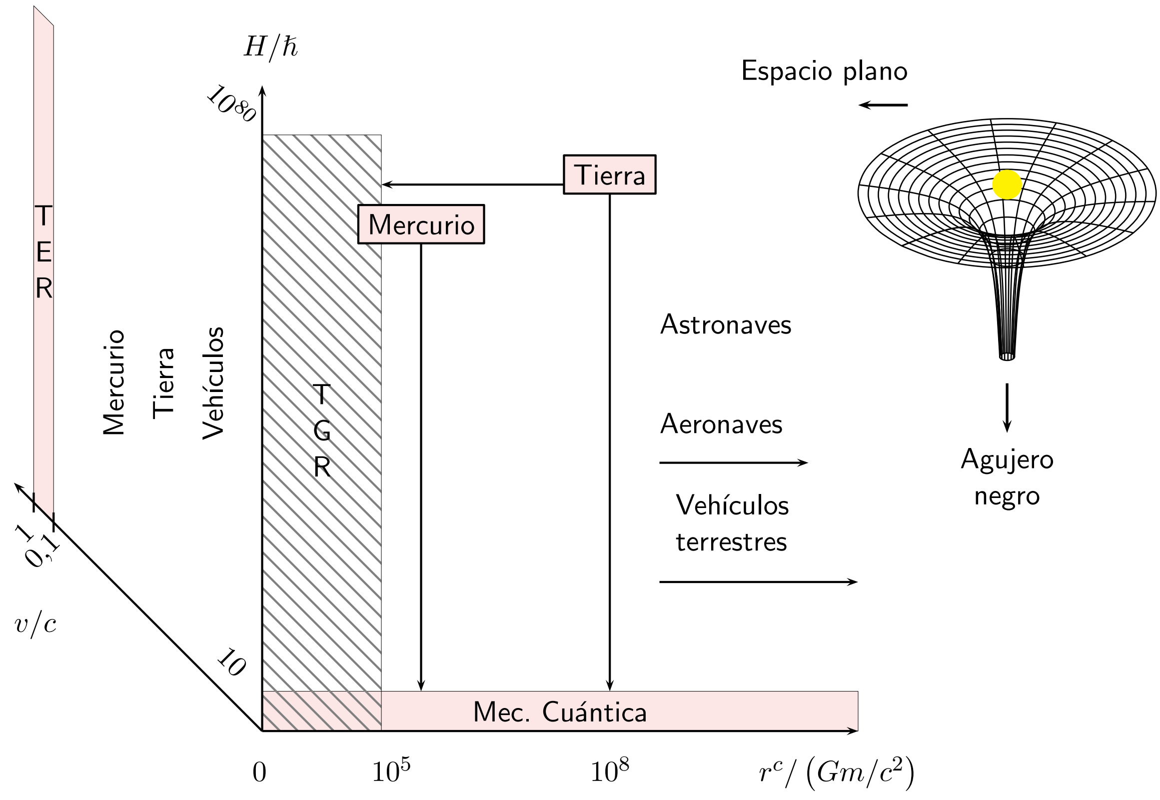
Radio de Schwarzschild: $r_s = \frac{2Gm}{c^2}$; (agujero negro u horizonte de sucesos)

Sol: $GM_\odot/c^2 = 1{,}47$ km; Mercurio: $\frac{r_{mer}}{GM_\odot/c^2} = 260684$; $\frac{r_\oplus}{GM_\odot/c^2} \simeq 10^8$

Mecánica Cuántica: A nivel de partículas (átomos, moléculas), los intercambios de energía están cuantificados: $\hbar\nu$. Despreciable para un número grande de partículas, cuando el momento cinético sea grande frente a la constante de Plank: $H \gg \hbar$

La mecánica clásica es el límite exacto de estas teorías cuando la relación de parámetros característicos tiende a cero: $\frac{v}{c} = \frac{r^*}{r} = \frac{\hbar}{H} \to 0$.

Límites de la mecánica clásica



Sistemas a considerar

- Partícula: 3 Grados De Libertad
  - 2ª Ley de Newton: $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ 3 ECs $\leftrightarrow$ 3 GDL
- Sistema de N partículas: 3N GDL
  - 2ª Ley de Newton: $\mathbf{F}_i = m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ 3N ECs $\leftrightarrow$ 3N GDL
  - O bien combinaciones de las 3N ecuaciones:
    - Cantidad de movimiento: $\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ 3 Ec
    - Momento cinético: $\sum \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{r}_i \wedge m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ 3 Ec
    - Energía: $\sum d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = \sum d\mathbf{r}_i \cdot m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ 1 Ec
    - Si no son suficientes, se divide el sistema (principio de corte).

Conceptos auxiliares

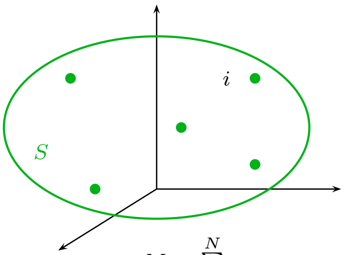
$$\mathbf{F} = m \cdot \ddot{\mathbf{r}}$$

- Trabajo
- Potencial
- Ligaduras

- Centro de masas
- Tensor de inercia

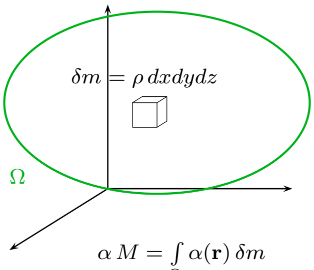
- Cantidad de movimiento
- Momento cinético
- Energía cinética

Modelo de sólido como N masas distribuidas



$$\alpha\, M = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, m_i$$

Modelo de sólido como continuo



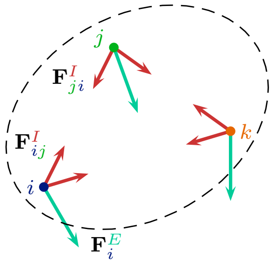
$$\alpha\, M = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{r})\, \delta m$$

- Los dos modelos son equivalentes para $N \to \infty,\ m_i \to 0$
- Tratamos el sólido como N partículas: evitamos el teorema del transporte para derivar la integral.

Ecuaciones generales

Ecuaciones generales

Ecuación de la cantidad de movimiento



En un sistema de N partículas, el movimiento está determinado por las $3N$ ecuaciones de cantidad de movimiento (CM) de las partículas:

$$\mathbf{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^I = m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i \qquad i = 1 \ldots N$$

Suele ser útil obtener combinaciones lineales de estas ecuaciones. Por ejemplo, sumar para todo el sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i^E + \overset{\text{3ª ley (débil)}}{\cancel{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\mathbf{F}_{ij}^I}}\right) = \mathbf{R}^E \\ &\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M\,\mathbf{r}_G = M\,\ddot{\mathbf{r}}_G \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(M\,\dot{\mathbf{r}}_G\right) = \mathbf{R}^E}$$

Este es el teorema de la cantidad de movimiento, o la ecuación de la cantidad de movimiento del sistema, $M\,\mathbf{v}_G$; a veces se llama momento lineal, $\mathbf{p} = M\,\mathbf{v}_G$.

Ecuación de la cantidad de movimiento

- El sistema se mueve como si toda la masa estuviera en el centro de masas, sometida a la resultante de las fuerzas exteriores.
- Las fuerzas interiores no influyen directamente en el movimiento del centro de masas (uno no puede levantarse tirándose de las orejas).
  - ¿Cómo se mueve una nave en el espacio?
  - Si en el sistema rifle-bala se conserva la cantidad de movimiento, ¿por qué la bala mata y el rifle no?
  - Nube de basura espacial tras la explosión de un satélite.
- Pueden influir indirectamente: cambiando la disposición de las partes del sistema pueden cambiar las fuerzas exteriores (mover los alerones → modificar la sustentación).

Ecuación de la cantidad de movimiento

Se obtiene directamente una integral primera $[\,f(\mathbf{r}_j, \dot{\mathbf{r}}_j, t) = \text{Cte}\,]$ si se anula la resultante exterior en una dirección fija:

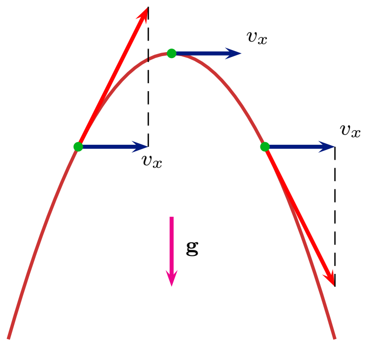
$$\mathbf{R}^E \cdot \mathbf{u} = 0 = \frac{d}{dt}(M\,\dot{\mathbf{r}}_G)\cdot\mathbf{u} \xrightarrow{\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{0}} \frac{d}{dt}(M\,\dot{\mathbf{r}}_G\cdot\mathbf{u}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{r}}_G\cdot\mathbf{u} = \text{Cte}$$

Si la dirección no es fija, $\dot{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$, no hay integral primera por este motivo.

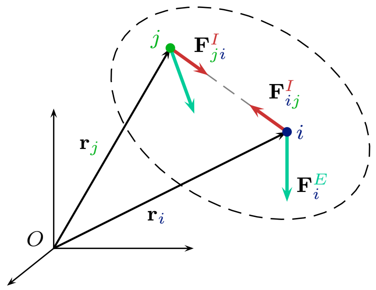
Ejemplo: tiro libre en el vacío.

$$m\begin{Bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{Bmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{i} = 0 & \Rightarrow & \dot{x} = \text{Cte}\\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{j} = 0 & \Rightarrow & \dot{y} = \text{Cte}\\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{k} \neq 0 & \Rightarrow & \text{E.D.O. para } z\end{array}\right.$$



Ecuación del momento cinético



Partiendo de las ecuaciones de cantidad de movimiento de cada partícula,

$$\mathbf{F}^E_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}^I_{ij} = m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i \qquad i = 1\ldots N$$

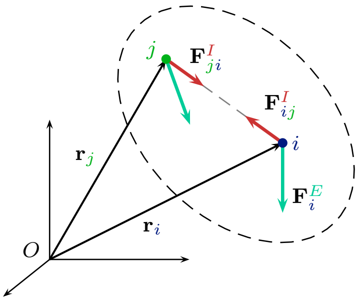
se toman momentos en un punto fijo O y se suma para todo el sistema.

- El momento de las fuerzas interiores se anula dos a dos, si se cumple la tercera ley de Newton en su formulación fuerte:

$$\mathbf{r}_i\wedge\mathbf{F}^I_{ij} + \mathbf{r}_j\wedge\mathbf{F}^I_{ji} = \big(\mathbf{r}_j + \overset{\text{3ª ley fuerte}}{\cancel{\mathbf{r}_{ji}}}\big)\wedge\mathbf{F}^I_{ij} + \mathbf{r}_j\wedge\mathbf{F}^I_{ji} = \mathbf{r}_j\wedge\big(\overset{\text{3ª ley débil}}{\cancel{\mathbf{F}^I_{ij}+\mathbf{F}^I_{ji}}}\big) = \mathbf{0}$$

- Solo queda el momento resultante de las fuerzas exteriores:

Ecuación del momento cinético



El momento cinético de una partícula M_i en O es:

$$\mathbf{L}_O^{M_i} = \mathbf{r}_i \wedge m_i \, \mathbf{v}^{M_i}$$

Como O es un punto fijo, $\mathbf{v}^{M_i} = \dot{\mathbf{r}}_i$, y al derivar,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O^{M_i} = \cancel{\dot{\mathbf{r}}_i \wedge m_i \, \dot{\mathbf{r}}_i} + \mathbf{r}_i \wedge m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Sumado tenemos la derivada del momento cinético (MC) del sistema en O:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \wedge m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \wedge m_i \, \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{L}}_O$$

Finalmente tenemos la ecuación del momento cinético en un punto fijo O (o teorema del momento cinético, MC o momento angular):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^E}$$

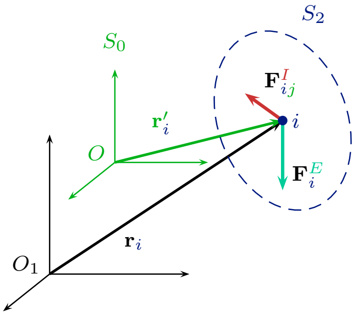
Ecuación del momento cinético

- El momento cinético del sistema solo puede variar con momentos exteriores
  - Conservación del momento cinético en el sistema solar
  - Maniobras de satélites: cohetes/ruedas de maniobra
  - Saltos de trampolín
- Si no hay momento en una dirección fija, se obtiene una integral primera:

$$\mathbf{M}_O^E \cdot \mathbf{u} = 0 = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O\right) \cdot \mathbf{u} \xrightarrow{\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{0}} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{u}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_O \cdot \mathbf{u} = \text{Cte}$$

  - Momento cinético constante y velocidad variable, distribuyendo la masa: patinador.
  - Separación del sistema Tierra-Luna al disipar energía por las mareas.

Momento cinético en punto móvil



A veces es útil tomar momentos en un punto O móvil:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge \mathbf{F}_i^E = \mathbf{M}_O^E = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\, \ddot{\mathbf{r}}_i$$

La parte derecha es más complicada: ahora $\dot{\mathbf{r}}'_i \neq \dot{\mathbf{r}}_i$ y el momento cinético tiene dos formas:

- Momento en O de las cantidades de movimiento absolutas:

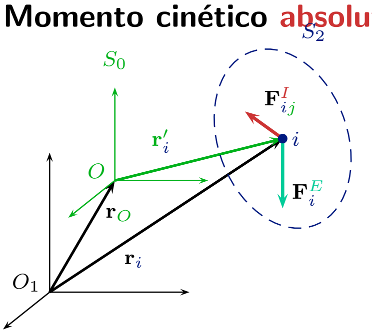
$$\mathbf{L}_O^{21} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\, \dot{\mathbf{r}}_{21}^{M_i}$$

- Momento en O de las cantidades de movimiento relativas:

$$\mathbf{L}_O^{20} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\, \dot{\mathbf{r}}_{20}^{M_i}$$

S_2 es el sistema de puntos; S_0 son paralelos a los fijos con origen en O.

Momento cinético absoluto en punto móvil



Buscamos una relación

$$\mathbf{M}_O^E = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\, \ddot{\mathbf{r}}_{21}^{M_i} \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\mathbf{L}}_O^{21}$$

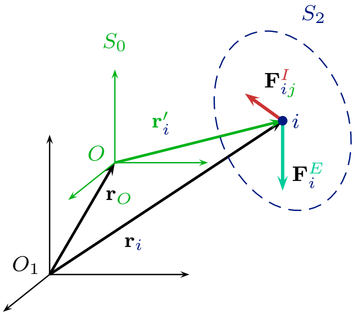
Por campo de momentos, $\mathbf{M}_{O_1}^E = \mathbf{M}_O^E + \cancel{\mathbf{r}_O \wedge \mathbf{R}^E}$

Partimos de la ecuación del MC en el punto fijo O_1, y sustituimos $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_O$:

$$\dot{\mathbf{L}}_{O_1}^{21} = \frac{d}{dt} \sum \left[(\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_O) \wedge m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}'_i \wedge m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i}_{\dot{\mathbf{L}}_O^{21}} + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_O \wedge \sum m_i\, \dot{\mathbf{r}}_i}_{\mathbf{v}_{01}^O \wedge M\, \mathbf{v}_{21}^G} + \cancel{\underbrace{\mathbf{r}_O \wedge \sum m_i\, \ddot{\mathbf{r}}_i}_{\mathbf{r}_O \wedge \mathbf{R}^E}}$$

Momento cinético relativo en punto móvil



En la ecuación del MC absoluto en punto móvil,

$$\mathbf{M}_O^E = \dot{\mathbf{L}}_O^{21} + \mathbf{v}_{01}^O \wedge M\,\mathbf{v}_{21}^G$$

aplicamos composición de movimientos

$$\dot{\mathbf{L}}_O^{21} = \dot{\mathbf{L}}_O^{20} + \dot{\mathbf{L}}_O^{01}$$

La derivada del momento cinético de arrastre vale:

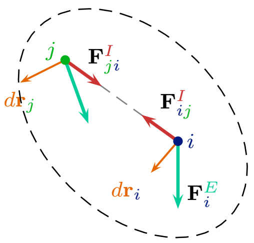
$$\dot{\mathbf{L}}_O^{01} = \frac{d}{dt}\sum \mathbf{r}'_i \wedge m_i\,\mathbf{v}_{01}^O = \sum m_i\,\mathbf{v}_{20}^{M_i} \wedge \mathbf{v}_{01}^O + \sum m_i\,\mathbf{r}'_i \wedge \dot{\mathbf{v}}_{01}^O =$$

$$= \sum m_i\left(\mathbf{v}_{20}^{M_i} + \mathbf{v}_{01}^O\right) \wedge \mathbf{v}_{01}^O + M\mathbf{OG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{01}^O = M\,\mathbf{v}_{21}^G \wedge \mathbf{v}_{01}^O + M\mathbf{OG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{01}^O$$

Sustituyendo, tenemos la ecuación del MC relativo en punto móvil; también aparece un término corrector, pero distinto:

$$\boxed{\mathbf{M}_O^E = \dot{\mathbf{L}}_O^{20} + M\mathbf{OG} \wedge \dot{\mathbf{v}}_{01}^O}$$

Ecuación de la energía



Otra manera de obtener combinaciones de las ecuaciones de CM es dar un desplazamiento a cada partícula y multiplicar escalarmente:

$$\sum_{i=1}^{N} d\mathbf{r}_i \cdot \left[\mathbf{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^I = m_i\,\ddot{\mathbf{r}}_i\right]$$

Por definición, el término de la izquierda es el trabajo elemental de las fuerzas:

$$\sum_{i=1}^{N} d\mathbf{r}_i \cdot \left[\mathbf{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^I\right] = \delta W^E + \delta W^I$$

El de la derecha se puede relacionar con la energía cinética:

$$m_i\,\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{r}_i = m_i\,d\mathbf{v}_i\,\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i\,d\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}m_i\,d\left(\mathbf{v}_i^2\right) = dT_i$$

Integral de la energía

Se ha obtenido la ecuación de la energía en forma diferencial:

$$\delta W^E + \delta W^I = dT$$

Se puede expresar como derivada (potencia) o como integral (trabajo finito):

$$\dot{W}^E + \dot{W}^I = \dot{T} \qquad\qquad \int_1^2 \delta W^E + \int_1^2 \delta W^I = T_2 - T_1$$

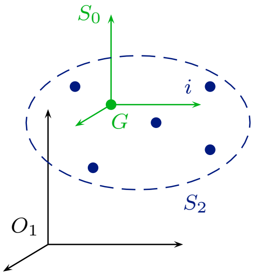
En general, δW no es una diferencial exacta. Lo es si las fuerzas derivan de un potencial. Entonces, la ecuación de la energía se integra directamente para obtener la integral de la energía:

$$\delta W = -dV = dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{T + V^E + V^I = E}$$

donde la constante E es la energía mecánica del sistema.

- De las ecuaciones globales (CM, MC, EN), solo la de la energía recoge el efecto de las fuerzas interiores.

Ecuación de la energía respecto al centro de masas



Tenemos la ecuación de la energía en ejes inerciales:

$$\delta W_{21}^E + \delta W_{21}^I = dT_{21}$$

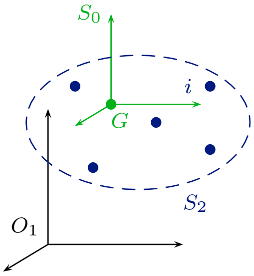
Podemos plantearla respecto a unos ejes S_0 paralelos a los fijos ($\boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0}$) con origen en el centro de masas del sistema G:

$$\sum_{i=1}^{N} d\mathbf{r}_{20}^{M_i} \cdot \Big(\mathbf{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^I\Big) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\mathbf{v}}_{21}^{M_i} \cdot d\mathbf{r}_{20}^{M_i}$$

- Por definición, $\sum_{i=1}^{N} d\mathbf{r}_{20}^{M_i} \cdot \big(\mathbf{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ij}^I\big) = \delta W_{20}^E + \delta W_{20}^I$
- Por composición de aceleraciones, $\dot{\mathbf{v}}_{21}^{M_i} = \dot{\mathbf{v}}_{20}^{M_i} + \dot{\mathbf{v}}_{01}^{M_i} + 2\cancel{\boldsymbol{\omega}_{01}} \wedge \mathbf{v}_{20}^{M_i}$

Podemos sustituir en el término de la derecha y aplicar $\frac{da}{dt}db = da\frac{db}{dt}$:

Ecuación de la energía respecto al centro de masas



$$\delta W_{20}^{E} + \delta W_{20}^{I} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(d\mathbf{v}_{20}^{M_i} + d\mathbf{v}_{01}^{M_i} \right) \cdot \mathbf{v}_{20}^{M_i}$$

El movimiento de arrastre es una traslación: $\mathbf{v}_{01}^{M_i} = \mathbf{v}_{01}^{G}$:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, d\mathbf{v}_{01}^{M_i} \cdot \mathbf{v}_{20}^{M_i} = d\mathbf{v}_{01}^{G} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \, \mathbf{v}_{20}^{M_i} = d\mathbf{v}_{01}^{G} \cdot M \, \overset{G \equiv G}{\cancel{\mathbf{v}_{20}^{G}}} = 0$$

Solo queda $\displaystyle \sum_{i=1}^{N} m_i \, d\mathbf{v}_{20}^{M_i} \cdot \mathbf{v}_{20}^{M_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, d \left(\mathbf{v}_{20}^{M_i} \right)^2 = dT_{20}$

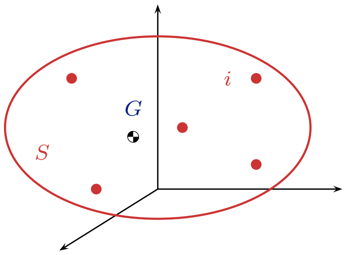
Podemos ya plantear la ecuación de la energía respecto al centro de masas:

$$\boxed{\delta W_{20}^{E} + \delta W_{20}^{I} = dT_{20}}$$

Respecto al centro de masas: respecto a unos ejes paralelos a los fijos con origen en el centro de masas del sistema.

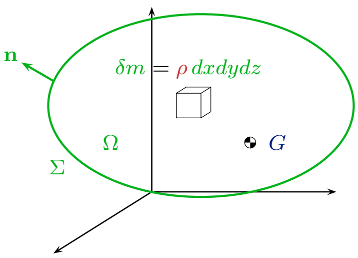
Cantidad de movimiento

La cantidad de movimiento de un sistema es la suma (integral) de las cantidades de movimiento de cada partícula (elemento de masa):



$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}^i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}^i = \frac{d}{dt} M \, \mathbf{r}^G \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{p} = M \, \mathbf{v}^G}$$



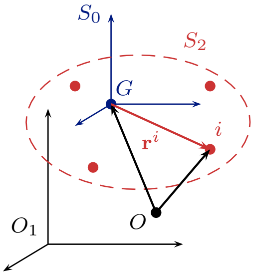
$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \, \rho \, dV = \quad \text{(Tª del transporte de Reynolds)}$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r} \, \rho \, dV - \int_{\Sigma} \mathbf{r} \, \rho \, (\cancel{\mathbf{v}_{22}} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{d}{dt} M \, \mathbf{r}^G \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{p} = M \, \mathbf{v}^G}$$

Momento cinético: Teorema de Koenig

- Momento cinético de un sistema material S_2 respecto a un punto arbitrario O, fijo o móvil.
- Usaremos un sistema intermedio S_0, con origen en en centro de masas y ejes paralelos a los fijos ($2/0$: "movimiento relativo a G").



$$\mathbf{L}_O^{21} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{OM_i} \wedge m_i\, \mathbf{v}_{21}^i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{OG} + \mathbf{r}^i) \wedge m_i\, \mathbf{v}_{21}^i =$$

$$= \mathbf{OG} \wedge \overbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_{21}^i}^{M\,\mathbf{v}_{01}^G} + \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \mathbf{r}^i}_{M\cancel{\mathbf{GG}}} \wedge (\mathbf{v}_{20}^i + \underbrace{\mathbf{v}_{01}^i}_{\text{Cte.: } \mathbf{v}_{01}^G})}^{\mathbf{L}_G^{20}} \Rightarrow$$

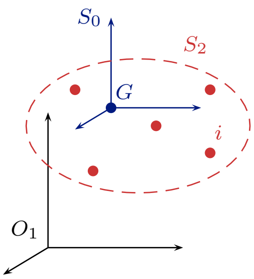
$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{L}_O^{21} = \mathbf{OG} \wedge M\, \mathbf{v}_{01}^G + \mathbf{L}_G^{20}}$$

Teorema de Koenig: el momento cinético respecto a un punto arbitrario es el que tendría toda la masa concentrada en G, más el momento cinético relativo a G.

Como el campo de momentos: resultante $(M\mathbf{v}_{01}^G)$ y momento $(\mathbf{L}_G^{20})$

Energía cinética: Teorema de Koenig

- Energía cinética de un sistema material S_2 en el movimiento $2/1$
- Usaremos un sistema intermedio S_0, con origen en en centro de masas y ejes paralelos a los fijos ($2/0$: "movimiento relativo a G").



$$T_{21} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, (\mathbf{v}_{21}^i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, (\mathbf{v}_{20}^i + \mathbf{v}_{01}^i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, (\mathbf{v}_{20}^i)^2 + \overset{M\,\mathbf{v}_{00}^G}{\cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_{20}^i}} \cdot \mathbf{v}_{01}^G + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\, (\mathbf{v}_{01}^G)^2$$

$$\boxed{T_{21} = T_{20} + \frac{1}{2} M\, (\mathbf{v}_{01}^G)^2}$$

Teorema de Koenig: La energía cinética de un sistema es la que tendría toda la masa concentrada en G, más la del movimiento relativo a G.

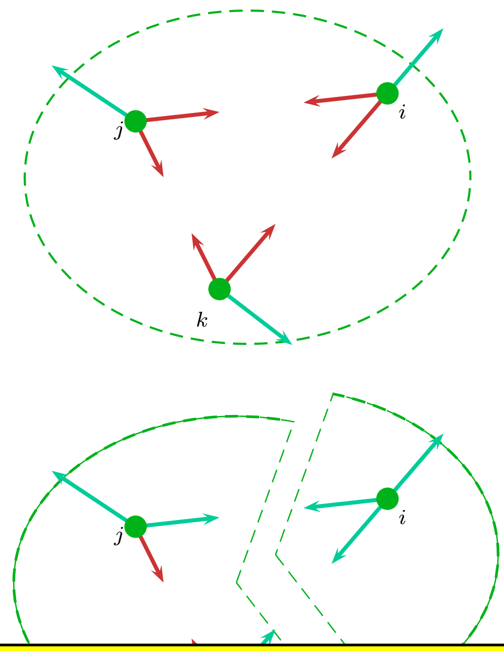
7 Ecuaciones generales de los sistemas

CM	$\mathbf{R}^E = M\,\ddot{\mathbf{r}}_G$	3	
MC_a MC_b MC_c	$\mathbf{M}^E_{O_1} = \dot{\mathbf{L}}^{21}_{O_1}$ $\mathbf{M}^E_O = \dot{\mathbf{L}}^{21}_O + \mathbf{v}^O_{01} \wedge M\,\mathbf{v}^G_{21}$ $\mathbf{M}^E_O = \dot{\mathbf{L}}^{20}_O + M\,\mathbf{OG} \wedge \dot{\mathbf{v}}^O_{01}$	3	$\mathsf{MC}_b = f\,(\mathsf{CM}, \mathsf{MC}_a)$ $\mathsf{MC}_c = f\,(\mathsf{CM}, \mathsf{MC}_a)$ $\mathbf{M}^E_G = \dot{\mathbf{L}}^{21}_G = \dot{\mathbf{L}}^{20}_G$
EN_a EN_b	$\delta\,W^E_{21} + \delta\,W^I_{21} = dT_{21}$ $\delta\,W^E_{20} + \delta\,W^I_{20} = dT_{20}$	1	$\mathsf{EN}_b = f\,(\mathsf{CM}, \mathsf{EN}_a)$

- Toda la información está en las $3N$ ecuaciones de las partículas.
- Las 7 globales pueden ser más sencillas o convenientes.
- Si no son suficientes, se divide el sistema

Integrales primeras			
CM	$\mathbf{R}^E \cdot \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u}$ cte.)	$\rightarrow$	$\dot{\mathbf{r}}_G \cdot \mathbf{u} =$ Cte
MC	$\mathbf{M}^E_O \cdot \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{u}$ cte.)	$\rightarrow$	$\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{u} =$ Cte
EN	$\delta\,W = -dV = dT$	$\rightarrow$	$T + V^{E+I} = E =$ Cte.

Principio de corte de Euler-Cauchy



Considerando el sistema completo, las fuerzas internas no aparecen en las ecuaciones de CM ni MC:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$$

al sumar para todo el sistema se anula la resultante (3ª ley débil) y el momento resultante (3ª ley fuerte).

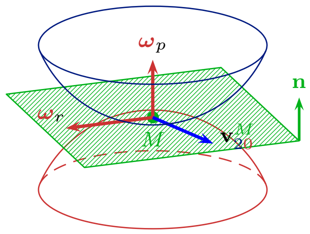
Si se necesitan más de las 7 ecuaciones generales, se puede dividir el sistema en partes, pero entonces las fuerzas internas entre partículas de ambas partes deben contarse como exteriores.

Fuerzas de contacto

Contacto liso entre sólidos

El contacto de dos sólidos S_2 y S_0 en un punto M (variable) es una Ligadura: limitación al movimiento de un sistema en una dirección (desplazamiento o giro).

- La condición de contacto (plano tangente común en M) permite 5 grados de libertad:
  - Pivotamiento $\quad \omega_p \parallel \mathbf{n}$: 1 GDL
  - Rodadura $\quad \omega_r \perp \mathbf{n}$: 2 GDL
  - Deslizamiento $\quad \mathbf{v}_{20}^M \perp \mathbf{n}$: 2 GDL



- Ligadura: impide el movimiento relativo según la normal común:

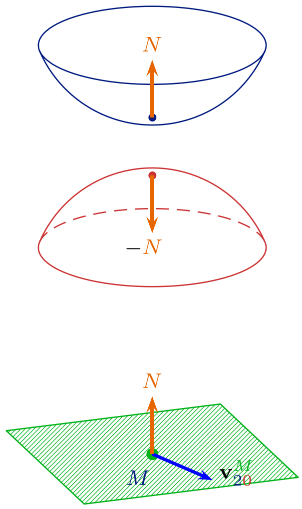
$$\mathbf{v}_{20}^M \cdot \mathbf{n} = 0$$

- Sobre el punto M de cada sólido actúa una fuerza de ligadura que obliga a que se cumpla la

Contacto liso entre sólidos

- Las fuerzas de ligadura son un par de acción-reacción: $\pm\mathbf{N}$
- Se conoce su dirección (la de movimiento impedido, $\mathbf{n}$), pero no su módulo $N(t)$: otra incógnita del problema; depende de las fuerzas y aceleraciones.
- En un contacto liso, el sistema de fuerzas de ligadura no trabaja:

$$\delta W = \mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{21}^{M} - \mathbf{N}\cdot\mathbf{v}_{01}^{M} = \mathbf{N}\overset{\perp}{\cdot}\mathbf{v}_{20}^{M} = 0$$



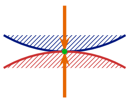
En general, las ligaduras lisas introducen:

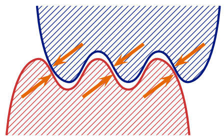
- Una componente de fuerza en cada dirección de desplazamiento impedido
- Una componente de momento en cada dirección de giro impedido

Contacto rugoso entre sólidos

Liso: contacto en un punto.

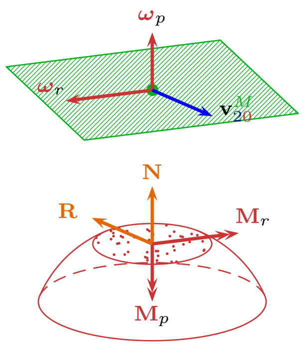
Fuerza normal al plano tangente aplicada en ese punto.





Rugoso: contacto en una zona.

Sistema de fuerzas con una resultante y un momento arbitrarios.



1	Reacción normal	$\mathbf{N} \parallel \mathbf{n}$
2	Fuerza de rozamiento	$\mathbf{R} \propto -\mathbf{v}_{20}^{M}$
1	Momento opuesto al pivotamiento	$\mathbf{M}_p \propto -\boldsymbol{\omega}_p$
2	Momento opuesto a la rodadura	$\mathbf{M}_r \propto -\boldsymbol{\omega}_r$

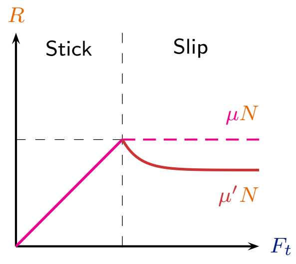
Modelo de Coulomb/Morin del rozamiento

Fenómeno complejo (adhesión/penetración, elástico, plástico, ...). Dos casos[1]:

- Desliza/pivota/rueda: coeficientes dinámicos μ', ϵ', δ'
- No desliza/pivota/rueda: coeficientes estáticos μ, ϵ, δ

	Desliza	Pivota	Rueda
sí (slip)	$\mathbf{R} = -\mu' \lvert\mathbf{N}\rvert \frac{\mathbf{v}_{20}^M}{\lvert\mathbf{v}_{20}^M\rvert}$	$\mathbf{M}_p = -\epsilon' \lvert\mathbf{N}\rvert \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{\lvert\boldsymbol{\omega}_p\rvert}$	$\mathbf{M}_r = -\delta' \lvert\mathbf{N}\rvert \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\lvert\boldsymbol{\omega}_r\rvert}$
no (stick)	$\lvert\mathbf{R}\rvert \leq \mu \lvert\mathbf{N}\rvert$	$\lvert\mathbf{M}_p\rvert \leq \epsilon \lvert\mathbf{N}\rvert$	$\lvert\mathbf{M}_r\rvert \leq \delta \lvert\mathbf{N}\rvert$

- Leonardo-Amontons-Euler-Coulomb-Morin-Hardy-Tomlison $\rightarrow$ Tribología
- Primera aproximación. Puede producir paradojas.
- $\mu \ldots$ dependen solo de los dos materiales en contacto.
- No desliza/...($\leq$): incógnita; problema de estática.



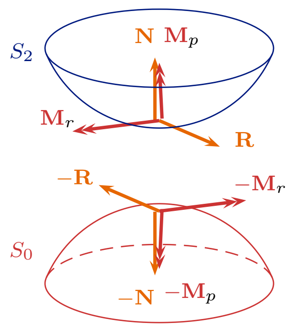
[1] P. Appell, *Précis de Mécanique Rationnelle*, cap. 13; P. Painlevé, *Leçons sur le frottement*, 1895

Trabajo de las acciones de contacto

El sistema de fuerzas de contacto entre sólidos tiene trabajo negativo o nulo:

$$\text{Fuerzas:} \begin{cases} 0 \blacktriangleright 2: & \mathbf{N} \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{M}_p \quad \mathbf{M}_r \\ 2 \blacktriangleright 0: & -\mathbf{N} \quad -\mathbf{R} \quad -\mathbf{M}_p \quad -\mathbf{M}_r \end{cases}$$

$$\text{Potencia:} \begin{cases} \dot{W}_{0\blacktriangleright 2} = (\mathbf{N}+\mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_{21}^M + (\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_r) \cdot \boldsymbol{\omega}_{21} \\ \dot{W}_{2\blacktriangleright 0} = -(\mathbf{N}+\mathbf{R}) \cdot \mathbf{v}_{01}^M - (\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_r) \cdot \boldsymbol{\omega}_{01} \end{cases}$$



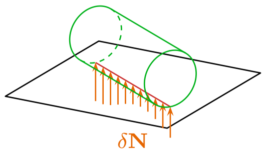
Cada uno puede ser +/-. El del sistema acción-reacción:

$$\dot{W} = (\mathbf{N}+\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{v}_{21}^M - \mathbf{v}_{01}^M) + (\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_r) \cdot (\boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_{01}) =$$

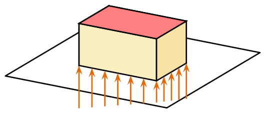
$$= \left(\cancel{\mathbf{N}} \overset{\perp}{+} \mathbf{R}\right) \cdot \mathbf{v}_{20}^M + (\mathbf{M}_p + \mathbf{M}_r) \cdot \overbrace{\boldsymbol{\omega}_{20}}^{\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_r} = \qquad \text{[Modelo Coulomb]}$$

Contacto liso sobre curva/superficie

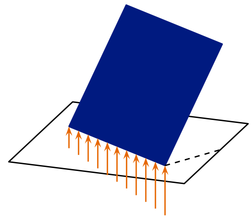
- Fuerza de ligadura elemental $\delta\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)$ en cada punto de contacto.



- Normal al plano tangente común en ese punto.
- La mecánica clásica de sólidos rígidos no puede conocer la distribución de fuerzas: problema de elasticidad.
- Sí se pueden calcular las direcciones de la resultante y el momento resultante del sistema, por dos caminos:
  - Analizando las direcciones del sistema de fuerzas.
  - Analizando los grados de libertad. Este suele ser más simple y más general, porque no hay que especificar físicamente la ligadura, solo funcionalmente.



- Como son fuerzas/momentos de ligadura, los valores algebraicos (módulo y sentido) son incógnitas del problema y hay que obtenerlas resolviendo el problema completo.



Enlaces ideales: rodadura

Rueda y pivota sin deslizar. Suponemos que el coeficiente de rozamiento al deslizamiento μ es infinito o suficiente para que no deslice; $\delta = \epsilon = 0$.

a) Análisis de los grados de libertad:

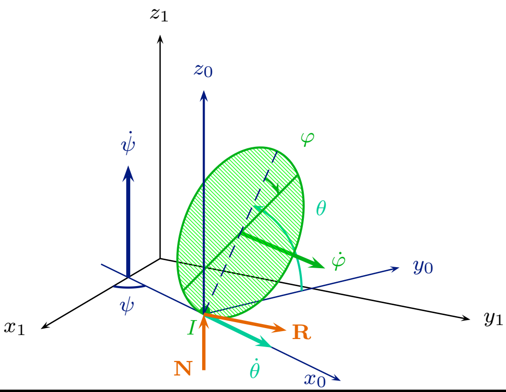
Movimientos impedidos por la ligadura:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^I_{21} \cdot \mathbf{k}_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad \mathbf{N} \\ \mathbf{v}^I_{21} \cdot \mathbf{i}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad R_x \\ \mathbf{v}^I_{21} \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad R_y \end{aligned}$$

Grados de libertad:

Pivota (1) $\quad \boldsymbol{\omega}^p_{21} = \left(\dot\psi - \dot\varphi\,\cos\theta\right)\,\mathbf{k}_1$

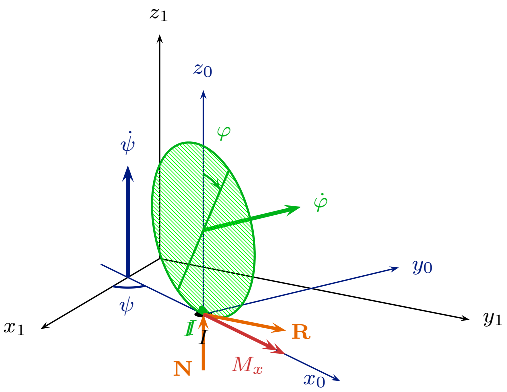
Rueda (2) $\quad \boldsymbol{\omega}^r_{21} = \dot\theta\,\mathbf{i}_0 + \dot\varphi\,\sin\theta\,\mathbf{j}_0$



Enlaces ideales: rodadura

Rueda y pivota sin deslizar, manteniéndose normal al plano ($\theta = \pi/2$).

a) Análisis de los grados de libertad:



Movimientos impedidos por la ligadura:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{21}^{I} \cdot \mathbf{k}_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad \mathbf{N} \\
\mathbf{v}_{21}^{I} \cdot \mathbf{i}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad R_x \\
\mathbf{v}_{21}^{I} \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad R_y \\
\boldsymbol{\omega}_{21} \cdot \mathbf{i}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad M_x
\end{aligned}$$

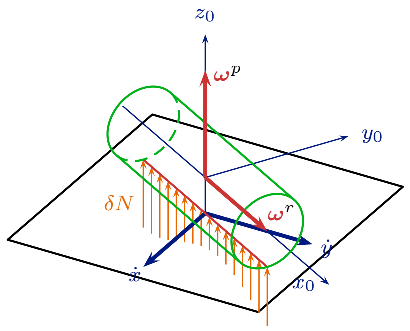
Grados de libertad:

Pivota (1) $\quad \boldsymbol{\omega}_{21}^{p} = \dot\psi\, \mathbf{k}_1$

Rueda (1) $\quad \boldsymbol{\omega}_{21}^{r} = \dot\varphi\, \mathbf{j}_0$

b) Análisis del sistema de fuerzas: Fuerzas, igual. Momentos: no se pueden obtener porque no se explica cómo se impide el giro θ (chasis, ...)

Enlaces ideales: apoyo sobre una recta



Análisis de grados de libertad:

- Permitidos: $\quad \dot x,\ \dot y,\ \omega_x,\ \omega_y$
- Impedidos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{21}^{C} \cdot \mathbf{k}_1 = 0 \quad &\rightarrow \quad N\,\mathbf{k}_1 \\
\boldsymbol{\omega}_{21} \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y\,\mathbf{j}_0
\end{aligned}$$

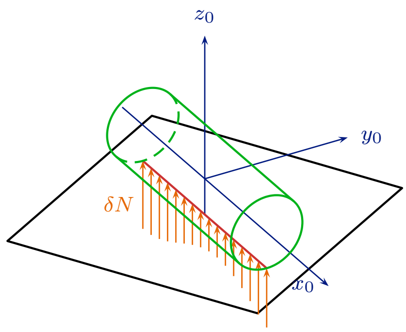
Análisis del sistema distribuido $\delta N(x,t)\,\mathbf{k}_1$:

- Resultante: $\quad \int (0,0,\delta N)\, ds = (0,0,N)$

  (todas la fuerzas elementales son paralelas a Cz, la resultante también)

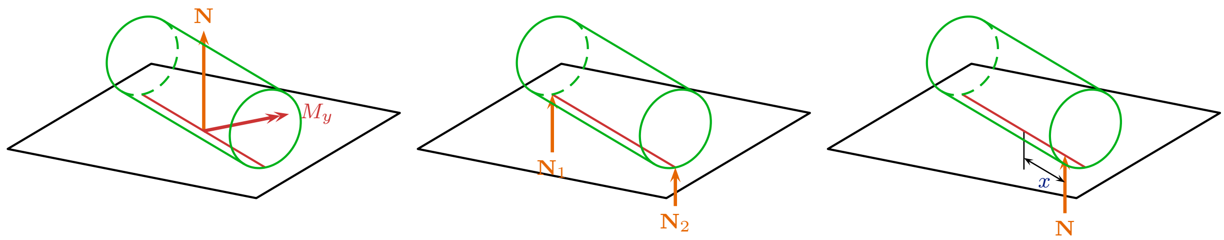
- Momento: $\quad \int (x,0,0) \wedge (0,0,\delta N)\, ds = \int (0,-x\delta N,0)\, ds = (0,M_y,0)$

Enlaces lisos: Sistema equivalente



Por tratarse de un sólido, el sistema de fuerzas de ligadura distribuidas $\delta N(\mathbf{r}, t)$ se puede sustituir por cualquier sistema de fuerzas con la misma resultante y el mismo momento resultante. Se escoge el más conveniente en cada caso.

$N_1 + N_2 = N \qquad (N_1 - N_2)\,\frac{H}{2} = M_y \qquad N\,x = -M_y$



P.e.: para la condición de vuelco, es más conveniente la forma (N, x): vuelca cuando x queda fuera de la línea de contacto.

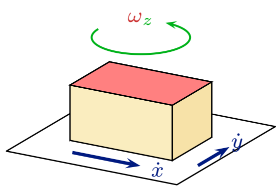
Enlaces lisos: apoyo sobre un plano

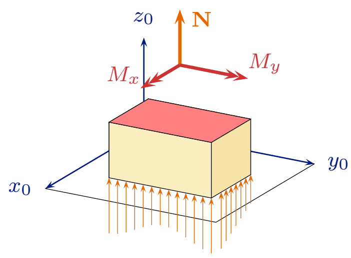
Grados de libertad:

- Permitidos: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ω_z
- Impedidos: $\dot{z}$, ω_x, ω_y

Fuerzas/momentos en las direcciones impedidas:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$





Sistema de fuerzas:

$$\delta N(x, y, t)\,\mathbf{k}_1 \;\Rightarrow$$

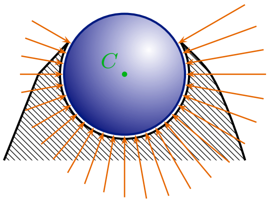
$$\Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 & \perp \\ R_y = 0 & \perp \\ M_z = 0 & \parallel \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistemas equivalentes:

N_2

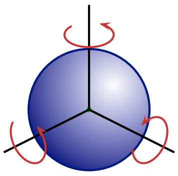
Enlaces lisos: rotula



Analizando el sistema de fuerzas:

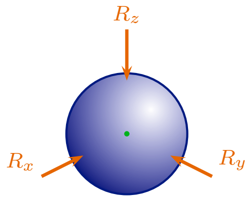
$$\delta\mathbf{N} = \delta N\, \mathbf{u}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}$$

Analizando los grados de libertad:



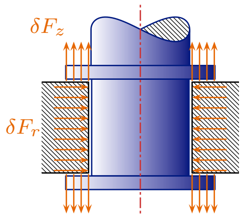
Permitidos: ω_x, ω_y, ω_z

Impedidos: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$



- Rótula ↔ junta esférica ↔ junta universal ↔ punto fijo ↔ suspensión cardan ↔ gimball
- Junta de clase 3 (deja 3 GDL).

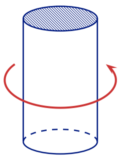
Enlaces lisos: cojinete con restricción axial



Analizando el sistema de fuerzas:

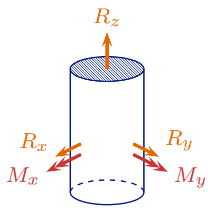
$$\left.\begin{matrix} \delta F_z\, \mathbf{k}_1 & \parallel & Oz \\ \delta F_r\, \mathbf{u}_r & \nparallel & Oz \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad M_z = 0$$

Analizando los grados de libertad:

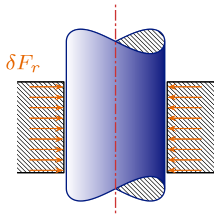


Permitidos: ω_z

Impedidos: ω_x, ω_y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$



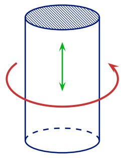
Enlaces lisos: cojinete sin restricción axial



Analizando el sistema de fuerzas:

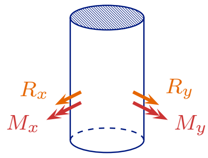
$$\begin{cases} \delta F_r\,\mathbf{u}_r \perp Oz \Rightarrow R_z = 0 \\ \delta F_r\,\mathbf{u}_r \not\perp Oz \Rightarrow M_z = 0 \end{cases}$$

Analizando los grados de libertad:



Permitidos: ω_z, $\dot{z}$

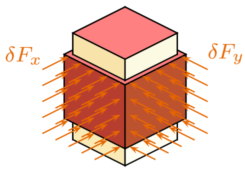
Impedidos: ω_x, ω_y, $\dot{x}$, $\dot{y}$



- El resultado es el mismo: $\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{Bmatrix}$ $\quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{Bmatrix}$
- *Cylindrical joint*: Junta de clase 2 (deja 2 GDL).

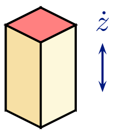
Enlaces lisos: corredera

Analizando el sistema de fuerzas:



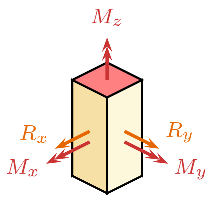
$$\delta F_x,\, \delta F_y \perp Oz \Rightarrow R_z = 0$$

Analizando los grados de libertad:

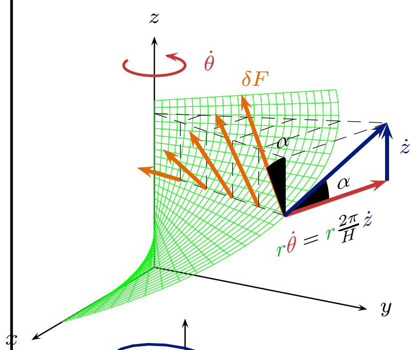


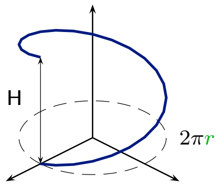
Permitidos: $\dot{z}$

Impedidos: ω_x, ω_y, ω_z, $\dot{x}$, $\dot{y}$



Enlaces lisos: roscas, tornillos/tuercas





$\tan\alpha = \frac{H}{2\pi r}$

Analizando el sistema de fuerzas: en cada punto habrá una fuerza elemental normal al helicoide generalizado de contacto.

$$\left.\begin{array}{r}\delta R_z = \delta F\cos\alpha \\ -\delta M_z = r\delta F\sin\alpha\end{array}\right\} - \frac{M_z}{R_z} = r\tan\alpha = \frac{H}{2\pi}$$

Analizando los grados de libertad: Si dos helicoides generalizados están en contacto, cada punto puede moverse por su hélice r = Cte del helicoide.

$$\frac{dz}{rd\theta} = \frac{H}{2\pi r} \quad\Rightarrow\quad \frac{\dot z}{\omega_z} = \frac{H}{2\pi}$$

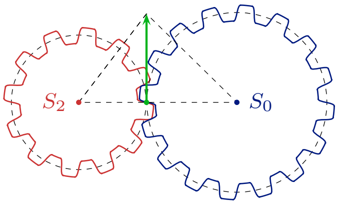
- Reacciones (6 componentes, 5 indept.):
- *Helical joint*: clase 1 (deja 1 GDL).

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ -\frac{H}{2\pi}R_z \end{Bmatrix}$$

Otros enlaces lisos

Engranajes

Rodadura sin deslizamiento entre dos sólidos ya sujetos por cojinetes con restricción paralelos (queda 1 GDL).



$$\mathbf{v}_{21}^{M} = \mathbf{v}_{01}^{M} \;\rightarrow\; -\boldsymbol{\omega}_{21}\, r_2 = \boldsymbol{\omega}_{01}\, r_0$$

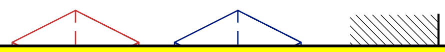
Como los dientes son del mismo tamaño, el núme-

Empotramiento

Contacto sobre una superficie arbitraria. No hay movimiento compatible con el contacto en todos los puntos. Los dos sólidos se mueven como uno solo. GDL=0 (junta de clase 0)

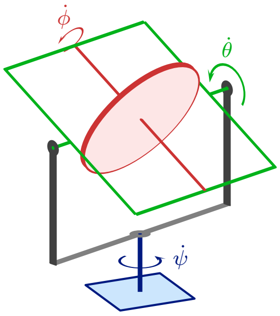
$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Hay 6 incógnitas de fuerzas/momentos de ligadura, y 0 de coordenadas.

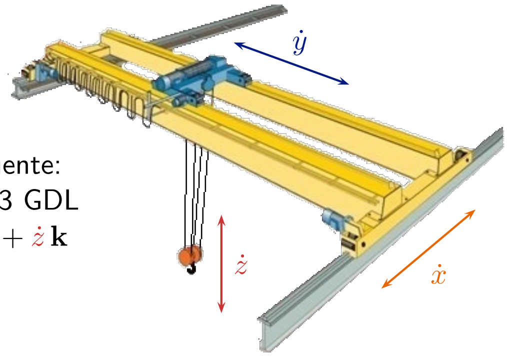


Combinación de enlaces

En serie (a sólidos sucesivos): Unión de grados de libertad.

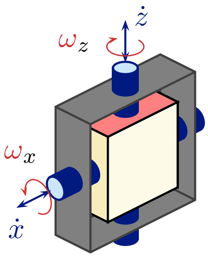


Suspensión Cardan:
1+1+1=3 GDL
$\dot\psi\,\mathbf{k}_1 + \dot\theta\,\mathbf{k}_0 + \dot\phi\,\mathbf{k}_0$
(si $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_0$)



Grúa puente:
1+1+1=3 GDL
$\dot x\,\mathbf{i} + \dot y\,\mathbf{j} + \dot z\,\mathbf{k}$

En paralelo (al mismo sólido): Intersección de GDL.



$\dot x$	-	-	ω_x	-	-
-	-	$\dot z$	-	-	ω_z
-	-	-	-	-	-

$\dot x$	$\dot y$	-	-	-	ω_z
$\dot x$	-	- $\dot z$ -	ω_y	-	
$\dot x$	-	-	-	-	-