PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA II

TEMA 1.1. PROCESOS DE POISSON

CONTENIDOS

1.1. Procesos Estocásticos y de Markov.

1.2. Distribución exponencial. Definición y propiedades

1.3. Procesos de conteo

1.4. Procesos de Poisson
- **Tiempos de espera y entre llegadas**
- **Partición y mezcla de un proceso de Poisson**
- **Distribución condicionada de tiempos de llegadas**
- **Procesos de Poisson no homogéneos**

1.2 Procesos Estocásticos y de Markov

1.2.1. Definición de Proceso Estocástico

Un ***fenómeno aleatorio*** es un fenómeno empírico que obedece a leyes probabilísticas en lugar de determinísticas.

Un ***proceso estocástico*** es un fenómeno aleatorio que surge en un proceso que se desarrolla en el tiempo de una manera controlada por medio de leyes probabilísticas.

Un ***proceso estocástico*** es una familia de variables aleatorias que proporcionan una descripción de la evolución de un determinado fenómeno físico a través del tiempo.

$$\{X(t),\ t \in T\}$$

$X(t)$ → estado del proceso en el instante t

T → cjto. de índices del proceso

Clasificación de los procesos estocásticos

Proceso estocástico

$$\{X(t),\ t \in T\}$$

T Numerable

Proceso estocástico en tiempo discreto

$$\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$$

T Intervalo de la recta real

Proceso estocástico en tiempo continuo

$$\{X(t),\ t \geq 0\}$$

Espacio de estados del proceso es el conjunto de todos los valores posibles

Tiempo discreto y espacio de estados discreto

Ejemplo: Jugador con 3 € y en cada jugada puede ganar o perder 1 € con probabilidad p y 1-p. Deja de jugar cuando tenga 0 o 6 €.

Tiempo discreto y espacio de estados continuo

Ejemplo: Cantidad de agua almacenada en un pantano cada hora.

Tiempo continuo y espacio de estados discreto

Ejemplo: Número de ordenadores ocupados.

Tiempo continuo y espacio de estados continuo

Ejemplo: m^3 de agua almacenada en un pantano en cada instante.

1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y DE MARKOV

La Teoría de la Probabilidad se ha centrado fundamentalmente en el estudio de la ***independencia*** y sus consecuencias

$$P(X_n \in A_n, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) \\ = P(X_n \in A_n)\, P(X_{n-1} \in A_{n-1}) \cdots P(X_0 \in A_0)$$

Un ***Proceso de Markov*** es un proceso estocástico que verifica

$$P(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n, \ldots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} \in A_{n+1} \mid X_n \in A_n)$$

Interpretación de un Proceso de Markov:

$$P\left(\underbrace{X_{n+1} \in A_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \in A_{n+m}}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}, \underbrace{\ldots, X_0 \in A_0}_{\text{Pasado}}\right)$$

$$= P\left(\underbrace{X_{n+1} \in A_{n+1}, \ldots, X_{n+m} \in A_{n+m}}_{\text{Futuro}} \mid \underbrace{X_n \in A_n}_{\text{Presente}}\right), \ \forall n, m.$$

Las predicciones del futuro del proceso, una vez conocido el estado actual, no pueden mejorar con conocimiento adicional del pasado.

Cadena en tiempo discreto es un proceso estocástico en tiempo discreto con espacio de estados discreto, $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Cadena en tiempo continuo un proceso estocástico en tiempo continuo con espacio de estados discreto

Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X(t)\ ,\ t \geq 0\}$ con espacio de estados S (enteros no negativos) es una **cadena de Markov en tiempo continuo** si

$$P\left(X(t) = j \mid X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1\right)$$
$$= P\left(X(t) = j \mid X(s) = i\right)$$

1.2 Distribución exponencial. Definición y propiedades

La variable aleatoria *X* sigue una distribución exponencial de parámetro (λ>0), que denotamos como *X* ~ Exp(λ), si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Su función de distribución es

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

su esperanza $E(X) = 1/\lambda$ y su varianza $V(X) = 1/\lambda^2$.

La primera propiedad que indicaremos para la distribución exponencial es la pérdida de memoria. Se dice que una variable aleatoria carece de memoria si

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \ \forall s, t \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$
$$\Rightarrow P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t).$$

Por lo tanto, la distribución exponencial carece de memoria, ya que

$$P(X > s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} = P(X > s)P(X > t)$$

La segunda propiedad es la reproductividad, que hace referencia a que la suma de distribuciones exponenciales independientes e idénticamente distribuidas sigue una distribución gamma.

En efecto, si $X_1,\dots,X_n$ son n variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ $\forall i$, entonces $X_1+\dots+X_n$ sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$ y $a = \lambda$, cuya función de densidad es

$$f(t) = e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$E[X_1+\dots+X_n] = p/a = n/\lambda$
$V[X_1+\dots+X_n] = p/a^2 = n/\lambda^2$

La tercera propiedad hace referencia a que el mínimo de n variables aleatorias exponenciales independientes se distribuye exponencialmente.

En efecto, si $X_1,\dots,X_n$ son n variables aleatorias independientes y con distribución exponencial, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ $\forall i$, entonces $X = \min\{X_1,\dots,X_n\} \sim \text{Exp}(\sum_i \lambda_i)$.

La cuarta propiedad hace referencia a la probabilidad de que una distribución exponencial sea menor que otra. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes y con distribución exponencial de parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente.

Entonces, $\boxed{P(X_1 < X_2) = \lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)}$

Ejemplo. Supongamos que el tiempo que un estudiante dedica diariamente al estudio se distribuye exponencialmente con media 2 horas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante estudie más de 3 horas? Y
- ¿cuál es la probabilidad de que estudie más de 3 horas sabiendo que lleva 1 hora estudiando?

Llamemos X al tiempo que el estudiante dedica diariamente al estudio. Entonces, X ~

Ejemplo. Supongamos que un sistema informático consta de dos procesadores. Los fabricantes garantizan que los procesadores 1 y 2 funcionarán en condiciones óptimas durante un tiempo exponencial de media 5 y 6 años, respectivamente:

- ¿Cuál es la probabilidad de que ambos procesadores funcionen más de 4 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el procesador 1 deje de funcionar en condiciones óptimas antes que el 2?

Llamemos X_i, i =1,2, al tiempo de funcionamiento en condiciones óptimas del procesador i.

Por tanto, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ con $\lambda_1 = 1/5$ y $\lambda_2 = 1/6$. Entonces, la probabilidad de que ambos procesadores funcionen más de 4 años es

$$P(\min\{X_1, X_2\} > 4) = 1 - P(\min\{X_1, X_2\} \le 4) = e^{-(1/5+1/6)4} \approx 0.23,$$

y la probabilidad de que el procesador 1 deje de funcionar en condiciones óptimas antes que el 2 es

$$P(X_1 < X_2) = (1/5)/(1/5+1/6) \approx 0.54.$$

1.3 Procesos de conteo

Supongamos un contador que registra un número de sucesos que han ocurrido, tal como el número de visitas a una página web. Con cada visita el contador se incrementa en una unidad.

Denotemos con $N(t)$ el número marcado por el contador en el instante t. $N(t)$ es una variable aleatoria, ya que las personas no visitan la web a intervalos de tiempo fijados sino en tiempos aleatorios.

A $\{N(t),\ t \ge 0\}$ se le denomina proceso de conteo, siendo un caso especial de proceso estocástico.

Un proceso de conteo debe verificar:

i) $N(t) \ge 0$,

Un proceso de conteo se dice de incrementos independientes si el número de sucesos que ocurren en intervalos de tiempos disjuntos es independiente, es decir, el número de sucesos en el intervalo (t_1, t_2), $N(t_2)$-$N(t_1)$, es independiente del número de sucesos en (t_3, t_4), $N(t_4)$-$N(t_3)$, $\forall t_1, t_2, t_3, t_4$ tal que $(t_1,t_2) \cap (t_3, t_4) = \emptyset$.

Un proceso de conteo se dice de incrementos estacionarios si la distribución del número de sucesos que ocurren en un intervalo de tiempo depende sólo del tamaño del intervalo, es decir, el número de sucesos que se dan en el intervalo (t_1+s, t_2+s), $N(t_2+s)$-$N(t_1+s)$, tiene la misma distribución que el número de sucesos en (t_1, t_2), $N(t_2)$-$N(t_1)$, $\forall t_1<t_2, s \geq 0$.

Ejemplo. Un ejemplo proceso de conteo con incrementos independientes es el nº de trabajos que llegan a una impresora, ya que los trabajos que llegan en un intervalo de tiempo no tienen por qué influir en los que llegan en otro que sea disjunto con él.

Sin embargo, puede que no sea de incrementos estacionarios ya que, por ejemplo, es de esperar que el número de trabajos que lleguen en el intervalo de tiempo de nueve a diez de la mañana no coincida con los que llegan de dos a tres de la tarde, periodo de tiempo que generalmente se dedica a comer.

1.4 Procesos de Poisson

El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$, si

i) $N(0) = 0$,
ii) el proceso es de *incrementos independientes*,
iii) el número de sucesos en un intervalo de tiempo de longitud t sigue una distribución de Poisson de media λt, es decir, $\forall s, t \geq 0$,

$$P\left(N(t+s) - N(s) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Distribución de tiempos de espera y tiempos entre llegadas

Consideremos un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ de tasa λ. Sea T, el tiempo

Si denotamos como S_n al tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo, entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i,\ n \geq 1$$

es la suma de los primeros n tiempos entre llegadas, por lo que S_n sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$ y $a = \lambda$.

Partición de un proceso de Poisson

Sea $\{N(t),\ t \geq 0\}$ un proceso de Poisson con tasa λ. Supongamos que los sucesos se clasifican en dos clases 1 y 2, con probabilidad p y $1\text{-}p$, independientemente del resto de sucesos.

Proposición. Sean $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente, el número de sucesos de la clase 1 y 2 hasta el instante t. Claramente, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ y, además, se verifica que $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ y $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes con tasas λp y $\lambda(1\text{-}p)$, respectivamente.

Ejemplo. Supongamos que aterrizan aviones en el aeropuerto de Barajas según un proceso de Poisson de tasa λ = 30 aviones por hora:

- ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que aterriza el décimo avión?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el aterrizaje del avión 15 y el avión 16 exceda los 5 minutos?

El aterrizaje de aviones en el aeropuerto es un proceso de Poisson de tasa λ=30 aviones por hora, es decir, λ=1/2 aviones por minuto.
El tiempo esperado hasta que aterriza el décimo avión es $E(S_{10}) = n/\lambda = 10/(1/2) = 20$ minutos, y la probabilidad de que el tiempo que transcurre entre el aterrizaje del avión 15 y el avión 16 exceda los 5 minutos es $P(T_{16} > 5) = e^{-5/2} \approx 0.082$.

Ejemplo. Se realizan peticiones a un centro de cálculo según un proceso de Poisson de tasa 10 peticiones por segundo. Las peticiones proceden de profesores con probabilidad 0.7 y de alumnos con probabilidad 0.3, de forma independiente. En un intervalo de 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que los profesores hayan realizado 4210 peticiones?

Mezcla de procesos de Poisson

Deseamos estudiar el proceso $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ cuando $\{N_1(t), t \geq 0\}$ y $\{N_2(t), t \geq 0\}$ son procesos de Poisson independientes de tasas λ_1 y λ_2, respectivamente.

Proposición. Sean $\{N_1(t), t \geq 0\}$ y $\{N_2(t), t \geq 0\}$ procesos de Poisson independientes con tasas λ_1 y λ_2, respectivamente. Entonces, $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1+\lambda_2$.

Por otro lado, sea S_n^1 el tiempo de ocurrencia del suceso n-ésimo del tipo 1 y S_m^2 el tiempo de ocurrencia del suceso m-ésimo del tipo 2.

Estamos interesados en calcular la probabilidad de que ocurran n sucesos del tipo 1 antes que m sucesos del tipo 2 y ésta es

$$P\left(S_n^1 < S_m^2\right) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

Distribución condicionada de tiempos de llegadas

Supongamos que se ha producido un suceso de un proceso de Poisson hasta el instante t y queremos saber en qué instante se ha producido ese suceso.

Al ser los procesos de Poisson de incrementos independientes y estacionarios, parece razonable que cada intervalo en [0,t] de igual longitud deba tener la misma probabilidad de contener el suceso. En otras palabras, el tiempo de ocurrencia del suceso debería estar distribuido uniformemente sobre [0,t].

$$\begin{aligned} P\left(T_1 < s \mid N(t)=1\right) &= \frac{P\left(T_1 < s, N(t)=1\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \\ &= \frac{P\left(1 \text{ suceso en } [0,s), 0 \text{ sucesos en } [s,t]\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \\ &= \frac{P\left(1 \text{ suceso en } [0,s)\right) P\left(0 \text{ sucesos en } [s,t]\right)}{P\left(N(t)=1\right)} \end{aligned}$$

$\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} \qquad s$

Si las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad *f*, entonces la densidad conjunta de los estadísticos de orden $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ es

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), \text{ con } y_1 < y_2 < \cdots < y_n.$$

Si las $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ están distribuidas uniformemente sobre $(0, t)$, entonces de la expresión anterior obtenemos que la función de densidad conjunta para los estadísticos de orden $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)}$ es

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, \ 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t.$$

Ahora, ya podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición. Supuesto que $N(t)=n$, los n tiempos de ocurrencia de los sucesos $S_1, \ldots, S_n$ tienen la misma distribución que los estadísticos de orden correspondientes a n variables aleatorias uniformemente distribuidas en $(0,t)$.

Tema 1.1. Procesos de Poisson Probabilidad y Estadística II

Ejemplo. Llegan clientes a una ventanilla según un proceso de Poisson. Sabiendo que han llegado cuatro clientes entre las 9:00 y las 10:00, calcular la probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre las 9:20 y las 9:30 y el tiempo esperado de llegada del tercer cliente.

Calculamos la distribución condicional del tiempo de llegada del tercer cliente, S_3, dado que han llegado 4 en una hora. $P(S_3 < x \mid N(1)=4)$ es la probabilidad de que lleguen 3 clientes en el intervalo $(0, x)$ y uno en $(x, 1)$ o los 4 lleguen en $(0, x)$ y ninguno en $(x, 1)$. Así, si $0 \le x < 1$,

$$F(x) = P(S_3 < x \mid N(1) = 4) = \frac{P(S_3 < x \, , \, N(1) = 4)}{P(N(1) = 4)} =$$

$$= \frac{P(N(x) = 3)\, P(N(1-x) = 1) + P(N(x) = 4)\, P(N(1-x) = 0)}{P(N(1) = 4)} =$$

Si $x \geq 1$, $F(x) = 1$, porque llegan 4 clientes en una hora.

Por lo tanto, la probabilidad de que el tercer cliente haya llegado entre las 9:20 y las 9:30 es $F(1/2) - F(1/3) = 29/144$.

Para obtener la esperanza condicional de S_3, se puede calcular la derivada de F para obtener la función de densidad, obteniendo

$$E\left(S_3 \mid N(1) = 4\right) = \int_0^1 x\left(12x^2 + 12x^3\right) dx = \int_0^1 12x^3 dx + \int_0^1 12x^4 dx = 3/5 \text{ horas.}$$

Así, el tiempo esperado de llegada del tercer cliente, dado que han llegado 4 clientes entre las 9:00 y las 10:00, es 9:36.

Procesos de Poisson no homogéneos

La importancia de los procesos no homogéneos, también denominados no estacionarios, reside en que no se requiere que se verifique la condición de incrementos estacionarios, por lo que contemplamos la posibilidad de que algunos sucesos sean más frecuentes en ciertos periodos de funcionamiento.

El proceso de conteo $\{N(t),\, t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$, si

i) $N(0)=0$,
ii) $\{N(t),\, t \geq 0\}$ es de incrementos independientes,
iii) $P(N(t+h)-N(t) = 1) = \lambda(t)h+o(h)$,
iv) $P(N(t+h)-N(t) \geq 2) = o(h)$.

Si denotamos, $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ resulta que

Ejemplo. A una gasolinera que permanece abierta las 24 horas del día llegan clientes de la siguiente forma: desde las 24:00 h a las 7:00 los clientes llegan, en media, con tasa 2 clientes por hora; de 7:00 a 17:00 crece linealmente hasta alcanzar los 20 clientes por hora, permaneciendo esta tasa hasta las 22:00, momento en que empieza a decrecer hasta alcanzar los 2 clientes por hora a las 24:00.

Si suponemos que el número de clientes que llegan a la gasolinera, durante periodos de tiempos disjuntos son independientes, ¿cuál sería un buen modelo probabilístico para esta situación?, ¿cuál es la probabilidad de que llegue un cliente entre la 1:00 y las 3:00? y ¿cuál es el número esperado de llegadas entre las 8:00 y las 10:00?

Un buen modelo probabilístico para esta situación sería un proceso de Poisson no homogéneo, con función de intensidad

$$\lambda(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 \leq t \leq 7 \\ 1.8t - 10.6, & \text{si } 7 \leq t \leq 17 \\ 20, & \text{si } 17 \leq t \leq 22 \\ -9t + 218, & \text{si } 22 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

El número de llegadas entre la 1:00 y las 3:00 sigue una distribución de Poisson con media

$$m(3) - m(1) = \int_1^3 2ds = 4.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que llegue un cliente entre la 1:00 y las 3:00 es

$$P(N(3)-N(1)=1) = e^{-4}(4^1/1!) \approx 0.073.$$

El número de llegadas entre las 8:00 y las 10:00 sigue una distribución de Poisson con media

$$m(10) - m(8) = \int_8^{10} (1.8s - 10.6)ds = 11.2 \text{ llegadas.}$$

Por tanto, el número esperado de llegadas entre las 8:00 y las 10:00 es 11.2.