CÁLCULO I (1^o GIEAI). CURSO 2014-15.

SOLUCIONES del EXAMEN Bloque 3 (22 de diciembre de 2014)

1. Determina el valor de $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

   Ver ejercicio 1 (b) de la hoja de problemas. Hay que utilizar la técnica de integración por partes dos veces para obtener

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}(x^2+2x+2)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x}(x^2+2x+2) - (-2)\right) = 2$$

2. Calcula la transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+1}{s^3-s^2+3s-3}\right)$.

   Ver ejercicio 4, apartados (a), (b), (c) o (d) de la hoja de problemas. La solución pasa por descomponer la función racional como suma de fracciones simples; se tiene que $s^3-s^2+3s-3 = (s-1)(s^2+3)$, de modo que la descomposición es de la forma

$$\frac{s+1}{s^3-s^2+3s-3} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+3} = \frac{A(s^2+3)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+3)}$$

   Los valores A, B y C son la solución del sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar entre sí los coeficientes de las potencias de s homólogas de los polinomios de los numeradores de las fracciones que hay en los extremos de la expresión anterior. Se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^3-s^2+3s-3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/2}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s/2+1/2}{s^2+3}\right).$$

   Ahora, usando la tabla de transfrmadas inmediatas

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^3-s^2+3s-3}\right) = \frac{1}{2}e^t - \frac{\cos(\sqrt{3}t)}{2} + \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{2\sqrt{3}}.$$

3. Calcula, si es posible, la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n}$.

   Ver ejercicio 7, apartados (b), (g), (j) o (k) de la hoja de problemas. La serie converge porque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n} < 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Además, haciendo la descomposición en fracciones simples se tiene

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

   de modo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\ldots + 4 \qquad n+5$$

   de donde $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

4. Determina si la siguiente serie es o no convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n+5}}{n^n}$.

Ver, por ejemplo, el ejercicio 10, apartado (i) de la hoja de problemas. Al aplicar el criterio de la raíz: $\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+5}}{n^n}} = \text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{3n+5}{n}}}{n^{\frac{n}{n}}} = \text{lím}_{n\to\infty} \dfrac{2^3 2^{\frac{5}{n}}}{n} = 0$ se deduce que la serie es convergente.

5. Determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{7^n}$.

Si es posible, calcula su suma (en función de x) allí donde la serie converja.

Ver, por ejemplo, el ejercicio 12 apartado (j) (convergencia) y el ejercicio 5, apartados (a), (d), (e), (h) o (i) de la hoja de problemas. La serie es una serie geométrica con $r = \dfrac{x-2}{7}$ y converge si, y sólo si $|r| < 1$, es decir, hay que analizar

$$\left|\frac{x-2}{7}\right| < 1 \Leftrightarrow -5 < x < 9$$

Además, en caso de ser convergente, su suma es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{7^n} = \frac{\frac{x-2}{7}}{1-\frac{x-2}{7}} = \frac{x-2}{9-x}$$

6. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x + e^{2t} - 4t \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

$$x' = 2x + e^{2t} - 4t$$

$$\mathfrak{L}(x') = 2\mathfrak{L}(x) + \mathfrak{L}(e^{2t}) - 4\mathfrak{L}(t)$$

$$s\mathfrak{L}(x) + 1 = 2\mathfrak{L}(x) + \frac{1}{s-2} - 4\frac{1}{s^2}$$

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} - 4\frac{1}{s^2(s-2)}$$

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{2}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$x(t) = -2e^{2t} + te^{2t} + 1 + 2t$$

7. Dadas las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{\cdots}$ (ii) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\cdots}$ (iii) $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cdots}$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{n^5+n^2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/2}}{\sqrt{n^5+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}} = 1 \in (0,\infty)$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^5+n^2}}$ converge absolutamente.

(iii) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ es convergente ya que es una serie alternada que cumple el criterio de convergencia de estas series:
La sucesión $\{\frac{1}{n \ln n}\}$ tiene límite 0 y es decreciente para $n \geq 2$.
Para comprobar si converge o no absolutamente empleamos el criterio de la integral para estudiar la convergencia de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Para ello utilizamos la función $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ que es continua, positiva y decreciente en $[2, \infty)$ y calculamos la siguiente integral impropia:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \ln(\ln x) \Big|_{x=2}^{x=t} = \infty$$

y como es divergente tenemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ no converge absolutamente y es, por tanto, condicionalmente convergente.

8. Dada la función $f(x) = \cos x$ y el centro $a = \pi$:

   a) Encuentra su polinomio de Taylor de grado 4, $p_4(x)$, y la serie de Taylor.
   b) Enuncia el teorema de Taylor.
   c) Da una estimación del error que se comete cuando se utiliza $p_4(x)$ para aproximar $\cos 3$ y justifica que la serie de Taylor converge a $\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculamos las primeras derivadas de $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{iv)}(x) = \cos x$ que coincide con $f(x)$ de manera que a partir de orden 4 se repiten. Los valores de las derivadas en π son $f(\pi) = -1$, $f'(\pi) = 0$, $f''(\pi) = 1$, $f'''(\pi) = 0$, $f^{iv)}(\pi) = -1$ y así sucesivamente.
El polinomio de Taylor de grado 4 es

$$p_4(x) = -1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4$$

y la serie de Taylor

$$-1 + \frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{1}{4!}(x-\pi)^4 + \frac{1}{6!}(x-\pi)^6 - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(x-\pi)^{2n}$$

b) **Teorema de Taylor:** *Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a. Entonces para cada $x \in I$ existe un punto c, que depende de x y de n, situado entre a y x tal que:*

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)},$$

$5!$

en particular, para $x = 3$ existe $c \in [3, \pi]$ tal que:

$$|f(3) - p_4(3)| \leq \left| \frac{-\operatorname{sen} c}{5!}(3-\pi)^5 \right| \leq \frac{|3-\pi|^5}{5!} \approx 0{,}000000474266$$

Para demostrar que la serie de Taylor converge a $\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ necesitamos comprobar que el resto de Taylor $R_n(x)$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Para ello, por el teorema de Taylor, tenemos

$$|\cos x - p_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-\pi)^{n+1} \right| \leq \frac{|x-\pi|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$