Ejercicios

1. Vectores

P1.1 El período T de un péndulo ideal es proporcional a alguna potencia de su longitud ℓ y a alguna potencia de la aceleración de la gravedad g. Determinar los exponentes de esas potencias.
Sol: $\ell^{1/2}$ y $g^{-1/2}$

P1.2 Si en las siguientes expresiones $[a] = L/T^2$, $[v] = L/T$, $[x] = L$ y $[t] = T$, ¿cuál de ellas es dimensionalmente incorrecta?

(1) $v^2 = 2ax$
(2) $v = at$
(3) $v = \frac{x}{t} + at^2$
(4) $x = \frac{v^2}{a}$

Sol: 3

P1.3 Dados los vectores $\mathbf{A} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i}+\mathbf{j}-7\mathbf{k}$, y $\mathbf{C} = 4\mathbf{i}+7\mathbf{j}+6\mathbf{k}$, hallar:

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{C}-\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.
(2) El ángulo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

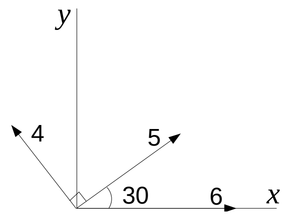
Sol: [1] $-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $5\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, -24, $-11\mathbf{i}-19\mathbf{j}+2\mathbf{k}$; [2] $137{,}43^o$

P1.4 Toda carga eléctrica q que entra con velocidad $\mathbf{v}$ en una región con campo magnético $\mathbf{B}$ experimenta una fuerza (llamada fuerza de Lorentz) $\mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Calcula la fuerza que experimenta una carga $q = 10^{-6}$ C con velocidad $\mathbf{v} = (2,-1,-3)$ m/s cuando entra en una región con $\mathbf{B} = (1,0,0)$ T.
Sol: $-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ μN

P1.5 Dados los vectores: $\mathbf{A} = \mathbf{j}$ +x $\mathbf{k}$, $\mathbf{B}$ =x $\mathbf{i}$ + $\mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i}$ +x $\mathbf{j}$. ¿Para qué valor de x se cumple que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$?
Sol: -1

P1.6 Dados los vectores de la figura, hallar

(1) Su suma geométrica.
(2) Las componentes de cada vector.
(3) El vector suma.
(4) El ángulo que forman el vector suma y el vector mayor.



Sol: [2] $(6,0)$, $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$, $(-2, 2\sqrt{3})$; [3] $(4+5\sqrt{3}/2, 5/2+2\sqrt{3})$; [4] $35{,}56^o$

P1.7 Calcular el vector unitario del vector que tiene su origen en el punto A=(0,2) y su extremo en B=(1,1).
Sol: $(\mathbf{i}-\mathbf{j})/\sqrt{2}$

P1.8 Dado el vector $\mathbf{v} = 5t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}-t^3\mathbf{k}$, calcular $\frac{d}{dt}\mathbf{v}$ y $\int_0^6 \mathbf{v}dt$.
Sol: $(10t, 1, -3t^2)$ y $(360, 18, -324)$

P1.9 Si un vector forma con los ejes X y Y ángulos de 60^o y tiene de módulo 4 unidades, calcular:

(1) Sus componentes coordenadas.
(2) El ángulo que forma con el eje Z.

Sol: [1] $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\sqrt{2}\mathbf{k}$; [2] 45^o

P1.10 Hallar un vector unitario en el plano OYZ y perpendicular al vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.
Sol: $(3\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{10}$

Autoevaluación

P1.11 Considera la ecuación $v = \frac{1}{3}zxt^2$. Las dimensiones de las variables x,v y t son [L], [L/T] y [T], respectivamente. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de z para que la ecuación sea consistente?
Sol: $[\mathrm{T}]^{-3}$

P1.12 Según la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la intensidad de la fuerza atractiva entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados una distancia r es $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$. Teniendo en cuenta que en el SI de unidades $[F]$=kg·m·s^{-2}, $[m_1]$=$[m_2]$=kg y $[r]$=m, determinar las unidades de G.
Sol: kg^{-1}·m^3·s^{-2}

P1.13 Aunque no sepas qué es un "googlégono" de lados a, b y c, sólo una de las siguientes opciones puede ser su volumen:

(1) $4\pi(a^2 + b^2 + c^2)$

(2) $\sqrt{\frac{2a^4}{bc}}$

(3) $\sqrt{ab^2c^3}$

(4) $\frac{7(a+b-abc)}{a+b+c}$

Sol: 3

P1.14 Dados los vectores $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = -3\mathbf{j}$, encuentra el vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.
Sol: $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

P1.15 Calcula, en grados y radianes, el ángulo que forman dos vectores cuyos módulos valen 10 y 8 respectivamente, sabiendo que su producto escalar vale -50.
Sol: $128{,}7^o = 2{,}246$ rad

P1.16 Se tienen tres vectores **A**, **B** y **C**, coplanarios y concurrentes, cuyos módulos son $|A| = 6$, $|B| = 3$ y $|C| = 4$, que forman respectivamente ángulos de 45^o, 30^o y -60^o con el eje X. Calcular el módulo de la suma, y el coseno del ángulo que forma con el eje X.
Sol: 9,13; $14{,}45^o$

P1.17 Dados los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, calcula el ángulo que forman.
Sol: 1,73 rad

P1.18 Dados los vectores: $\mathbf{A} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. ¿Cuánto vale $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$?
Sol: -1

P1.19 Si A y A' son vectores en plano XY tales que A es un vector de módulo a formando un ángulo α con el eje X y A' es un vector de módulo $2a$ formando un ángulo $\alpha/2$ con el eje X, calcula el vector unitario de $A \times A'$.
Sol: $-\mathbf{k}$

P1.20 Si dos vectores **a** y **b** verifican $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$, ¿qué ángulo forman?

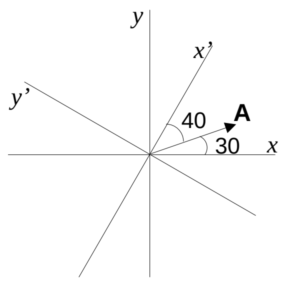
(1) $51{,}3^o$ (2) $68{,}7^o$ (3) $38{,}7^o$ (4) $36{,}7^o$

Sol: 1

P1.21 El vector **A** de la figura tiene módulo $A = 10$. Determinar sus componentes:

(1) respecto a los ejes XY

(2) respecto a los ejes X'Y'



Sol: [1] $(5\sqrt{3}, 5)$; [2] $(10\cos 40^o, -10\sin 40^o)$

P1.22 Sean los puntos $\mathrm{P}(-1, 0, 2)$ y $\mathrm{Q}(2, -3, -5)$. Hallar el vector de posición **r**=QP y el correspondiente vector unitario.
Sol: $-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $(-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k})/\sqrt{67}$