11 – Introduction to Gust / Turbulence Dynamic Response

Part 2: Continuous Turbulence response

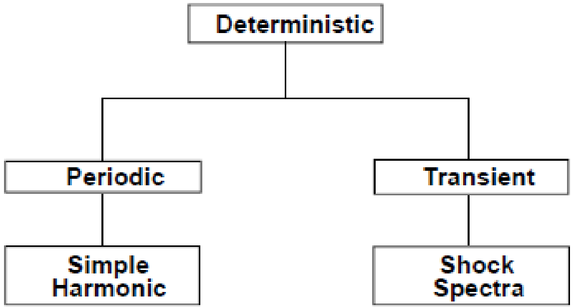
Vibraciones y Aeroelasticidad

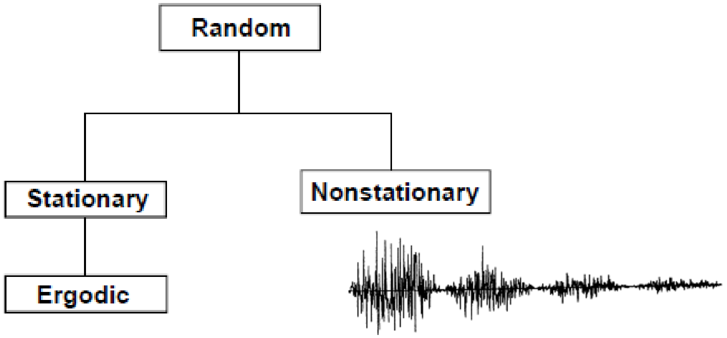
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

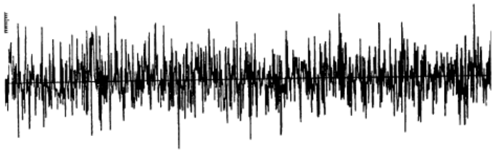
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

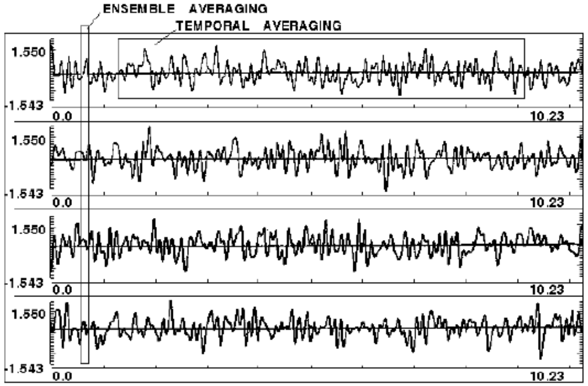
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

DYNAMIC ENVIRONMENTS
DETERMINISTIC vs RANDOM









CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

RANDOM SIGNALS: INTRODUCTION

- Random phenomenon can be described only in a statistical sense. Its instantaneous magnitude at any time is not known; rather, the probability of its magnitude exceeding a certain value is given

- Examples include earthquake ground motion, ocean wave heights and frequencies, wind pressure fluctuations on aircraft and tall buildings, and acoustic excitation due to rocket and jet engine noise

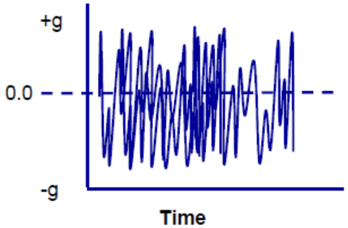
- Characterization of a random signal:
  - Root Mean Square
  - Cumulative Mean Square
  - Power Spectral Density

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

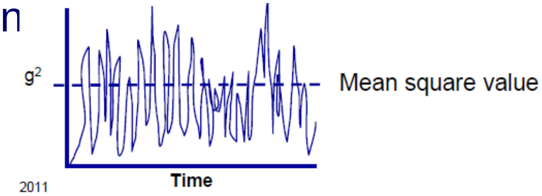
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

RANDOM SIGNALS
Root Mean Square “RMS” and Cumulative Mean Square “CMS”

- ❑ Assume random signal with zero mean value:

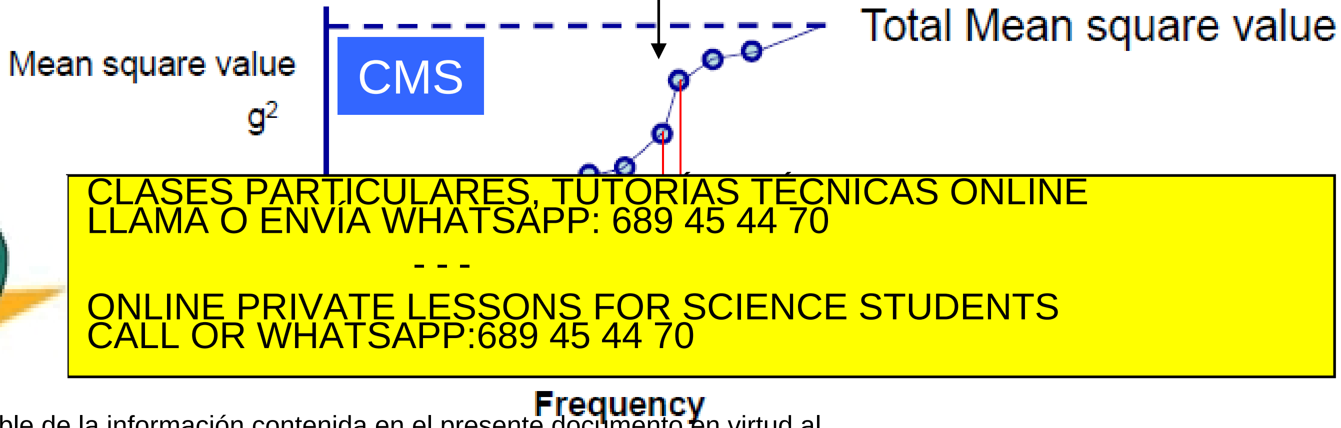


- ❑ Square the signal to get a non-zero mean
  - ► Non-zero mean value = mean square



- ❑ It can be shown that the “Square Root of the Mean Square” (RMS) value is:
  - ► Equal to the standard deviation σ of a Normal Distribution → value that has 68.3% chance of occurring
  - ► “3 σ” gives a probability of 99.73% chance of occurring

- ❑ Cumulative Mean Square (CMS):
  - ► Show which frequencies contribute the most

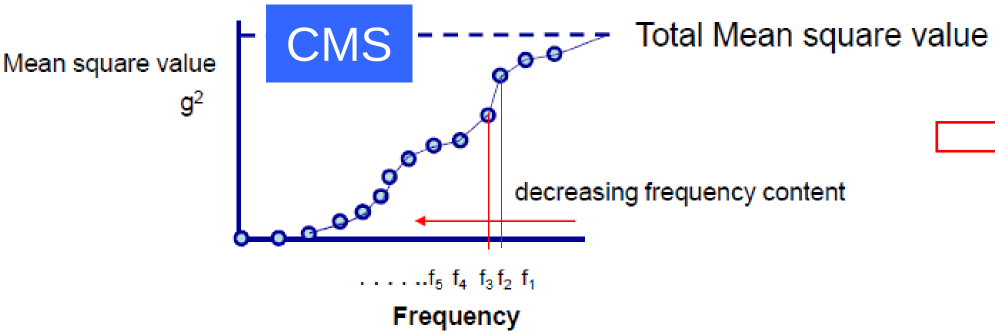

r.m.s of the signal previously filtered to eliminate frequencies above f_2

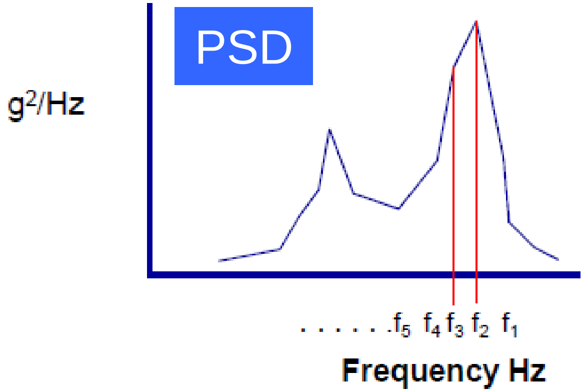
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

RANDOM SIGNALS
POWER SPECTRAL DENSITY “PSD”

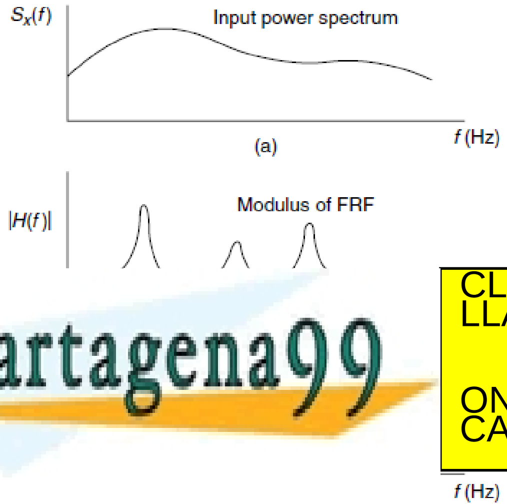
- Now take the gradient of the CMS:





  - ► The PSD shows the frequency content of the signal more directly than the CMS plot
  - ► **The square root of the area under the PSD curve is the RMS !**

- Key point on using PSD in IN-OUT random processes :
  - ► “OUTPUT” PSD is related to the “INPUT” PSD thru Frequency Response Function H(f)

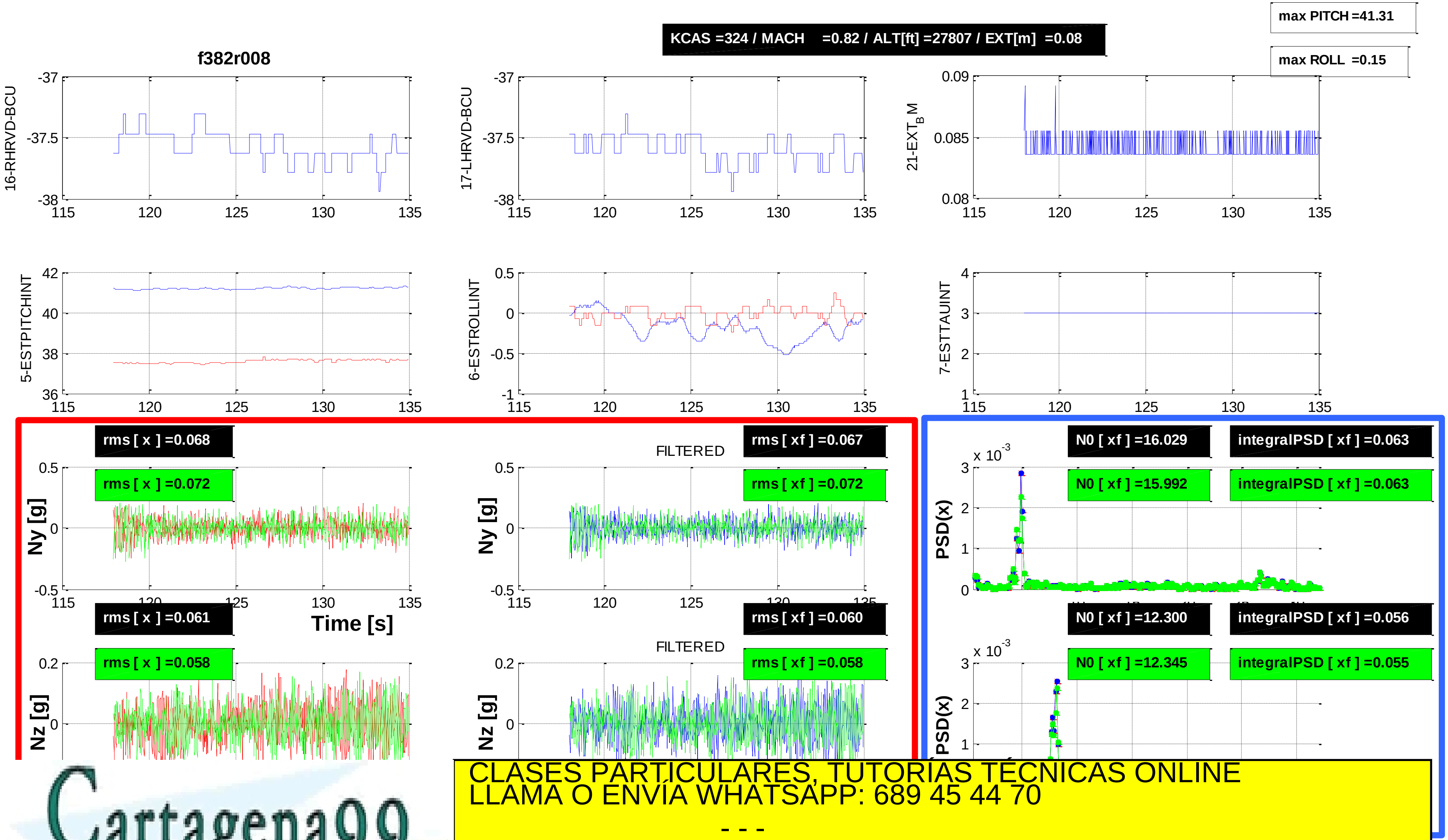


$$S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

EXAMPLE OF ANALYSIS OF RANDOM SIGNALS



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

"GAUSSIAN" OR "NORMAL" DISTRIBUTION
VALUES WITH PROBABILITY 1/1000

$$\Phi_I(\Omega) = \frac{L}{\pi}\,\frac{1+\frac{8}{3}(1.339\Omega L)^2}{\left[1+(1.339\Omega L)^2\right]^{11/6}}$$

PSD of a σ_w =1 rms
Random Gust

$$\overline{A}_i = \left[\int_0^\infty \left|h_i(\Omega)\right|^2 \;\phi_I(\Omega)\,d\Omega\right]^{1/2}$$

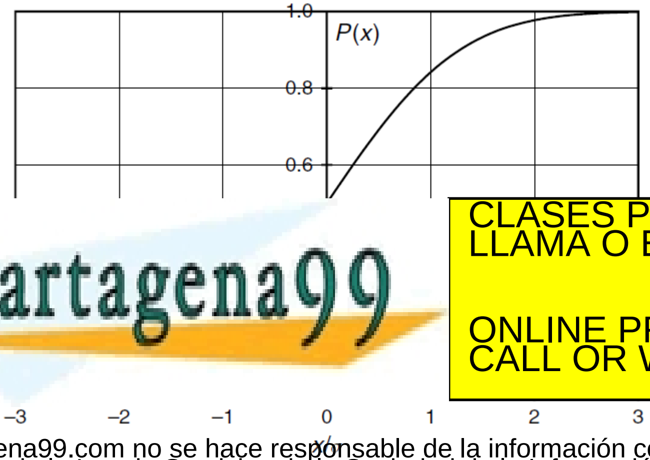
rms of a magnitude "i" for a turbulence with σ_w=1

$$P_{Li} = P_{(1-g)i} \pm P_{Ii} = P_{(1-g)i} \pm U_\sigma \overline{A}_i$$

It should be noted that the reference gust velocity is comprised of two components, a root-mean-square (RMS) gust intensity and a peak to RMS ratio.

$$U_\sigma \approx 3\cdot\sigma_w$$

PROBABILITY OF A "GAUSSIAN" O "NORMAL" DISTRIBUTION



Probability, $P(x)$, of a Gaussian random waveform lying between $-\infty$ and x.

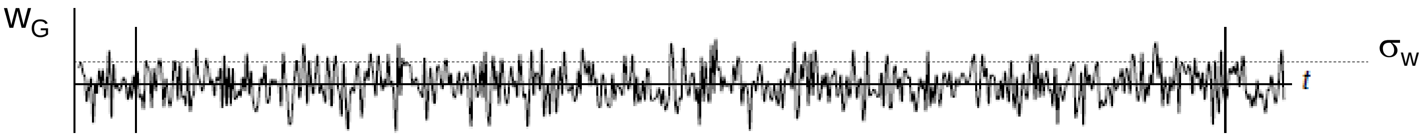
x/σ	$P(x)$
$-\infty$	0
−3.1	0.0010
−3.0	0.0013
−2.5	0.0062
−2.0	0.0228
−1.5	0.0668
−1.0	0.1587
−0.5	0.3085
3.1	0.9990
∞	1

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

PSD OF CONTINUOUS TURBULENCE

Von Karman and Dryden Models



$$\Omega = \frac{\omega}{U_\infty} = \frac{2\pi f}{U_\infty}$$

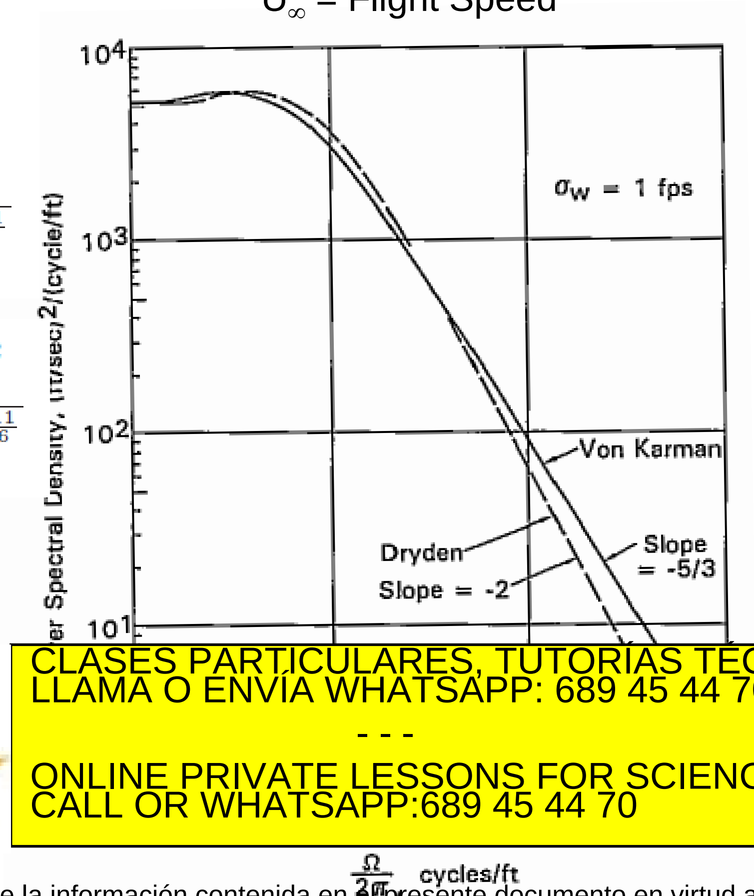
Von Karman Model

$$\Phi(f) = \sigma_w^2 \frac{2L}{U_\infty} \frac{1 + \frac{8}{3}(1{,}339 L\Omega)^2}{\left[1 + (1{,}339 L\Omega)^2\right]^{\frac{11}{6}}}$$

$$\Phi\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \sigma_w^2 2L \frac{1 + \frac{8}{3}(1{,}339 L\Omega)^2}{\left[1 + (1{,}339 L\Omega)^2\right]^{\frac{11}{6}}}$$

$$\Phi(\omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi U_\infty} \frac{1 + \frac{8}{3}(1{,}339 L\Omega)^2}{\left[1 + (1{,}339 L\Omega)^2\right]^{\frac{11}{6}}}$$

L = Scale of Turbulence = 2500
U_∞ = Flight Speed



Dryden Model

$$\Phi(f) = \sigma_w^2 \frac{2L}{U_\infty} \frac{1 + 3L^2\Omega^2}{(1 + L^2\Omega^2)^2}$$

$$\Phi\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right) = \sigma_w^2 2L \frac{1 + 3L^2\Omega^2}{(1 + L^2\Omega^2)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi U_\infty} \frac{1 + 3L^2\Omega^2}{(1 + L^2\Omega^2)^2}$$

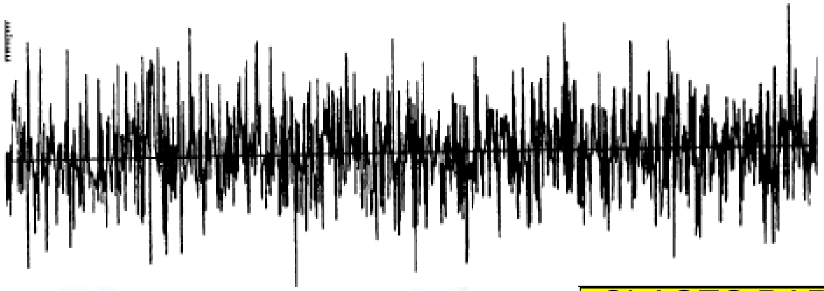
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

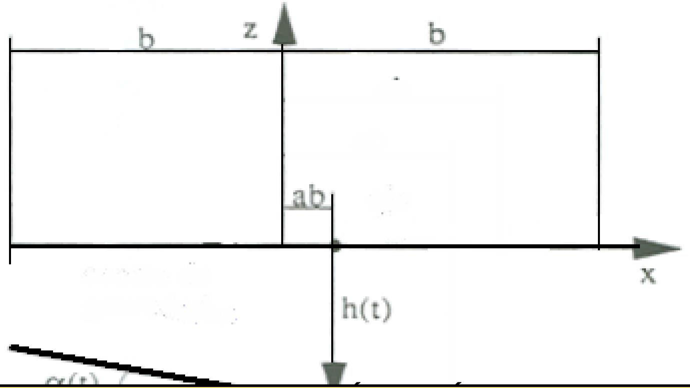
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

NOW… LET’S FIX CONCEPTS WITH OUR TYPICAL SECTION

For the sake of simplicity, let’s assume:

- ► Incompressible flow (Theodorsen’s theory remains applicable)
- ► Only heave motion **h(t)**
- ► No stiffness ($K_h = 0$) and zero structural damping ($g_h = 0$)





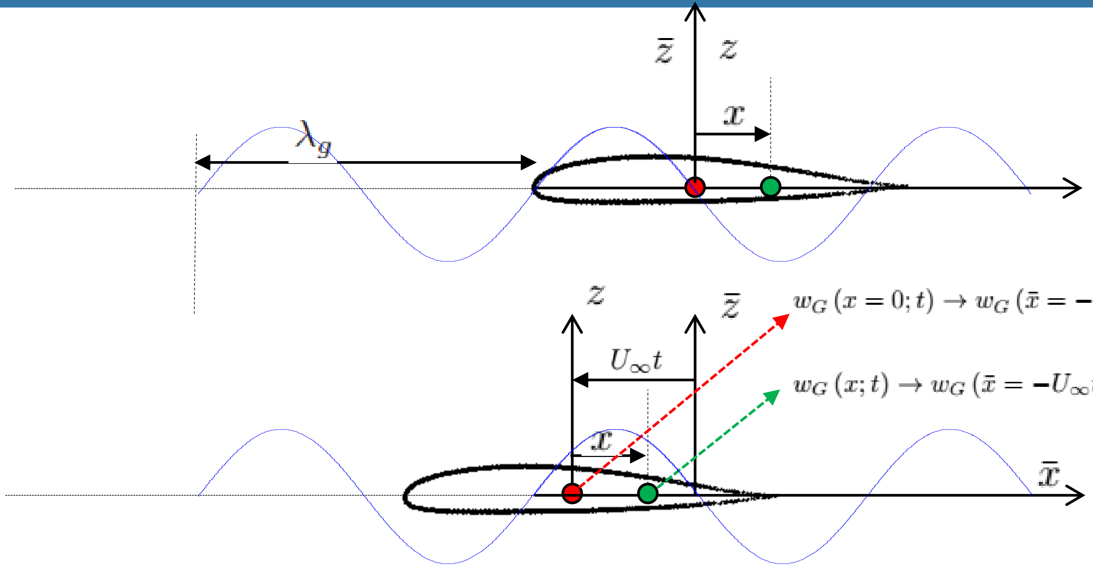
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

CALCULATION OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION (1/3)

2D INCOMPRESSIBLE FLOW IN h-MOTION

$$w_G\left(\bar{x}\right) = w_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\bar{x}\right)$$



$$w_G\left(x=0;t\right) \rightarrow w_G\left(\bar{x} = -U_\infty t\right) = w_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}U_\infty t\right) = w_0 \sin\left(-\omega t\right)$$

$$w_G\left(x;t\right) \rightarrow w_G\left(\bar{x} = -U_\infty t + x\right) = w_0 \sin\left(-\omega t + \omega\frac{x}{U_\infty}\right) \rightarrow w_G = w_0 e^{-i\omega t} e^{+i\omega\frac{x}{U_\infty}}$$

$$w_G(x;t) = w_0 e^{i\omega x/U_\infty} e^{-i\omega t} = \bar{w}_G\left(x\right) e^{-i\omega t} \Rightarrow \bar{w}_G(x) = w_0 e^{i\omega x/U_\infty} = w_0 e^{ikx/b}$$

THEODORSEN'S FORMULATION →
(see presentation #19)

$$\boxed{\frac{\bar{w}(x)}{U_\infty}} = -\frac{\bar{w}_G}{U_\infty} = -\frac{w_0}{U_\infty} e^{ikx/b}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

CALCULATION OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION (2/3)

2D INCOMPRESSIBLE FLOW IN h-MOTION

$$L_G = 2\pi\rho_\infty U_\infty b\bar{w}_G\left\{C(k)\left[J_0(k)-iJ_1(k)\right]+iJ_1(k)\right\}e^{iks} = 2\pi\rho_\infty U_\infty bS(k)\bar{w}_G$$

$$L_M = \pi\rho_\infty U_\infty^2\ddot{h}(s) + 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 C(k)\dot{h}(s)$$

$$M\frac{U_\infty^2}{b^2}\ddot{h}(s) = -2\pi\rho_\infty U_\infty bS(k)\bar{w}_G - \pi\rho_\infty U_\infty^2\ddot{h}(s) - 2\pi\rho_\infty U_\infty^2 C(k)\dot{h}(s)$$

$$\boxed{\frac{-\omega^2\frac{\bar{h}}{b}}{\bar{w}_G} = -\frac{U_\infty}{2b^2}\frac{S(k)}{\lambda+\frac{1}{4}-i\frac{1}{2}\frac{C(k)}{k}} = H(ik)} \qquad \lambda = \frac{M}{4\pi\rho_\infty b^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

CALCULATION OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION (3/3)

2D INCOMPRESSIBLE FLOW IN h-MOTION

$$\Psi(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi(\omega) = \frac{U_\infty^2}{b^2} \frac{4k^2 |S(k)|^2}{|-(4\lambda+1)k+2iC(k)|^2} \sigma_w^2 \frac{L}{\pi U_\infty} \frac{1+3\left(\frac{\omega L}{U_\infty}\right)}{\left[1+\left(\frac{\omega L}{U_\infty}\right)^2\right]^2}$$

$$kS(k) \approx \frac{1}{1+2\pi k} = \frac{\frac{\omega L}{U_\infty}\frac{b}{L}}{1+2\pi\frac{\omega L}{U_\infty}\frac{b}{L}}$$

$$|-(4\lambda+1)k+2iC(k)|^2 \approx 4+k^2(2\lambda+1)^2 = 4+\left(\frac{\omega L}{U_\infty}\right)^2\left(\frac{b}{L}\right)^2(2\lambda+1)^2$$

b/L → 0 Scale of turbulence >> characteristic length of the vehicle → $d^2h/dt^2 \approx 0$

b/L → ∞ Scale of turbulence << characteristic length of the vehicle → $d^2h/dt^2 \approx 0$

$(b/L)_{crit}$ Scale of turbulence associated to maximum vertical acceleration

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

APLICACIÓN PRÁCTICA
RÁFAGA DISCRETA – ECUACIONES EN EL DOMINIO DE LAPLACE

PROBLEMA 1

Determinar el factor de carga de un ala rígida pero libre de desplazarse verticalmente cuando encuentra una ráfaga de intensidad $w_G(s) = w_0 \cos(\Omega s)$, siendo $s = U_\infty t/b$ el tiempo adimensional, b la semicuerda del ala y las funciones de Wagner y Küssner aproximándose por:

$$\Phi(s) = 1 - 0{,}165e^{-0{,}0455s} - 0{,}335e^{-0{,}300s}$$

$$\Psi(s) = 1 - 0{,}500e^{-0{,}130s} - 0{,}500e^{-s}$$

Expresar el resultado en función de parámetros adimensionales.

PROBLEMA 2

Dentro de la validez de la teoría aerodinámica bidimensional, incompresible y no estacionaria, se desea estudiar la respuesta de un puente frente a ráfagas. Para ello se considera una sección característica de anchura $2b$ y masa por unidad de envergadura M en presencia de un viento horizontal U_∞. Repentinamente, y durante un tiempo t_1, aparece una velocidad vertical uniforme $w_0 << U_\infty$. Teniendo en cuenta que tanto el espesor como el desplazamiento vertical de la sección característica son pequeños frente a su anchura, calcular la evolución temporal dela velocidad vertical de la sección, considerando que no gira y que la rigidez a flexión de la sección analizada es $M\omega_h^2$.

Dibujar el resultado anterior cuando la masa vale $M = 4383\ Kg.m^{-1}$, la anchura del puente es 4 [m], la rigidez a flexión es nula y la duracción de la ráfaga es infinita.

Cartagena99

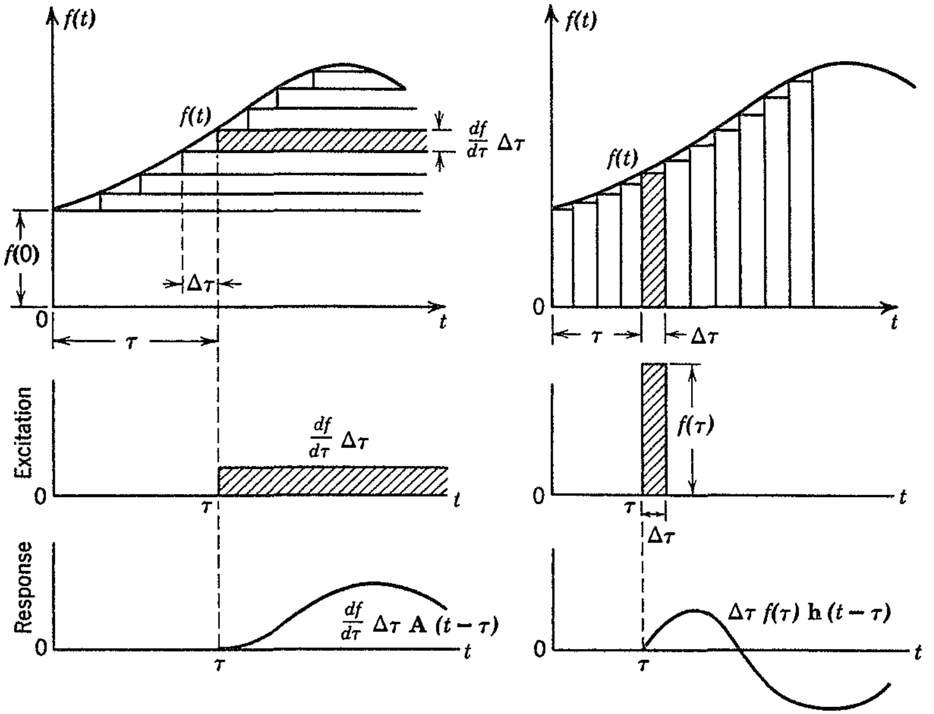
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

APPENDIX (i)

DUHAMEL’S INTEGRAL
PRINCIPLE OF SUPERPOSITION

x(t) response of the physical system to the input **f(t)**



A(t)

“Indicial Admittance” = response to unit-step function

h(t)

response to unit-step function

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

APPENDIX (ii)

LAPLACE TRANSFORM
CONVOLUTION THEOREM

$$\mathcal{L}\left\{f\left(t\right)\right\} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\mathrm{d}x$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

“Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio”

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.