

Mecánica Clásica
Tema 5
Estática

EIAE

21 de octubre de 2011

Estática	3
Equilibrio	4
Equilibrio de la partícula libre	5
Partícula sometida a ligaduras	6
Partícula sobre superficie lisa	7
Partícula sobre curva lisa	8
Equilibrio sobre superficie rugosa	9
Equilibrio sobre curva rugosa	10
Punto bajo fuerza potencial.	11
Equilibrio de un sólido	12
Equilibrio de un sistema	13
Sólido bajo fuerzas potenciales únicamente	14
Principio de los trabajos virtuales.	15
Sistemas isostáticos	16
Ligaduras independientes/redundantes	17
Sistemas hiperestáticos.	18
Ejemplo: Equilibrio del sólido con punto fijo.	19
Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo.	20



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Estática
Equilibrio
Equilibrio de la partícula libre
Partícula sometida a ligaduras
Partícula sobre superficie lisa
Partícula sobre curva lisa
Equilibrio sobre superficie rugosa
Equilibrio sobre curva rugosa
Punto bajo fuerza potencial
Equilibrio de un sólido
Equilibrio de un sistema
Sólido bajo fuerzas potenciales únicamente
Principio de los trabajos virtuales
Sistemas isostáticos
Ligaduras independientes/redundantes
Sistemas hiperestáticos
Ejemplo: Equilibrio del sólido con punto fijo
Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo

Estática

La **Estática** es la parte de la Mecánica que estudia un movimiento concreto: el reposo o equilibrio.

- El equilibrio puede ser **absoluto** (respecto a ejes inerciales) o **relativo** (respecto a ejes móviles).
- Problemas que considera la **estática**:
 - Conocidas las fuerzas, determinar las configuraciones de equilibrio.
 - Para una configuración de equilibrio, calcular las fuerzas de ligadura.
 - Fuerzas necesarias para que una configuración dada sea de equilibrio.
- La estabilidad del equilibrio es ya parte de la **dinámica**, pues depende del tipo de movimiento resultante al perturbar el equilibrio.
- En la estática se basan la resistencia de materiales, elasticidad, cálculo de estructuras, y parte del diseño de máquinas.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Equilibrio

- Sea un sistema material cuya configuración está determinada por n **coordenadas generalizadas** $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ (coordenadas cartesianas o curvilíneas de puntos, parámetros de actitud de sólidos, etc.).
- El sistema tiene una **configuración de equilibrio** $q_i = q_i^e$ cuando, si se abandona el sistema *en reposo* en dicha configuración, permanece indefinidamente en ella:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^e \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e \quad \forall t$$

- Un sistema puede tener una configuración de equilibrio \mathbf{q}^e , y no estar de hecho en equilibrio: porque no se dejó inicialmente en esa posición, o porque no se dejó en reposo.

Equilibrio de la partícula libre

La condición necesaria y suficiente para que una partícula libre sometida a una fuerza general $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ tenga una posición de equilibrio $\mathbf{r} = \mathbf{r}^e$ es que se anule la resultante de las fuerzas en esa posición:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}^e, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t$$

- Es **necesaria**: si no se anula la fuerza, aparece una aceleración $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}/m \neq \mathbf{0}$ que empieza a mover a la partícula.
- Es **suficiente**: La ecuación del movimiento se puede poner como un sistema de primer orden $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)/m \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}$; por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, si la fuerza es continua y cumple la condición de Lipschitz en un intervalo (que las fuerzas comunes cumplen), la solución $\mathbf{r} = \mathbf{r}^e$ existe y es única.
- Sistema algebraico no lineal: puede haber infinitas soluciones, algunas, una o ninguna.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

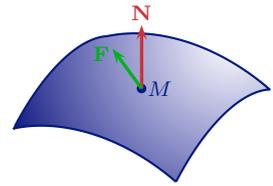
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Partícula sometida a ligaduras

Superficie lisa: la posición \mathbf{r} tiene que cumplir la ecuación de la superficie (-1 GDL):

$$f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{N} = \lambda \nabla f$$

Aparece una fuerza de ligadura normal, que será la necesaria para que la partícula no abandone la superficie.

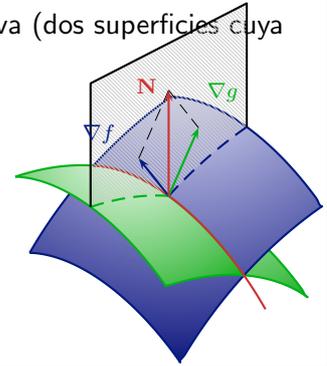


Curva lisa: la posición \mathbf{r} tiene que cumplir las ecuaciones implícitas de la curva (dos superficies cuya intersección define la curva: -2 GDL)

$$g(\mathbf{r}, t) = 0 \quad f(\mathbf{r}, t) = 0$$

Aparece una fuerza de ligadura con dos componentes, contenida en el plano normal a la curva: está definido por los dos vectores gradiente de las superficies en ese punto, o por dos direcciones independientes \perp a la curva:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = \lambda \nabla g + \mu \nabla f$$



Partícula sobre superficie lisa

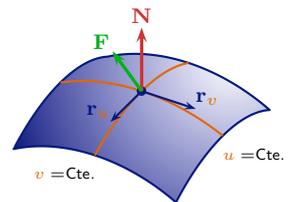
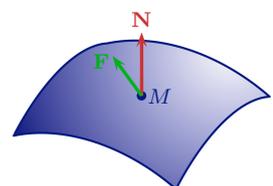
Ecuación implícita: $f(\mathbf{r}, t) = 0$. La posición de equilibrio tiene que cumplir la ecuación de la superficie. La ecuación de equilibrio es la misma, pero con la fuerza de ligadura:

$$\left. \begin{array}{l} f(\mathbf{r}^e, t) = 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}^e, 0, t) + \lambda \nabla f(\mathbf{r}^e, t) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{r}^e \quad 4 \text{ Ecs.} \\ \lambda(t) \quad 4 \text{ Incog.} \end{array}$$

Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, t)$. Los vectores \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v definen el plano tangente. Proyectando en ese plano la ecuación de equilibrio, desaparece la reacción normal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v, t), 0, t] \cdot \mathbf{r}_u = 0 \\ \mathbf{F}[\mathbf{r}(u, v, t), 0, t] \cdot \mathbf{r}_v = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} u^e \quad 2 \text{ Ecs.} \\ v^e \quad 2 \text{ Incog.} \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{n} = \lambda (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) = -\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e, v^e, t), 0, t]$$



Si la fuerza o la superficie varían con el tiempo, solo son posiciones de equilibrio los puntos fijos de la superficie que cumplan la ecuación $\forall t$. Normalmente, es mejor resolverlo por analítica o dinámica.

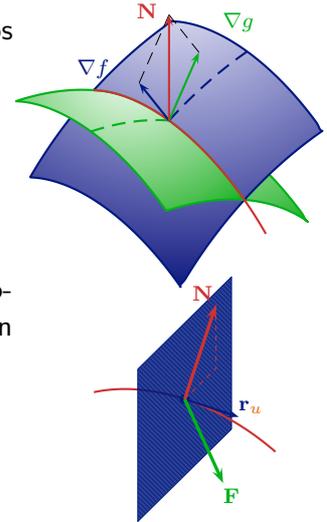
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Partícula sobre curva lisa

Ecuaciones implícitas: la posición \mathbf{r}^e tiene que cumplir las ecuaciones de las dos superficies que definen la curva. Hay que contar la fuerza de ligadura.

$$\left. \begin{aligned} g(\mathbf{r}^e, t) &= 0 \\ f(\mathbf{r}^e, t) &= 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}^e, 0, t) + \lambda \nabla g + \mu \nabla f &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{r}^e \quad 5 \text{ Ecs.} \\ \lambda \quad \quad \quad 1 \text{ Incog.} \\ \mu \quad \quad \quad 1 \text{ Incog.} \end{array}$$



Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, t)$. El vector \mathbf{r}_u es tangente a la curva. Proyectando en esa dirección la ecuación de equilibrio, desaparece la reacción normal:

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e, t), 0, t] \cdot \mathbf{r}_u = 0 \quad \rightarrow \quad u^e \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Ec.} \\ 1 \text{ Incog.} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{N} = -\mathbf{F}[\mathbf{r}(u^e, t), 0, t]$$

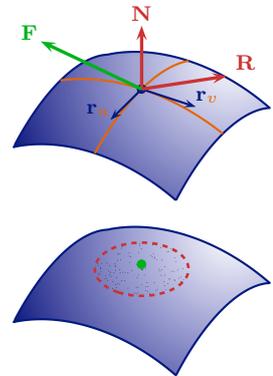
Si aparece el tiempo, las soluciones tienen que serlo $\forall t$.

Equilibrio sobre superficie rugosa

- Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.
- Plano tangente: $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$
- Normal: $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v$
- Rozamiento de Coulomb: $\mathbf{R} \perp \mathbf{n}$; $|\mathbf{R}| \leq \mu |\mathbf{N}|$

Proyectamos según la normal y el plano tangente:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= -\mathbf{F}_n \\ \mathbf{R} &= -\mathbf{F}_t \end{aligned} \right\} \quad |\mathbf{F}_t(u, v)| \leq \mu |\mathbf{F}_n(u, v)|$$



Hay infinitas soluciones. Tomando el signo =, se puede determinar la **curva** que limita la **zona de equilibrio**, que contiene un punto de equilibrio de la superficie lisa:

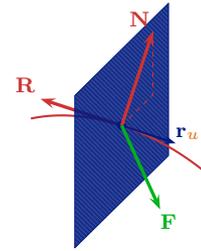
$$|\mathbf{F}_t(u, v)| = \mu |\mathbf{F}_n(u, v)| \quad \rightarrow \quad f(u, v, \mu) = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Equilibrio sobre curva rugosa

- Ecuación paramétrica: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$.
- Vector tangente: \mathbf{r}_u ($\perp \mathbf{N}$)
- Rozamiento de Coulomb: $\mathbf{R} \parallel \mathbf{r}_u$; $|\mathbf{R}| \leq \mu |\mathbf{N}|$



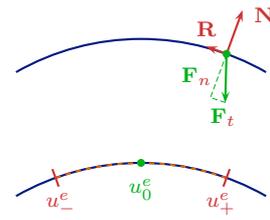
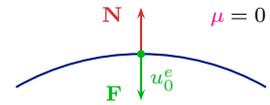
Proyectamos según la tangente y el plano normal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{N} = -\mathbf{F}_n \\ \mathbf{R} = -\mathbf{F}_t \end{array} \right\} |\mathbf{F}_t(u)| \leq \mu |\mathbf{F}_n(u)|$$

Hay infinitas soluciones. Tomando el signo =, se pueden determinar los límites del arco de equilibrio, que contiene un punto de equilibrio de la curva lisa:

$$|\mathbf{F}_t(u)| = \mu |\mathbf{F}_n(u)| \rightarrow f(u, \mu) = 0 \rightarrow u_-^e, u_+^e$$

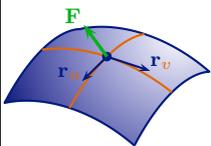
Cuando $\mu \rightarrow 0$, el arco se reduce y tiende al punto de equilibrio liso u_0^e .



Punto bajo fuerza potencial

- Libre: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow dV(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \text{EQ} \equiv \text{Pto. estacionario de } V(\mathbf{r})$

- Superficie lisa:



$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial V(u,v)}{\partial u} = 0 \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial V(u,v)}{\partial v} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow dV(u, v) = 0 \rightarrow \text{EQ} \equiv \text{Pto. estacionario de } V(u, v)$$

- Curva lisa:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{\partial V(u)}{\partial u} = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Equilibrio de un sólido

- Configuración dada por 6 parámetros:

$$\mathbf{q} = \underbrace{[x_G, y_G, z_G]}_{\mathbf{r}_G}, \underbrace{[\psi, \theta, \varphi]}_{\mathbf{Q}}$$

- La condición necesaria y suficiente para que un sólido tenga una configuración de equilibrio $\mathbf{q} = \mathbf{q}^e$ es que se anule la resultante y el momento resultante^a $\forall t$ en esta configuración.

Necesaria:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e = \text{Cte} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Suficiente. Para fuerzas continuas y lipschitzianas:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) = m\mathbf{r}_G''|_{t=0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{q}^e, \mathbf{0}, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_G|_{t=0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^e, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La solución} \\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^e \\ \text{existe y es única} \end{array}$$

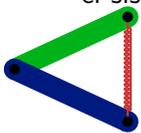
^aSi $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}_Q = \mathbf{0} \forall Q$

Equilibrio de un sistema

- Sea un sistema formado por n partículas y m sólidos.
- La condición **necesaria** y **suficiente** para que el sistema tenga una configuración de equilibrio, es que sea de equilibrio para cada partícula y sólido del sistema.

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1 \dots n \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_j = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_j^G = \mathbf{0} \end{array} \right\}, \quad j = 1 \dots m$$

- Es condición **necesaria pero no suficiente** que se anule la resultante y momento resultante sobre el sistema:



$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_j = \mathbf{0}; \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m (\mathbf{r}_j^G \wedge \mathbf{F}_j + \mathbf{M}_j^G) = \mathbf{0}$$

- Se divide el sistema en partes hasta obtener condiciones **suficientes**.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sólido bajo fuerzas potenciales únicamente

- Configuración: $\mathbf{q} = [x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi]$; Potencial: $V(\mathbf{q})$.
- Los puntos de equilibrio son los estacionarios del potencial:

$$dW = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}^P + \mathbf{M}_P \cdot \boldsymbol{\omega}) dt = -dV(\mathbf{q}) = -\nabla V_{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{q} = 0 \quad \forall d\mathbf{q}$$
$$\{\mathbf{R} = \mathbf{0}; \mathbf{M}_P = \mathbf{0}\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, i = 1 \dots 6 \right\}$$

- Sólido con ligaduras lisas y estacionarias:
 - Aparecen Fuerzas/Momentos de ligadura en \mathbf{R} y \mathbf{M}_P , pero no en el trabajo.
 - Con las ecuaciones de ligadura, se dejan solo las q_i independientes en V .
 - El equilibrio sigue siendo $V_{q_i} = 0$, pero solo con las q_i independientes: los puntos estacionarios del potencial, sobre la ligadura.
- Si hay rozamiento o fuerzas no potenciales cuyo trabajo no es nulo, o ligaduras móviles (ascensor) $dW \neq -dV$, y no se puede aplicar lo anterior.

Principio de los trabajos virtuales

- En el equilibrio, $T \equiv 0$ y $d\mathbf{r} = \mathbf{0}$; la ecuación de la energía no sirve: $0 = 0$.
- Es útil si se introduce el concepto de desplazamiento virtual: imaginar que se da a cada partícula i /sólido j un desplazamiento $\delta\mathbf{r}_i$ /giro $\delta\boldsymbol{\theta}_j$ arbitrarios, en los que se produce el trabajo virtual

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \delta\mathbf{r}_j + \sum_j \mathbf{M}_j^G \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_j$$

- Principio de los trabajos virtuales: En el equilibrio, las resultantes de fuerzas y momentos sobre cada punto y/o sólido son nulas, luego

$$\delta W = 0 \quad \forall \delta\mathbf{r}_i, \delta\mathbf{r}_j, \delta\boldsymbol{\theta}_j$$

- Escogiendo adecuadamente los desplazamientos, se obtienen las combinaciones lineales de las ecuaciones de equilibrio que haga falta.
- Si se dan desplazamientos compatibles con las ligaduras lisas (y estacionarias), se pueden omitir las fuerzas/momentos de ligadura en el cálculo del trabajo virtual porque no trabajan: se simplifica el cálculo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas isostáticos

- Sistema libre con n grados de libertad (GDL): $\mathbf{q}(q_1, \dots, q_n)$

$$n = 3 \times N^\circ \text{ puntos} + 6 \times N^\circ \text{ sólidos}$$

$$n \text{ ecuaciones} \leftrightarrow n \text{ incógnitas } q_1 \dots q_n$$

- Sistema con h ligaduras independientes: cada ligadura quita un grado de libertad distinto. Se dejan solo las coordenadas independientes (=GDL).

$$h \text{ lig.} \rightarrow \begin{cases} -h \text{ GDL} & q_1 \dots q_{n-h} \\ +h \text{ Fza./Mt}^\circ \text{ de ligadura} & X_1 \dots X_h \end{cases}$$

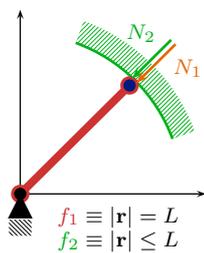
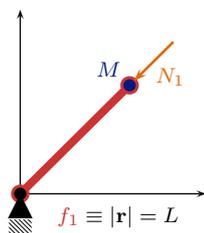
$$n \text{ Ecuaciones} \leftrightarrow n \text{ Incógnitas}$$

Las ecuaciones son lineales en las fuerzas/momentos de ligadura.

- Sistema isostático/estáticamente determinado: las ecuaciones de la estática permiten determinar todas las fuerzas/momentos de ligadura en cada posición de equilibrio.

Ligaduras independientes/redundantes

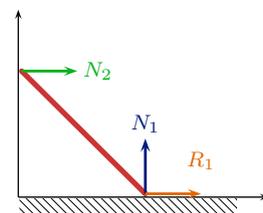
Ligadura redundante: quita un grado de libertad ya impedido por otra ligadura. ¿Cómo se reparten la tarea entre las dos fuerzas de ligadura?



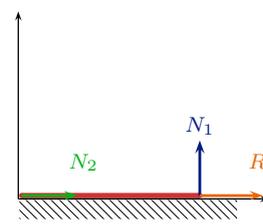
f_2 redundante si se em-



f_2 redundante en la di-



Apoyo liso en N_2 , rugoso en R_1 . Independientes.



N_2 y R_1 redundantes en es-

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

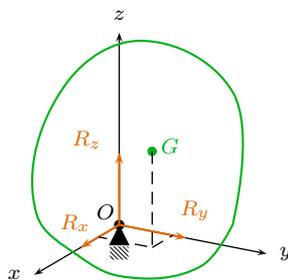
Sistemas hiperestáticos

- Sistema determinado por n parámetros cuando está libre.
- Se añaden:

$$\begin{aligned}
 + h \text{ lig. independientes} &\rightarrow \begin{cases} -h \text{ GDL} & q_1 \dots q_{n-h} \\ +h \text{ Fza./Mt}^\circ \text{ de ligadura} & X_1 \dots X_h \end{cases} \\
 + g \text{ lig. redundantes} &\rightarrow \begin{cases} -0 \text{ GDL (ya están quitados)} & q_1 \dots q_{n-h} \\ +g \text{ Fza./Mt}^\circ \text{ de ligadura} & Y_1 \dots Y_g \end{cases} \\
 n \text{ Ecuaciones} \longleftrightarrow n + g \text{ Incógnitas} &\left\{ \begin{array}{l} q_1 \dots q_{n-h} \\ Y_1 \dots Y_g, X_1 \dots X_h \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

- Sistema **hiperestático**/estáticamente indeterminado: las ecuaciones de la estática **no** permiten determinar todas las fuerzas/momentos de ligadura.
- Dos o más fuerzas obligan a que se cumpla la misma ligadura. Con sólidos rígidos, no se puede saber cuánto hace cada una: hay que recurrir a la **elasticidad y resistencia de materiales**.

Ejemplo: Equilibrio del sólido con punto fijo



Se fija un punto del sólido mediante una rótula ideal:

- Quita tres desplazamientos: R_x, R_x, R_x
- Permite todos los giros: $M_O^{lig} = 0$

- Ecuación de momentos: \rightarrow condición de equilibrio.

$$M_O^{DA} = 0 \rightarrow \psi^e, \theta^e, \phi^e$$

- Ecuación de fuerzas: \rightarrow determinación de la fuerza de ligadura para cada posición de equilibrio.

$$R^{DA} + R^L = 0$$

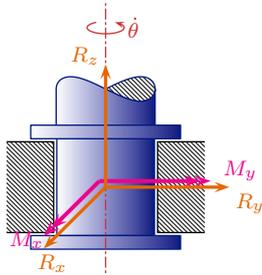
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo

- 1 GDL: giro θ alrededor del eje fijo
- Se busca una fijación isostática:

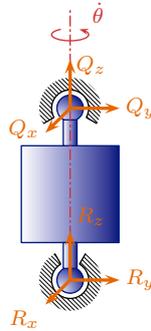
Cojinete con restricción axial



6 Ecs. R_x, R_y, R_z
6 Incs. M_x, M_y
 θ

Isostático

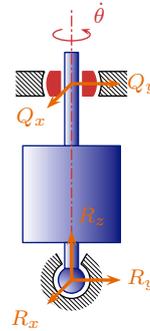
Dos rótulas



6 Ecs. R_x, R_y, R_z
7 Incs. Q_x, Q_y, Q_z
 θ

Hiperestático

Rótula + cojinete oscilante



6 Ecs. R_x, R_y, R_z
6 Incs. Q_x, Q_y
 θ

Isostático

EIAE - Mecánica Clásica

20 / 21

Ejemplo: Equilibrio del sólido con eje fijo

Fijación isostática, p.e., rótula en O y cojinete oscilante en O_1 (otras posibles)

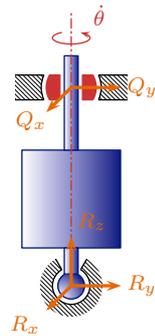
- 1 GDL: giro $\dot{\theta} \mathbf{k}$ ($\mathbf{k} = \frac{\mathbf{OO}_1}{|\mathbf{OO}_1|}$)
- Rótula en O : $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$
- Cojinete oscilante en O_1 : $\mathbf{R}_1 = (Q_x, Q_y, 0)$

$$\mathbf{F}(\theta, 0, t) + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_O(\theta, 0, t) + \mathbf{OO}_1 \wedge \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$$

Procedimiento de cálculo:

$$1) \mathbf{k} \cdot [\mathbf{M}_O(\theta, 0, t) + \mathbf{OO}_1 \wedge \mathbf{R}_1] = 0 \rightarrow \boxed{M_z(\theta, 0, t) = 0} \rightarrow \theta^e$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70