

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Se trata de caracterizar la propagación de la luz en un medio *homogéneo* (ϵ_{gen} no depende de la posición) e *isótropo* (ϵ_{gen} es un escalar).

Se buscan soluciones de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_c \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}_c \vec{r} - \omega t)}$$

\vec{E}_0 , \vec{H}_0 , \vec{k}_c y ω son constantes.

Hay que obtener la relación existente entre los parámetros que caracterizan

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla(\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r})) &= 0 \\
 \nabla(\mu\vec{H}(\vec{r})) &= 0 \\
 \nabla \wedge \vec{E}(\vec{r}) - i\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) &= 0 \\
 \nabla \wedge \vec{H}(\vec{r}) + i\omega\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon_{gen} \neq 0 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{aligned}
 \vec{k}_c \cdot \vec{E}_0 &= 0 \\
 \vec{k}_c \cdot \vec{H}_0 &= 0 \\
 \vec{H}_0 &= \frac{1}{\omega\mu} \vec{k}_c \wedge \vec{E}_0 \\
 \vec{E}_0 &= \frac{-1}{\varepsilon_{gen}\omega} \vec{k}_c \wedge \vec{H}_0
 \end{aligned}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones:

$$\vec{E}_0 = \frac{-1}{\varepsilon_{gen}\mu\omega^2} \vec{k}_c \wedge (\vec{k}_c \wedge \vec{E}_0) = \frac{-1}{\varepsilon_{gen}\mu\omega^2} \left[\vec{k}_c (\vec{k}_c \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\vec{k}_c \cdot \vec{k}_c) \right] =$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

Definimos el *índice de refracción complejo* del medio como:

$$n_c^2 = c^2 \mu \epsilon_{gen} = \frac{\mu \epsilon_{gen}}{\mu_0 \epsilon_0}$$

k_c es complejo:

$$\vec{k}_c = \vec{k} + i\vec{a}$$

$$n_c = n + i\kappa$$

con k (vector de ondas), a (vector de atenuación), n (índice de refracción)

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{a} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$



$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2)$$
$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n \kappa$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

1. En general los vectores \mathbf{k} y \mathbf{a} no serán paralelos y por tanto \mathbf{E} no será una función de $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$. A estas ondas las llamaremos ondas “planas inhomogéneas”:

“Los planos de amplitud constante no coinciden con los planos de fase constante”

2. Los vectores \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 y \mathbf{k}_c no forman un triedro ortogonal: intervienen vectores complejos.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medios transparentes

Para estos medios el índice de absorción es nulo: $\kappa = 0$.

$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2$$
$$\vec{k} \cdot \vec{a} = 0$$

- a) $\vec{a} = 0$. En este caso la onda es plana y los vectores **E**, **H** y **k** forman un triedro ortogonal.

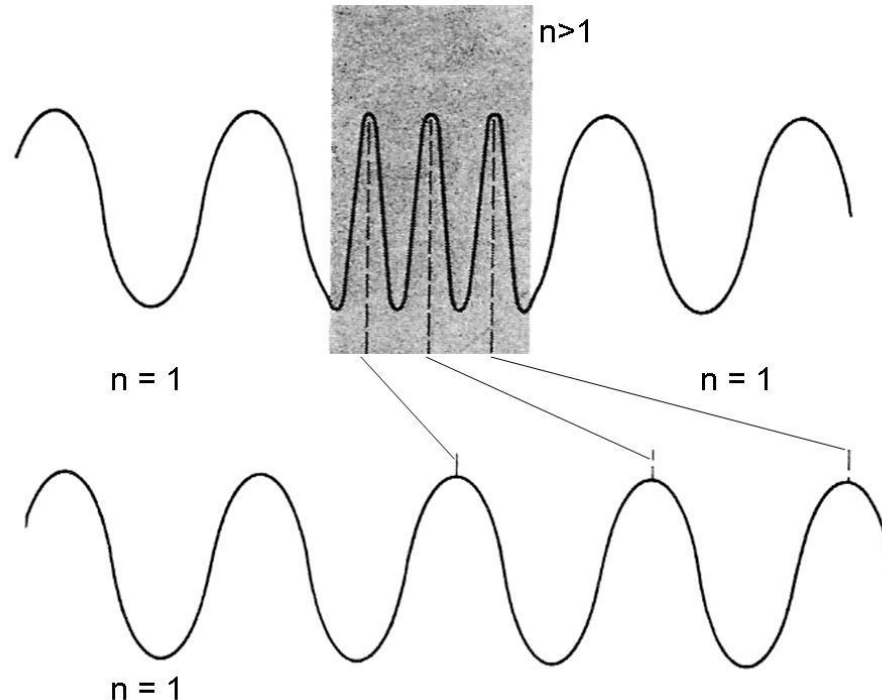
$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = \frac{2\pi}{\lambda_{medio}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos



¿Cuál es ahora la velocidad de fase de la onda?

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

b) $a \neq 0$

a y k son perpendiculares. Por ejemplo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-az} e^{i(kx - \omega t)}$$

Onda armónica pero no es plana

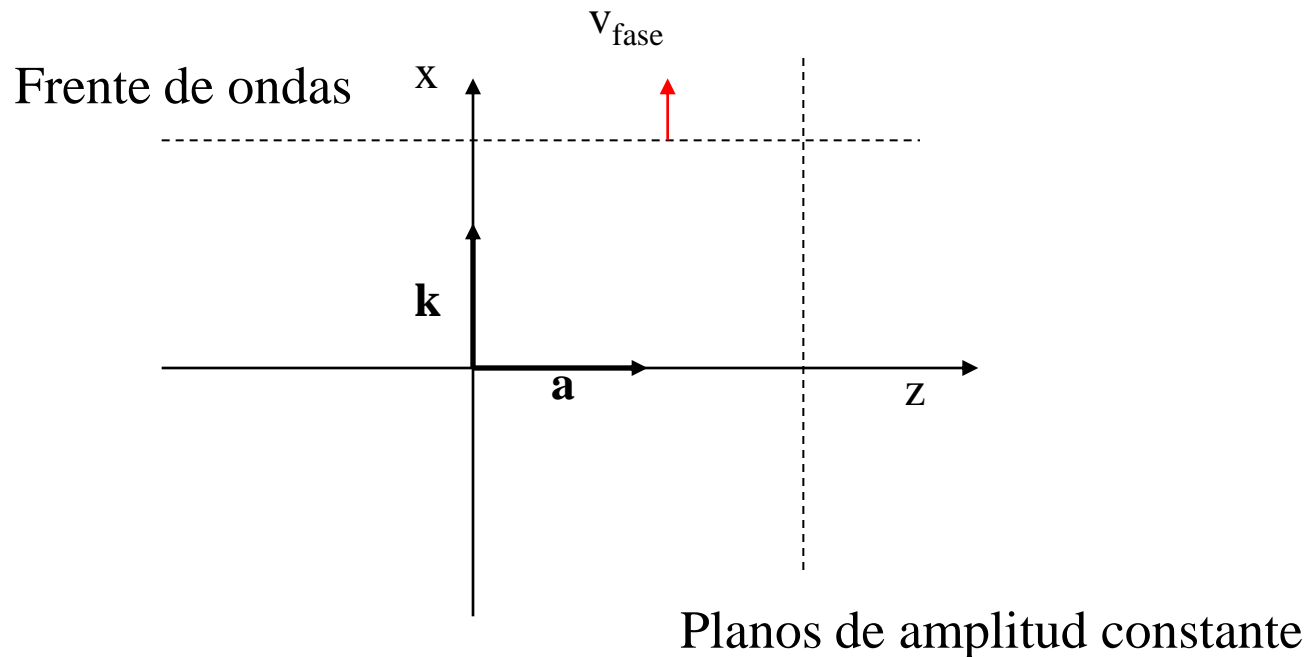
$$v_{fase} = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2}}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos



Cartagena99

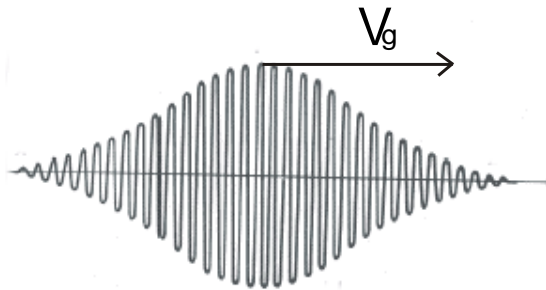
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

velocidad de grupo - paquete de ondas casi-monocromático

$$E(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} d\omega E_0(\omega) e^{i(k(\omega)z - \omega t)} \quad \Delta\omega \ll \omega_0$$



$$k(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} \cong k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots$$

$$E(z, t) \cong \tilde{E}(z, t) e^{i(k(\omega_0)z - \omega_0 t)}$$

envolvente del grupo

$$\tilde{E}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} d\omega E_0(\omega) e^{i \left(\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} z - t \right) (\omega - \omega_0)} = \tilde{E} \left(\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} z - t \right)$$

la envolvente (grupo) se propaga sin deformarse a la **velocidad de grupo**

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medios absorbentes

Para estos medios el índice de absorción no es nulo: $\kappa \neq 0$ (ϵ_{gen} complejo).

$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2)$$
$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa$$

El vector de ondas es complejo.

a) Si $\vec{k} \parallel \vec{a}$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa > 0 \quad \rightarrow \quad n \text{ y } \kappa \text{ tienen el mismo signo}$$

Si tomamos \mathbf{k}_0 ($|\mathbf{k}_0| = \omega/c$) para designar la dirección de \mathbf{k} y \mathbf{a} :

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isotrópicos

$$\longrightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa \vec{k}_0 \cdot \vec{r}} e^{i(n \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(n_c \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- Es una **onda amortiguada armónica**.
- Es una onda homogénea.
- Los vectores \mathbf{E}_0 y \mathbf{H}_0 son perpendiculares a \mathbf{k}_0 , pero la parte real de \mathbf{E}_0 no es perpendicular a la de \mathbf{H}_0 cuando la polarización es elíptica.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Para el caso de $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}$: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z - \omega t)}$

$$\langle \vec{S}(z) \rangle = \langle \vec{S}(0) \rangle e^{-\frac{4\pi}{\lambda_{\text{vacío}}} \kappa z}$$

Atenuación en dB por kilómetro: $\frac{A}{z} = \frac{10}{z} \log_{10} \left(\frac{|\langle \vec{S}(0) \rangle|}{|\langle \vec{S}(z) \rangle|} \right)$

ejemplos:

metal $4 \cdot 10^{11}$ dB/km

vidrio vulgar (ventanas, lentes) $4 \cdot 10^5$ dB/km

vidrio de fibras ópticas 0.1 dB/km

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

b) El caso general: $\kappa > 0$:

\mathbf{k} y \mathbf{a} forman un ángulo distinto de cero o de 90°

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n \kappa > 0$$

n y κ tienen siempre el mismo signo.

Superficies de amplitud constante y fase constante no coinciden.

Ejemplo de medio absorbente: los metales ($\kappa \sim 3$). Para un amplio rango de frecuencias.

Ejemplo de medio transparente: el vidrio (opaco para el UV).

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medio absorbente

$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa$$

Si suponemos
 ϵ y σ reales



$$|\vec{k}| = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

Para el caso de $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}$: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z - \omega t)}$

Longitud de penetración : $l_{\text{penetración}} = \frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\kappa k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi\kappa}$

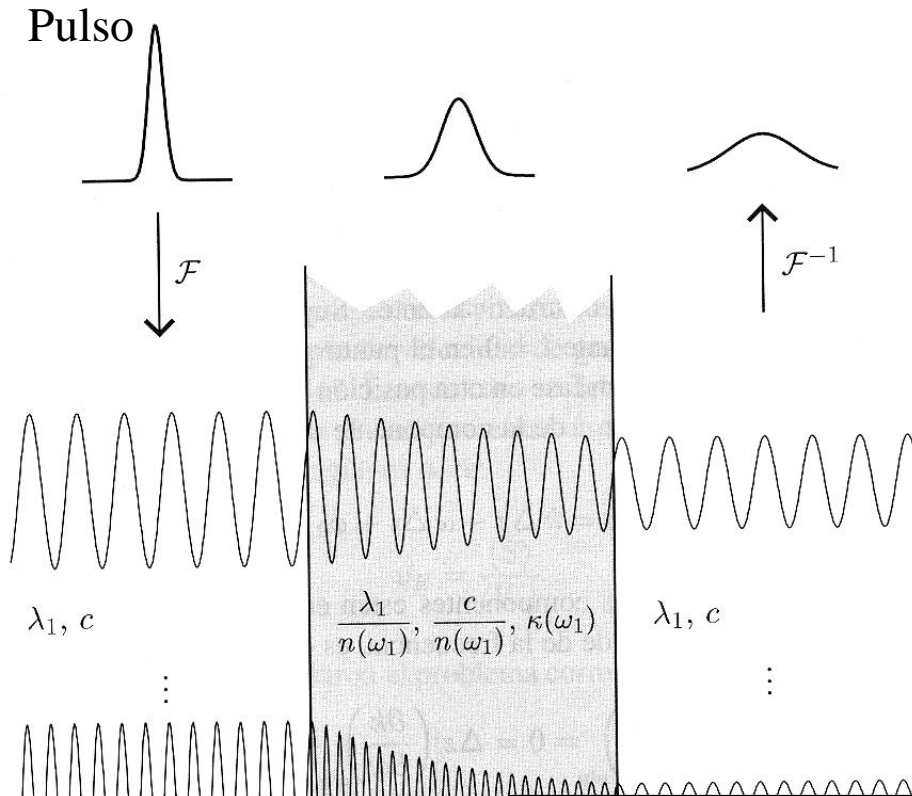
Velocidad de fase
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Atenuación de la onda



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z - \omega t)}$$

$$|\vec{k}| = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}}$$

$$|\vec{a}| = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}}$$

Distinta atenuación

Distinta fase

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Conductancia muy grande

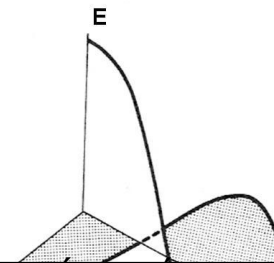
$$\sigma / \omega \epsilon \gg 1 \longrightarrow \epsilon_{gen} \cong i\sigma / \omega$$

$$|\vec{k}| = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

$$\left. \begin{aligned} |\vec{k}| \approx |\vec{a}| \approx \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}} \\ n^2 - \kappa^2 \approx 0 \\ 2n\kappa \approx \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \end{aligned} \right\} n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}}$$

$$n_c = n + i\kappa = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega \epsilon_0}} (1 + i)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Metal	n	K
Sodium, solid	0.044	2.42
Silver, massive	0.20	3.44
Magnesium, massive	0.37	4.42
Potassium, molten	0.084	1.81
Cadmium, massive	1.13	5.01
Aluminium, massive	1.44	5.23
Tin, massive	1.48	5.25
Gold, electrolytic	0.47	2.83
Mercury, liquid	1.60	4.80
Zinc, massive	1.93	4.66
Copper, massive	0.62	2.57
Gallium, single crystal	3.69	5.43
Antimony, massive	3.04	4.94
Cobalt, massive	2.12	4.04
Nickel, electrolytic	1.58	3.42
Manganese, massive	2.41	3.88
Lead, massive	2.01	3.48
Platinum, massive	2.49	3.54



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

 ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70