ÁLGEBRA LINEAL – 2º PARCIAL
DIAGONALIZACIÓN, CÓDIGOS LINEALES y ESPACIO EUCLÍDEO

Nº Matrícula…………………

Apellidos………………………………………………………………Nombre………………………

Ejercicio 1: (**8** ptos)

a) Razonar si el siguiente conjunto es un código lineal de $\mathbb{Z}_2^4$: C = {(0,0,0,0), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (1,1,0,1), (0,0,1,1), (1,1,1,1)}.
b) Dado en $\mathbb{Z}_2^5$ el subespacio vectorial C = L{(1,1,1,1,0), (0,1,1,1,0), (1,1,0,1,0)}, obtener una matriz de paridad para el código lineal C, la dimensión de C, el número de palabras de C y la distancia de C.
c) Construir la matriz de paridad de un código de longitud 7 y dimensión 4 capaz de corregir un error.
d) Dado el código lineal cuya matriz de paridad se ha obtenido en el apartado c) y recibidos los siguientes mensajes en los que se supone que hay como máximo un error, detectar si hay error y, en su caso, corregirlo dando el mensaje original.
   d1) (0,1,1,1,1,0,1) d2) (0,0,1,0,1,1,0) d3) (1,1,0,0,1,1,1)

Ejercicio 2: (**6** ptos)

a) Demostrar si la siguiente aplicación de $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2$ en $\mathfrak{R}$ define un producto escalar en $\mathfrak{R}^2$

$$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

b) Elige y realiza uno de los dos siguientes apartados:
   b1) Sabiendo que toda aplicación ortogonal es lineal demostrar que toda aplicación ortogonal es inyectiva.
   b2) Demostrar, por inducción, que autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

Ejercicio 3: (**6** ptos)

a) Halle una base ortonormal de $\mathfrak{R}^3$ formada por vectores propios de la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar las coordenadas del vector $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ respecto de la base ortonormal de $\mathfrak{R}^3$ obtenida.
b) Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -12 & -7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ obtener J la forma canónica de Jordan de A y las matrices P y P^{-1} tal que $P^{-1}AP=J$.

Ejercicio 4: (**8** ptos)

En $\mathfrak{R}^3$ se consideran la base canónica $B_c = \{ e_1, e_2, e_3 \}$ y el producto escalar < , > definido por:

$\| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1$, ángulo (e_1, e_2) = ángulo $(e_1, e_3) = \frac{\pi}{2}$ y ángulo $(e_2, e_3) = \frac{4\pi}{6}$. Calcular:

a) La matriz de Gram en la base B_c.
b) Una base ortonormal de ($\mathfrak{R}^3$, < ,>).
c) La proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el plano x = 0.
d) La distancia del vector (1, 2, 3) al origen.

Ejercicio 5: (**8** ptos)

Dado $\mathfrak{R}^3$ con el producto escalar usual y el subespacio vectorial $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y - z = 0 \right\}$, se pide:

a) Hallar la matriz de la proyección ortogonal (p_S) sobre *S* respecto de las bases canónicas de $\mathfrak{R}^3$.
b) Calcular la imagen del vector (1,2,-1) por la proyección ortogonal p_S, es decir, calcular p_S (1,2,-1).
c) Contestar razonadamente ¿es p_S diagonalizable ortogonalmente? ¿es p_S inyectiva? ¿es p_S una aplicación ortogonal?.

Ejercicio 6: (**4** ptos)

Construir la matriz y las ecuaciones, respecto de la base canónica, de la simetría respecto del plano $\pi : x + z = 0$.