Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Informática. UPM

SOLUCIONES

24 de Octubre de 2014

ÁLGEBRA LINEAL Matemáticas e Informática

PRIMER PARCIAL: MATRICES, SISTEMAS, ESPACIOS VECTORIALES y HOMOMORFISMOS

Apellidos...**Nombre**......................**Nº Matrícula**..........

Ejercicio 1: (5 ptos)

Las demostraciones pedidas en este ejercicio se pueden consultar en los apuntes de clase o en cualquier libro de Álgebra Lineal.

Ejercicio 2: (5 ptos)
Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: (**las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.3 puntos**)

1 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $T=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{c} x_1+x_3=0 \\ x_2-2x_3x_1=0\end{array}\right.\right\}$ ------------------ **F**

2 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^4$, $C=\{(0,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)\}$.--------------- **F**

3 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^4$, $C=\{(0,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,0)\}$. -------------- **V**

4 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $P_3(\mathbb{R})$: $S=\{p(x)\in P_3(\mathbb{R}) \,/\, p(0)p(1)=0\}$.--------------------- **F**

5 La aplicación $f(x,y,z)=(2x+y-z, 0)$ es lineal. --- **V**

6 La aplicación $f(x,y)=(2x+y, x-1)$ es lineal. --- **F**

7 Dada la aplicación lineal $f(x_1,\ldots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la imagen de f es un s.v. de $\mathbb{R}^n$.------------- **F**

8 Dado el homomorfismo $f(x_1,\ldots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que dim Im$f$=rango(A). --------------- **V**

9 Dado el homomorfismo $f(x_1,\ldots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que dim ker$f$=rango(A). --------------- **F**

10 Dado el homomorfismo $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}f$. ---------------------------- **F**

Ejercicio 3: (5 ptos Trabajo en Grupo)

a) Dado en $\mathbb{Z}_2^5$ el subespacio vectorial $C=L\{(1,1,1,0,0), (1,0,0,1,1), (0,1,1,1,1)\}$, obtener una matriz de paridad para el código lineal C, la dimensión de C, el número de palabras de C y la distancia de C ¿Cuántos errores detecta C? y ¿Cuántos corrige?.

b) Construir la matriz de paridad de un código lineal que codifique, al menos, 15 palabras y sea capaz de corregir un error.

$x_1+x_2+x_4=0$ $\quad (1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$

y corrige 1.

b) matriz de paridad de un código Hamming (7,4)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: (10 ptos)

a) Demostrar si los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son el mismo, $S_1 = L\{(0, -3,1), (2, 1, -1), (1, -1,0)\}$ y $S_2 = L\{(2, -5,1), (1, -4,1), (1, 2, -1), (3, 0, -1)\}$.

b) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ obtener la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $S_a = L\{(a, -a, 1), (1, 0, a), (a. -a, 2a)\}$, indicando en qué casos el subespacio S_a es el total.

c) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ obtener la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, $T_a : \begin{cases} x + az + t = 0 \\ y + at = 0 \\ x + ay + az + (a+3)t = 0 \end{cases}$.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $S_1 = S_2$.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -a & 1 \\ a & -a & 2a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1-a^2 \\ 0 & -a & 2a-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & a^2-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

- Si $a=0 \Rightarrow \dim S_0 = 2$ y $B_{S_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Si $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \dim S_{1/2} = 2$ y $B_{S_{1/2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$ se tiene $\dim S_a = 3 \Rightarrow S_a = \mathbb{R}^3$

c) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ \ldots \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ \ldots \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ \ldots \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ldots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 2$ y $a \neq -1$ se tiene $\dim T_a = 4 - 3 = 1$

Ejercicio 5: (**10** ptos)

Sean S y T los subespacios vectoriales del e.v. $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : y + z + 2t = 0 \right\} \text{ y } T = L\{(1,2,4,3), (2,-1,3,1), (1,0,2,1)\}$$

a) Obtener una base de S y un suplementario de S en $\mathbb{R}^4$.

b) Obtener las coordenadas del vector $(1,0,2,1) \in \mathbb{R}^4$ respecto de la base más sencilla de T.

c) Obtener la base más sencilla de S + T.

d) Obtener ecuaciones implícitas, paramétricas y una base de $S \cap T$.

e) Obtener un suplementario de $S \cap T$ en T.

a) $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, suplementario de S en $\mathbb{R}^4 = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Base usual o más sencilla de T:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

coordenadas de $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto de B_T : $\bar{v}_{B_T} = (1, 0)$ ya que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base más sencilla de S+T es: $B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = B_c^{\mathbb{R}^4}$

Luego $S+T = \mathbb{R}^4$, $\dim S+T = 4$ y $\dim S \cap T = \dim S + \dim T - \dim S+T = 1$.

$y+z+2t=0$

Resolvemos el ...

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z-3t=0 \\ y+z+2t=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \\ t=0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecs. Paramétricas de $S\cap T$

$$\Rightarrow B_{S\cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Tomo $(0,1,1,1) \in T$ y como $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ se tiene que el s.v. $T' = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un suplementario de $S\cap T$ en T.

Ejercicio 6: (**10** ptos)

a) Sea f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z)=(x-z,\ x+y,\ z,\ z)$. Se pide:
a1) Obtener los subespacios Imf y ker$f$, y estudiar si la aplicación lineal es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

a2) Obtener el subespacio contraimagen $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$.

b) Sea f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $f(1,1,0) = (1,-1,0)$, $f(0,1,0) = (0,1,1)$ y $f(0,1,-1) = (1,0,1)$. Obtener la matriz de la aplicación f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y obtener $f(1,2,1)$.

a) a1) $\mathrm{Im} f = L\{f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1)\} = L\{(1,1,0,0),\ (0,1,0,0),\ (-1,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow B_{\mathrm{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 3$ y $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im} f = 3-3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker f = \{(0,0,0)\} \Rightarrow f$ Monomorfismo

Como $\dim \mathrm{Im} f \neq 4 \Rightarrow \mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow f$ No Epimorfismo y no isomorfismo.

a2) $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \begin{pmatrix}x-z\\x+y\\z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x-z=0\\x+y-\lambda=0\\z=0\end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}x=0\\y=\lambda\\z=0\end{matrix}}$$
$\lambda=\lambda$

Por tanto, $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) $\left(\begin{matrix}1&1&0\end{matrix}\,\middle|\, f(1,1,0) \ldots\right) = \left(\begin{matrix}1&1&0\\0&1&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1&-1&0\\0&1&1\end{matrix} \ldots\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{matrix}1&1&0\\0&1&0\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1&-1&0\\0&1&1\end{matrix} \ldots\right) \rightarrow$