Integración de funciones de variable real

Universidad Europea
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

- El problema del cálculo de áreas planas y de volúmenes de sólidos se remonta a los tiempos de los griegos.

- ***Arquímedes*** consiguió encontrar las relaciones entre el área de la esfera y la longitud del ecuador, entre el volumen de la esfera y el del cilindro circunscrito, el área de un segmento de parábola, el área de la elipse, el volumen y área lateral de esferas, conos y pirámides.

- Los problemas de cálculo de áreas resurgieron en el siglo XVII por las necesidades de la Mecánica. Científicos como ***Johann Kepler, Cavalieri, o Pascal*** fueron capaces de calcular áreas y volúmenes de formas particulares utilizando una variedad de métodos.

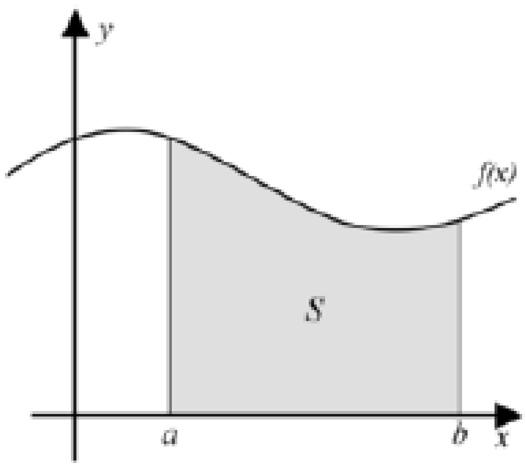
- En 1670 el matemático ***Barrow*** descubre un método general para calcular tangentes y formula la relación entre la tangente y el área, aunque parece que ¡no fue consciente de la importancia de su descubrimiento!.

Introducción histórica

- El reconocimiento del problema del cálculo de áreas como el inverso del cálculo de diferenciales, se debe a Newton y Leibniz. Independientemente, ***Leibniz*** llega a los mismos resultados, pero considerando la integración como una suma. Leibniz introdujo además la moderna notación
- El nombre de Cálculo Integral fue puesto por ***Jacob Bernoulli*** a finales del siglo XVII. En el siglo XIX ***Euler*** publicó en un libro todo el cálculo integral elemental.
- El Cálculo Integral fue asentado de forma rigurosa a partir de la noción de límite de ***Cauchy***. Pero la integral de Cauchy sólo era válida para funciones continuas en intervalos cerrados y acotados. Esto dejaba fuera muchas funciones, así que fue ***Riemann*** quien definió la integral que lleva su nombre, ampliando la clase de funciones integrables a las funciones continuas salvo en un número numerable de discontinuidades; pero la relación entre derivación e integración deja de ser válida en los puntos de discontinuidad.

Integral definida: Área debajo de una curva

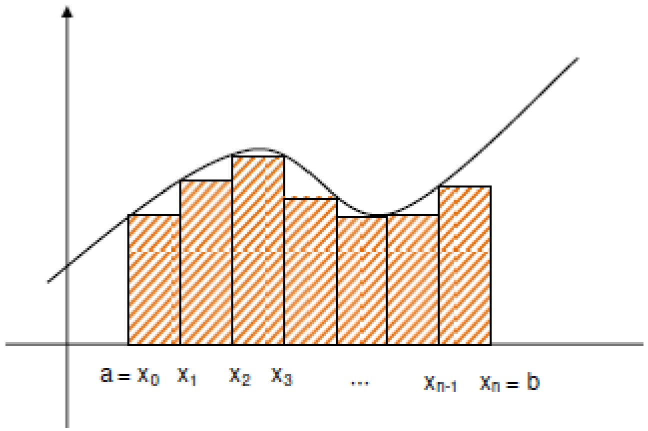
Supongamos que tenemos una función continua y positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, y queremos hallar el área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b, esto es, el área de la región que esta acotada por arriba por la curva $y = f(x)$, por abajo por el eje OX, y en la izquierda y derecha, por las rectas $x = a$ y $x = b$ respectivamente.

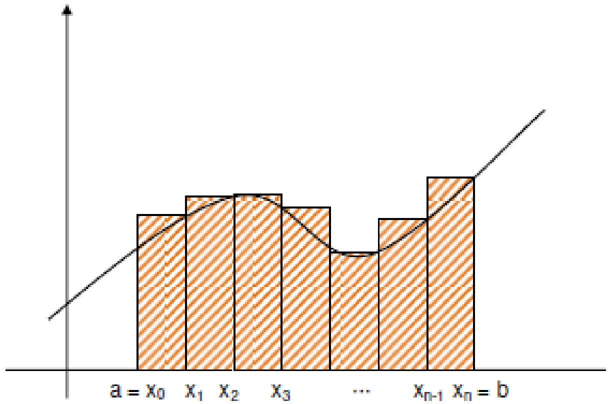


Georg Friedrich Bernhard Riemann

Área debajo de una curva

- Para calcular ese área podemos ir construyendo rectángulos y sumando sus áreas





SUMA INFERIOR

Tomamos rectángulos de altura el mínimo valor de la función en él.

SUMA SUPERIOR

Tomamos rectángulos de altura el máximo valor de la función en él.

Debemos ir tomando rectángulo con la base cada vez más pequeña de forma que la suma inferior aumenta y la suma superior disminuye hasta que se igualan

Definición de integral de Riemann

Si f es una función acotada en $[a, b]$ tal que existe un número real I que verifica:

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I$$

diremos que f es integrable en $[a, b]$. Al número I se lo denomina **integral definida** o **integral de Riemann** de f en $[a, b]$, y se escribe:

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Propiedades

Si f y g son dos funciones integrables en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

1. $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. cf es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$

Si f, g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces

- Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$
- Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

Teoremas

Teorema 1

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrables en $[a, b]$.

Teorema 2

Sean $a < b < c$ números reales y f una función definida en el intervalo $[a, c]$. Entonces f es integrable en $[a, c]$ si y sólo si en integrable en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Además se tiene que

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

- Teorema fundamental del cálculo

Si f es continua en $[a, b]$, la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo $x \in [a, b]$ es derivable en $[a, b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$

Definición de Primitiva

Se dice que una función F es una **primitiva** o **antiderivada** de una función f definida en un intervalo abierto I si se verifica

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in I$$

Propiedad

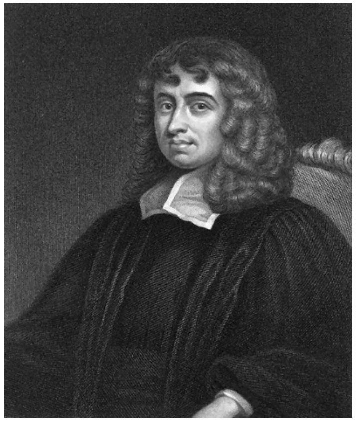
Si F y G son dos primitivas de una función f entonces F y G difieren en una constante, es decir, $F = G + c$ donde c es una constante.

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y g derivable en (a, b), tales que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ (g es una primitiva de f). Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Observación:

Para aplicar la regla de barrow es suficiente con obtener una primitiva sin importar cuál es el intervalo en el que queremos calcular la integral.



Integrales indefinidas: fórmulas básicas de integración

Dada una función f denotaremos por

$$\int f(t)\,dt$$

a cualquier primitiva de f, es decir, cualquier función de la forma $F(x) + c$ que satisface que $F'(x) = f(x)$. Llamaremos a la expresión anterior la **integral indefinida** de f, que anotaremos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Esto nos dice que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Fórmulas básicas de integración

1. $\int 0 \; dx = c$ constante,
2. $\int a \; dx = ax + c$,
3. $\int x^a \; dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$, si $a \neq -1$ y $x > 0$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

$$\int e^x \; dx = e^x + c.$$

1. $\int (f(x) + g(x)) \; dx = \int f(x) \; dx + \int g(x) \; dx$
2. $\int af(x) \; dx = a \int f(x) \; dx$

Ejemplos

$$\int x^5 dx.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx.$$

$$\int e^{5x} dx.$$

$$\int \frac{1}{1-x} dx.$$

$$\int \frac{1}{5-2x} dx.$$

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx.$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx.$$

$$\int e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Utilizando la notación $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la integración por partes se escribe

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

1. Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes las siguientes integrales

   a. $\int p(x)\, e^{ax+b}\, dx$

   Haciendo $u = p(x)$.

   b. $\int p(x)\, (ax+b)^{\alpha}\, dx$

2. Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, conviene integrar por partes las siguientes integrales

   a. $\int p(x) \log(ax+b)\, dx$

   haciendo $dv = p(x)\, dx$.

Ejemplos

$$\int 5x\,(3x+5)^{\frac{4}{5}}\,dx$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} u &= 5x & du &= 5dx \\ dv &= (3x+5)^{\frac{4}{5}}\ dx & & \\ &= \tfrac{1}{3}3\,(3x+5)^{\frac{4}{5}}\ dx & v &= \tfrac{5}{27}\,(3x+5)^{\frac{9}{5}} \end{aligned}$$

la fórmula de integración por partes da

$$\begin{aligned} \int 5x\,(3x+5)^{\frac{4}{5}}\,dx &= \tfrac{25x}{27}\,(3x+5)^{\frac{9}{5}} - \tfrac{5}{27}5\tfrac{1}{3}\int 3\,(3x+5)^{\frac{4}{5}}\ dx \\ &= \tfrac{25x}{27}\,(3x+5)^{\frac{9}{5}} - \tfrac{125}{1134}\,(3x+5)^{\frac{14}{5}} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\int x^2 \log x \ dx$$

Si hacemos

$$u = \log x, \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2 \ dx, \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

la fórmula de la integración por partes nos daría

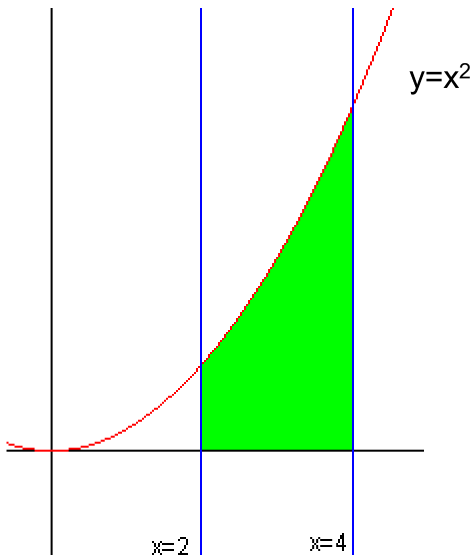
$$\begin{aligned}\int x^2 \log x \ dx &= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1}{x} \ dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \ dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c\end{aligned}$$

Tal y como hemos visto para calcular el área encerrada por un función debemos tener en cuneta el signo de la función. De esta forma tendremos:

- Funciones positivas en un intervalo.
- Funciones negativas en un intervalo.
- Funciones que cambian de signo en un intervalo.

Ejemplos: Funciones positivas

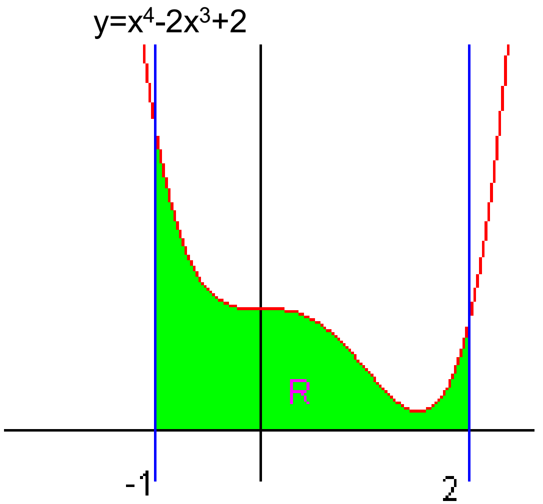
1. Hallar el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$, el eje OX, la recta $x = 2$ y la recta $x = 4$.



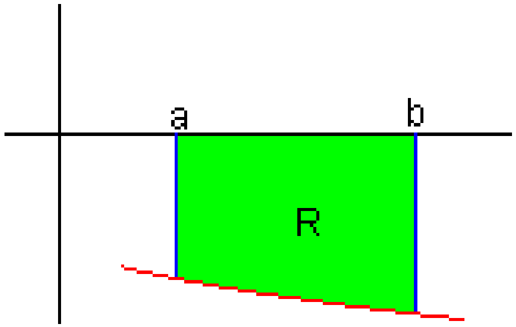
$$\int_2^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}\,u^2$$

2. Hallar el área de la región R limitada por la curva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

$$\int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{51}{10}\,u^2$$



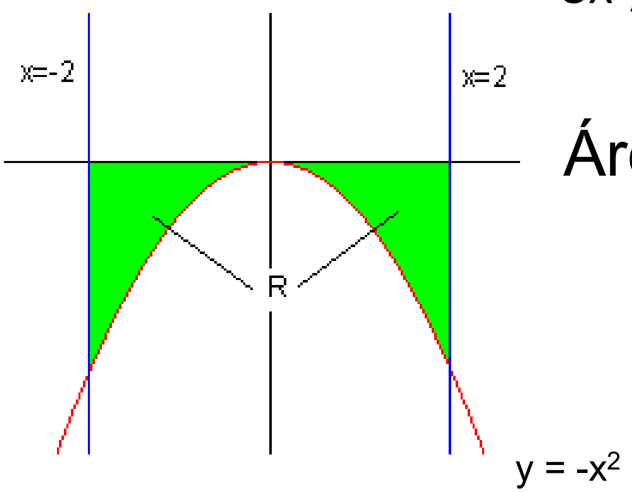
El recinto será el limitado por la función f(x), el eje OX y dos recta verticales x =a y x = b.



$$\text{Área del recinto} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

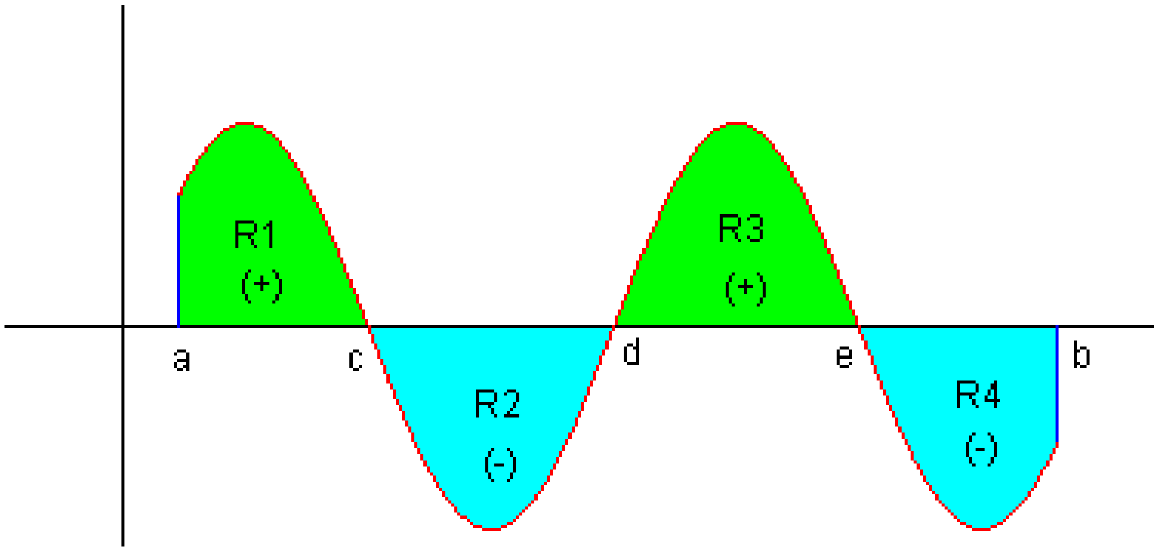
Ejemplo:

Hallar el área del recinto determinado por la parábola de ecuación $y = -x^2$, el eje OX y las rectas x = -2 y x = 2



$$\text{Área} = -\int_{-2}^{2}(-x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}+\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\,u^2$$

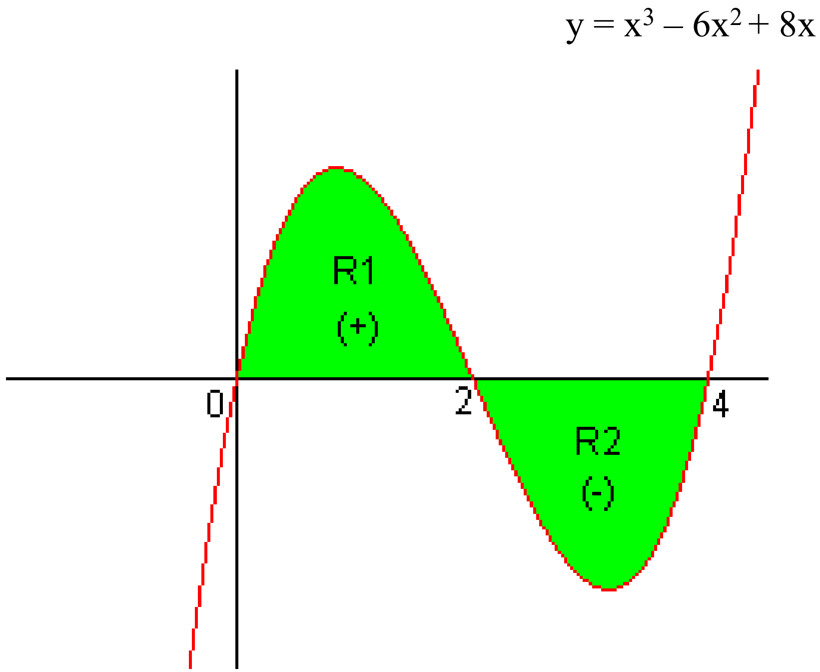
Ejemplos: Funciones positivas y negativas



$$\text{Área (R)} = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx - \int_e^b f(x)\,dx$$

Ejemplos: Funciones positivas

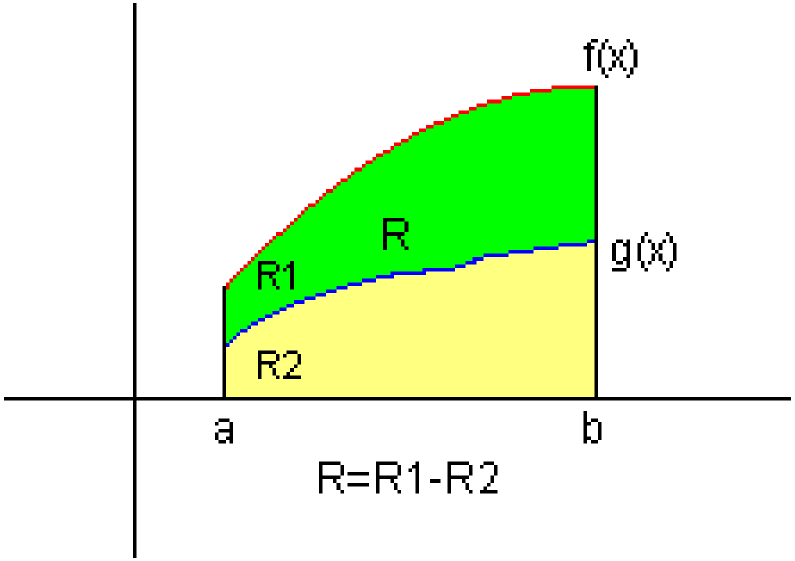
Hallar el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.



$$\text{Área (R)} = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = 8u^2$$

2.1 Las dos funciones no se cortan en [a, b]

El recinto será el limitado por las dos funciones, o por las dos funciones y dos rectas verticales x = a y x = b.

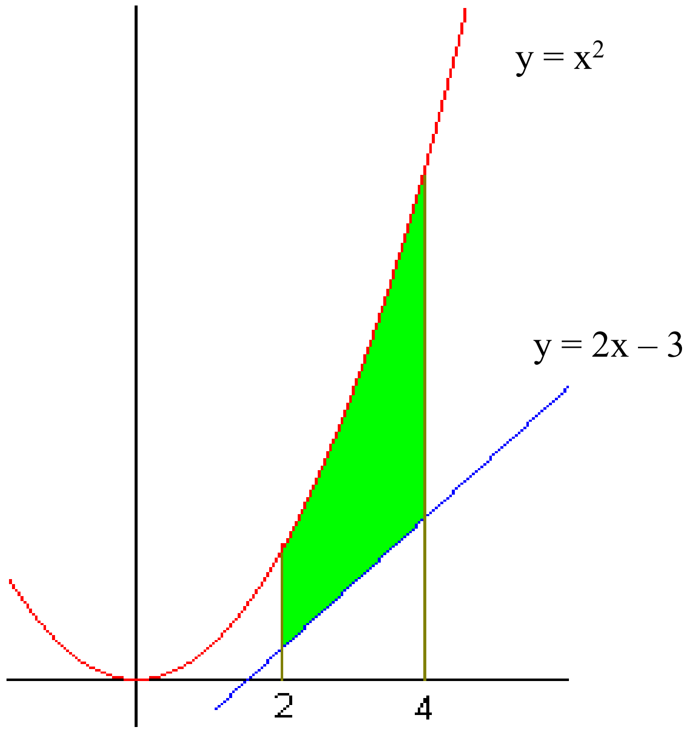


$$\textbf{Área (R)} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejemplo

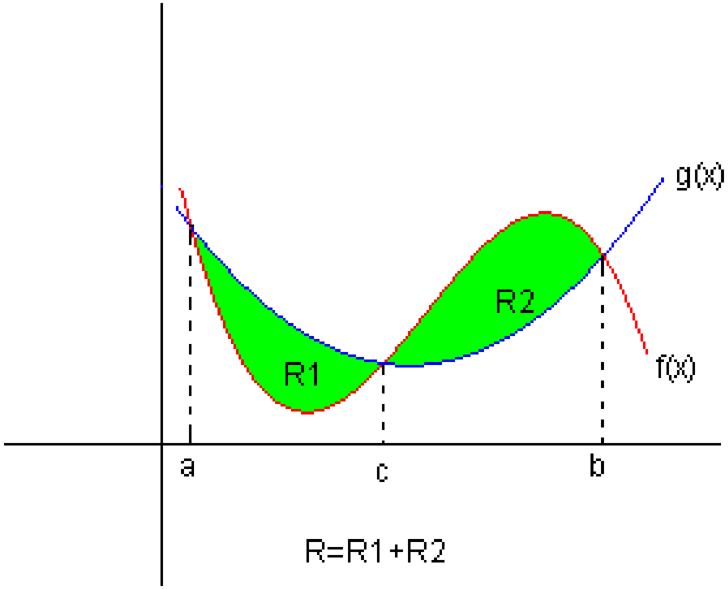
1. Hallar el área de la región limitada por las funciones

$$y = x^2 \text{ e } y = 2x - 3 \text{ entre } x = 2 \text{ y } x = 4$$



$$\int_2^4 [x^2 - (2x - 3)]dx = \frac{38}{3} u^2$$

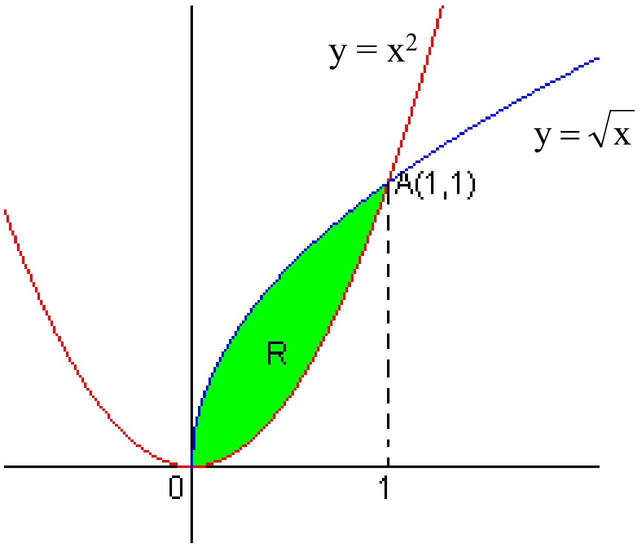
2.2 Las dos funciones se cortan en [a, b]



$$\textbf{Área (R)} = \int_a^c [g(x) - f(x)]dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]dx$$

Ejemplo

Hallar el área de la región limitada por las funciones $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$



$$\textbf{Área (R)} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}u^2$$