# Aplicaciones de la derivada 1

Universidad Europea

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

# Regla de L`Hopital

La primera aplicación de la función derivada es la llamada **Regla de L´Hôpital** en honor al matemático Guillaume François, marqués de L´Hôpital.

- Sean *f* y *g* dos funciones derivables tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \quad \text{O bien} \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$$

Y además *g'(x)≠0*. Entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En los límites con indeterminaciones del tipo *0/0* o ∞/∞, es posible resolver la indeterminación mediante el cociente de las derivadas de las funciones.

# Observaciones

- Ésta regla se puede aplicar tantas veces como sea necesario hasta resolver la indeterminación.
- Para la resolución de otro tipo de indeterminaciones, es necesario primero operar convenientemente hasta lograr una indeterminación del tipo *0/0* o $\infty/\infty$.
- Observa que para resolver el límite derivamos las funciones del numerador y del denominador por separado, NO se trata de resolver la derivada de un cociente de funciones.

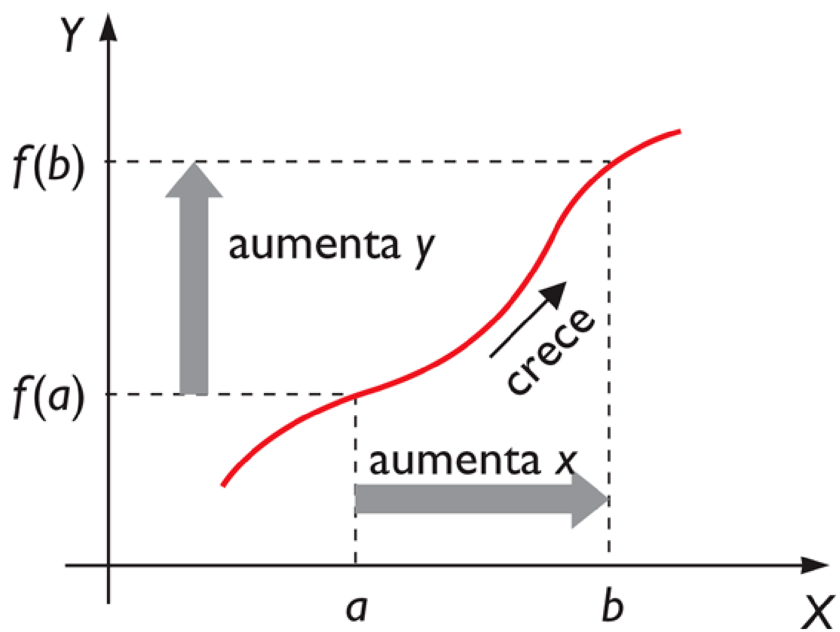
# Ejemplos

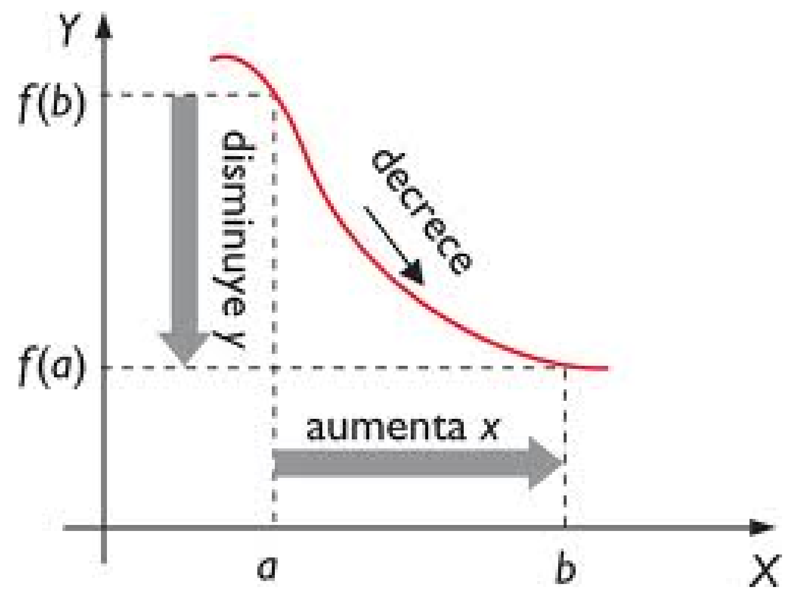
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-x^2+x-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

# Crecimiento de una función

Decimos que una función es **creciente** en un intervalo [a,b] si para cualquier valor $x_1<x_2$ tenemos que $f(x_1)<f(x_2)$.

Decimos que una función es **decreciente** en un [a,b] si para cualquier valor $x_1<x_2$ tenemos que $f(x_1)>f(x_2)$

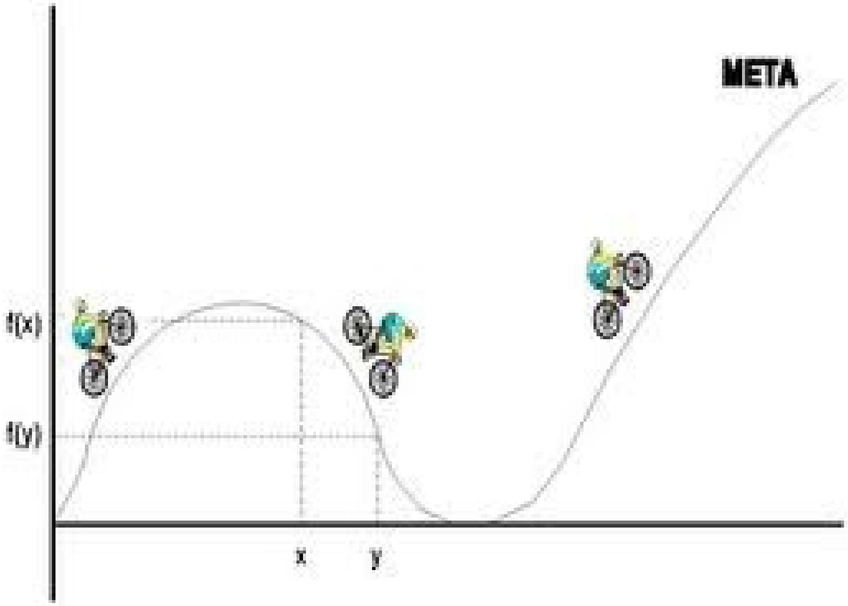


# Criterio para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada

Una función $f(x)$ derivable en un intervalo es:

- creciente si $f'(x)>0$ en todo el intervalo.
- decreciente si $f'(x)<0$ en todo el intervalo.
- constante si $f'(x)=0$ en todo el intervalo.



# Cómo determinar los intervalos de crecimiento

Para obtener los intervalos de crecimiento debemos seguir los siguientes pasos:

- Calcular el dominio de la función identificando las discontinuidades.
- Calcular la primera derivada de la función.
- Igualar la derivada a cero, obteniendo los valores de $x$ que anulan la primera derivada.
- Construir los intervalos con los puntos que anulan la derivada y los puntos fuera de dominio (en los que existe discontinuidad).
- Estudiar el signo de la derivada en dichos intervalos

# Ejemplo

Estudiar el crecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

1. Dominio $$Dom f = R - \{2, -2\}.$$

2. Derivada $$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

3. Igualar la derivada a cero $$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$$f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

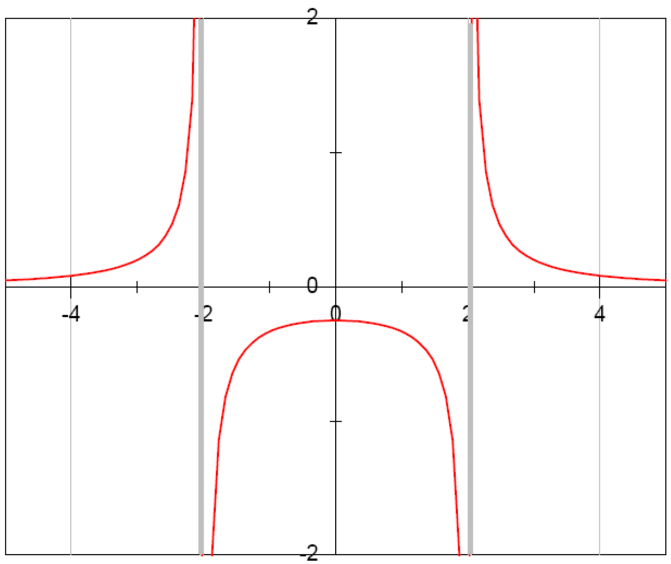
4. Construimos los intervalos con los puntos fuera de dominio (el 2 y el -2) y con los puntos que anulan la primera derivada (el 0).

(-∞,-2), (-2,0), (0,2), (2,∞)

# Ejemplo

Estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos, para ello tomamos un punto cualquiera del intervalo y sustituimos en la función derivada para ver su signo

- En $(-\infty,-2)$: Probamos con el -3: $f'(-3)=6/25>0$ *Creciente*
- En $(-2,0)$: Probamos con el -1: $f'(-1)=2/9>0$ *Creciente*
- En $(0,2)$: Probamos con el 1: $f'(1)=-2/9<0$ *Decreciente*
- En $(2,\infty)$: Probamos con el 3: $f'(3)=-6/25<0$ *Decreciente*



# Crecimiento de las funciones económicas


**Curva de Oferta**

La curva de oferta representa la relación que existe entre los precios y las cantidades ofrecidas.

Cuando los precios son altos, se produce mucho por lo que las cantidades ofrecidas son altas, mientras que si los precios disminuyen, la cantidad ofrecida disminuirá.

Por lo tanto la función (o curva de oferta) es creciente y tiene pendiente positiva (su derivada es positiva)

**Curva de Demanda**

La curva de la demanda representa la relación entre la máxima cantidad de un determinado bien o servicios que un consumidor estaría dispuesto a pagar a cada precio de ese bien.

En un mercado ideal, los compradores (demandantes) quieren obtener la mayor cantidad de bienes al precio más bajo posible.

Por lo tanto, cuanto mayor es el precio menor es la demanda: la función de demanda es decreciente y tiene pendiente negativa (la derivada es negativa).

# Extremos relativos

Decimos que la función *f* tiene un **máximo local (o relativo)** en un intervalo [a,b] en el punto *c* del intervalo si se cumple que, para cualquier valor *x* de intervalo $f(x)<f(c)$.

Decimos que la función *f* tiene un **mínimo local (o relativo)** en un intervalo [a,b] en el punto *c* del intervalo si se cumple que, para cualquier valor *x* de intervalo $f(c)<f(x)$.

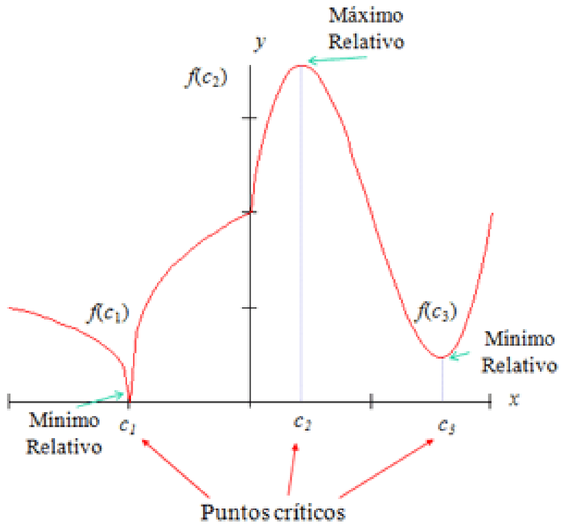
Llamaremos **extremo local (o relativo)** de una función a los puntos máximo y mínimos relativos.

# Puntos críticos

Es decir, los "candidatos" a extremo relativo los encontraremos entre los puntos que anulan la primera derivada.

Los puntos que anulan la primera derivada los denominamos **puntos críticos.**

Si una función $f$ tiene un extremo (máximo o mínimo) relativo en el punto $c$ de un intervalo [a,b] y $f$ es derivable, entonces $f'(c)=0$

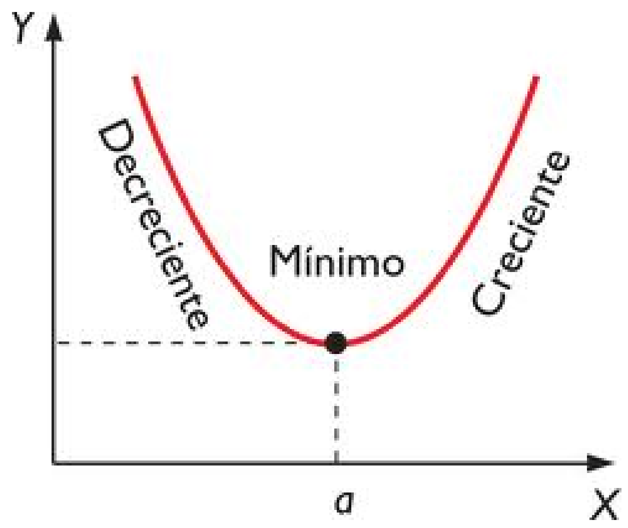


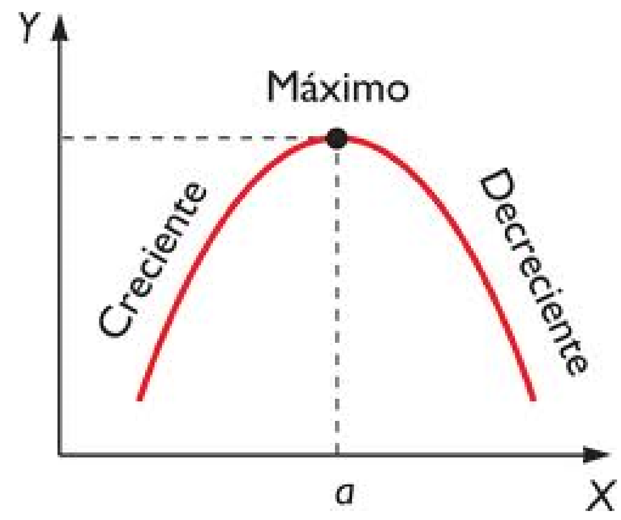

**¡Cuidado!** Todos los extremos son puntos críticos pero no todos los puntos críticos son extremos.

# Primer criterio **(criterio del crecimiento)**

Sea ***a*** un punto crítico

- Si una función cambia de crecer a decrecer en dicho punto, entonces es un **máximo local**.
- Si una función cambia de decrecer a crecer en dicho punto, entonces es un **mínimo local**.

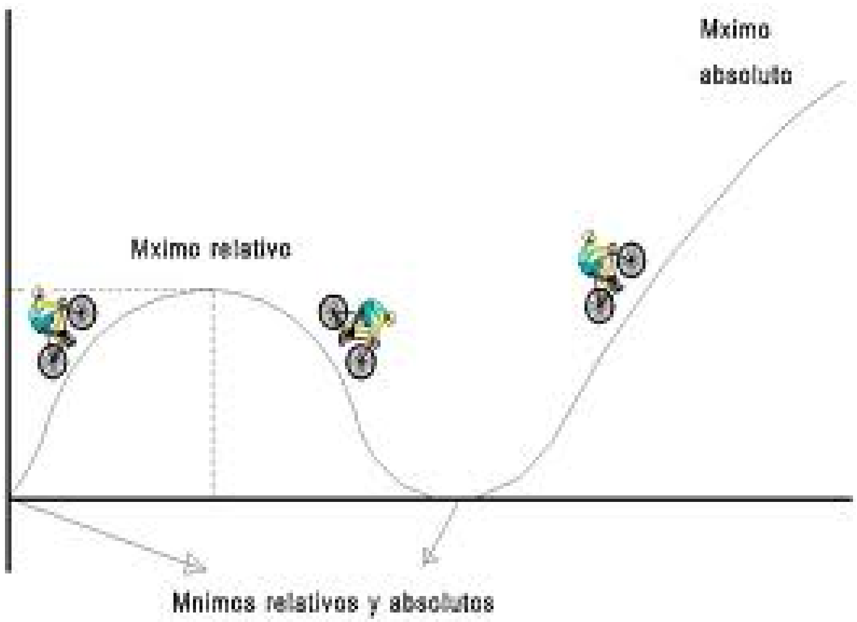


# Segundo criterio (segunda derivada)

En un punto crítico ***c***, la función *f(x)* tiene un:

- máximo local si $f''(c)<0$
- mínimo local si $f''(c)>0$



# Resumen

Para obtener los **máximos y mínimos locales** de una función debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el dominio de la función identificando las discontinuidades (en los puntos fuera de dominio).
2. Calcular la primera derivada de la función.
3. Calcular los puntos críticos igualando la primera derivada a cero. Éstos puntos serán los "candidatos" a máximo o mínimo relativo.
4. Clasificamos los puntos críticos utilizando alguno de los dos criterios anteriores:

a. Primer criterio: Construimos los intervalos de crecimiento y estudiamos el signo de la primera derivada. Si en los puntos críticos hay cambios de crecimiento entonces son máximos o mínimos locales.

b. Segundo criterio: Calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores de los puntos críticos en ella. Si es positiva, el punto será un mínimo local y si es negativa, tendremos un máximo local.

**Recuerda:** No todos los puntos críticos son máximos o mínimos, es posible que el punto que anula la primera derivada no sea ni una cosa ni la otra.

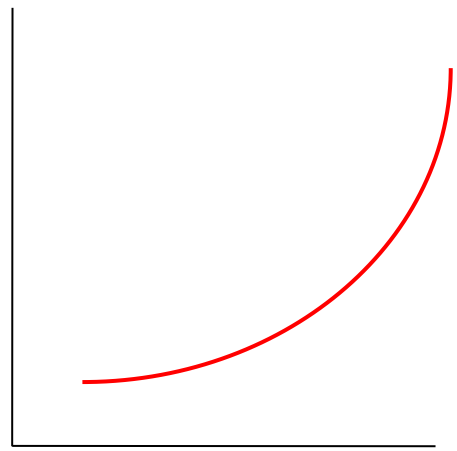
# Ejemplo

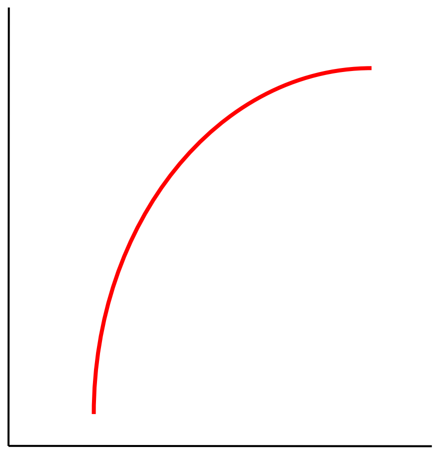
**Determinar los máximos y mínimos locales de la función $f(x)=x^3-6x^2+5$.**

# Curvatura de la gráfica de una función.

La forma de la gráfica de una función se puede estudiar gracias a la segunda derivada.

Si observamos las gráficas siguientes nos daremos cuenta ambas funciones son crecientes, pero su forma es muy distinta.

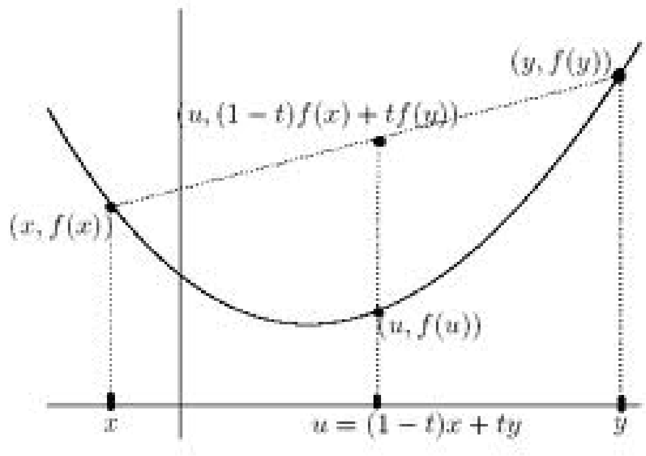




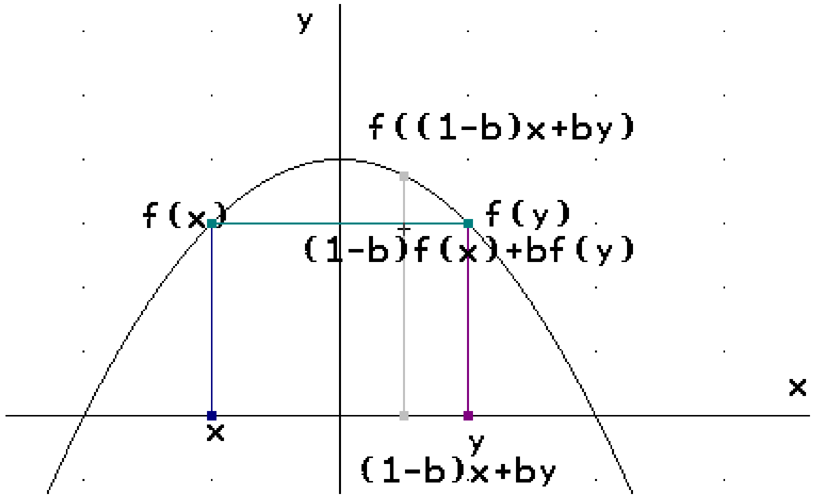
# Curvatura

- La forma que tiene la gráfica de una función recibe el nombre de curvatura, y esta curvatura puede ser cóncava o convexa.

- Decimos que una función es **convexa** si al trazar una recta que une dos puntos de la gráfica, la recta queda por encima de la gráfica. Si las rectas quedan por debajo, decimos que la función es **cóncava.**




**Convexa**




**Concava**

# Intervalos de curvatura

**¿Qué nos dice la segunda derivada sobre la curvatura?.**

Si *f* es una función derivable se cumple que:

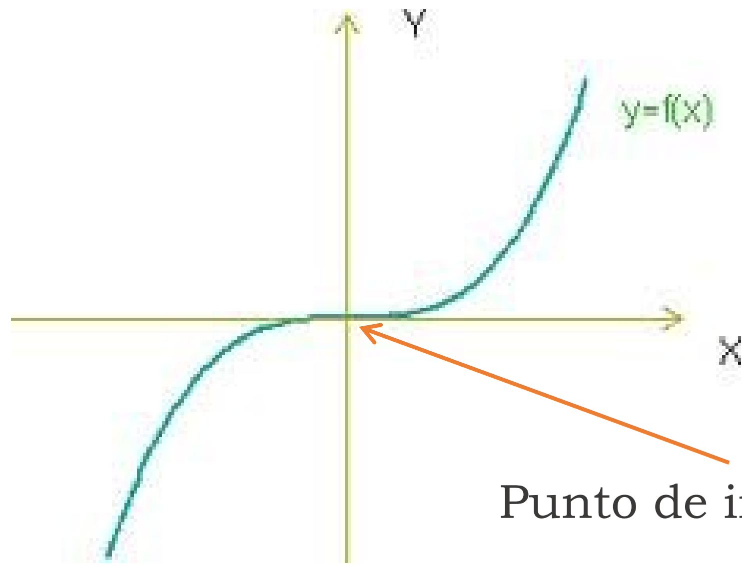
- Es convexa si $f''(x)<0$ en un intervalo.
- Es cóncava si $f''(x)>0$ en un intervalo

**Intervalos de curvatura**

1. Calcular el **dominio** de la función identificando las discontinuidades (en los puntos fuera de dominio).
2. Calcular la **primera derivada** de la función.
3. Calcular la **segunda derivada** de la función.
4. Obtener los **puntos que anulan la segunda derivada.**
5. Construir los **intervalos** de curvatura utilizando los puntos que anulan la segunda derivada y los puntos fuera de dominio.
6. Estudiar del **signo de la segunda derivad**a en cada intervalo.

# Puntos de inflexión

Si en un punto que anula la segunda derivada existe un cambio de curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a convexa o al contrario, el punto recibe el nombre de **punto de inflexión (o punto de silla).**




Punto de inflexión

Éstos puntos tienen la característica de que, en ellos, la recta tangente cruza la gráfica de la función.

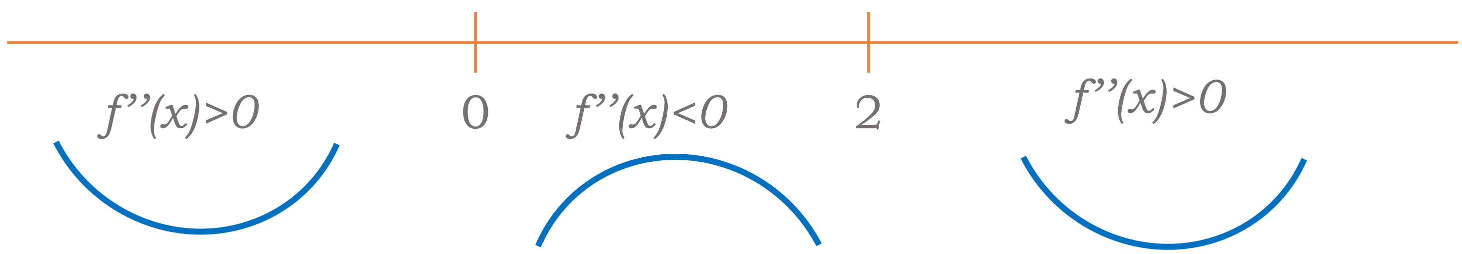
# Ejemplo

Estudia la curvatura de la función $f(x)=x^4-4x^3$ indicando si tiene puntos de inflexión.

1. *Dom* $f=\mathbb{R}$.
2. $f'(x)=4x^3-12x^2$
3. $f''(x)=12x^2-24x$
4. $f''(x)=12x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2.$

*Construimos los siguientes intervalos* $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$

*Estudiamos el signo de la segunda derivada en dichos intervalos*




Por lo tanto, la función $f$ es convexa de $(-\infty,0)$ y $(2,\infty)$, y cóncava en $(0,2)$.

Presenta dos puntos de inflexión en $x=0$ y $x=2$