4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Se trata de caracterizar la propagación de la luz en un medio *homogéneo* (ε_{gen} no depende de la posición) e *isótropo* (ε_{gen} es un escalar).

Se buscan soluciones de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_c\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}_c\vec{r}-\omega t)}$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{k}_c$ y ω son constantes.

Hay que obtener la relación existente entre los parámetros que caracterizan al medio (ε_{gen} y μ) y los de la onda.

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla(\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r}))=0\\
&\nabla(\mu\vec{H}(\vec{r}))=0\\
&\nabla\wedge\vec{E}(\vec{r})-i\omega\mu\vec{H}(\vec{r})=0\\
&\nabla\wedge\vec{H}(\vec{r})+i\omega\varepsilon_{gen}\vec{E}(\vec{r})=0
\end{aligned}\right\}
\xrightarrow{\varepsilon_{gen}\neq 0}
\begin{aligned}
&\vec{k}_c\cdot\vec{E}_0=0\\
&\vec{k}_c\cdot\vec{H}_0=0\\
&\vec{H}_0=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}_c\wedge\vec{E}_0\\
&\vec{E}_0=\frac{-1}{\varepsilon_{gen}\omega}\vec{k}_c\wedge\vec{H}_0
\end{aligned}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones:

$$\vec{E}_0=\frac{-1}{\varepsilon_{gen}\mu\omega^2}\vec{k}_c\wedge(\vec{k}_c\wedge\vec{E}_0)=\frac{-1}{\varepsilon_{gen}\mu\omega^2}\left[\vec{k}_c(\vec{k}_c\cdot\vec{E}_0)-\vec{E}_0(\vec{k}_c\cdot\vec{k}_c)\right]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_{gen}\mu\omega^2}\vec{E}_0\vec{k}_c{}^2 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{k}_c{}^2=\omega^2\mu\varepsilon_{gen}=\frac{\omega^2}{c^2}n_c{}^2}$$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Definimos el *índice de refracción complejo* del medio como:

$$n_c{}^2 = c^2 \mu \varepsilon_{gen} = \frac{\mu \varepsilon_{gen}}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

k$_c$ es complejo:

$$\overleftarrow{k}_c = \vec{k} + i\vec{a}$$
$$n_c = n + i\kappa$$

con **k** (vector de ondas), **a** (vector de atenuación), *n* (índice de refracción) y κ (índice de absorción) reales,

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0 e^{-\vec{a}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{k}^2-\vec{a}^2=\frac{\omega^2}{c^2}(n^2-\kappa^2)$$

$$\vec{k}\cdot\vec{a}=\frac{\omega^2}{c^2}n\kappa$$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

1. En general los vectores **k** y **a** no serán paralelos y por tanto **E** no será una función de **k·r**. A estas ondas las llamaremos ondas "planas inhomogéneas":

   "Los planos de amplitud constante no coinciden con los planos de fase constante"

2. Los vectores $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ y $\mathbf{k}_c$ no forman un triedro ortogonal: intervienen vectores complejos.

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medios transparentes

Para estos medios el índice de absorción es nulo: $\kappa = 0$.

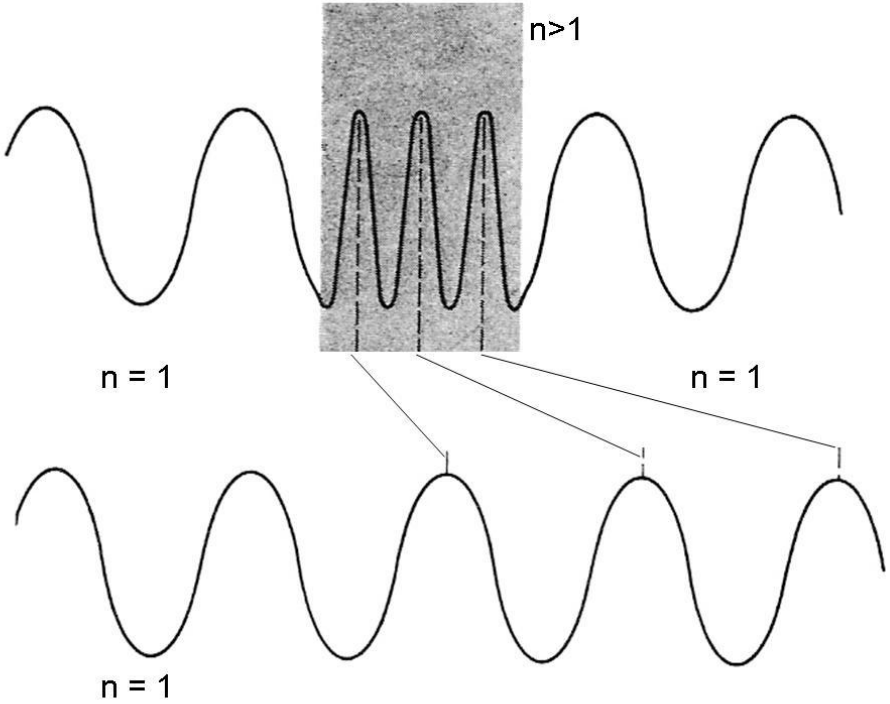
$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} n^2 \\ \vec{k} \cdot \vec{a} = 0 \end{array}}$$

a) **a**=0. En este caso la onda es plana y los vectores <u>**E, H y k** forman un triedro ortogonal</u>.

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = \frac{2\pi}{\lambda_{medio}}$$

Ahora la λ en el medio es $\lambda_{\text{medio}} = \lambda_0 / n$.

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos



¿Cuál es ahora la velocidad de fase de la onda?

$$\left|\vec{k}\right| z - \omega t = cte$$

$$v_{fase} = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{c}{n}$$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

b) a≠0

a y **k** son perpendiculares. Por ejemplo:

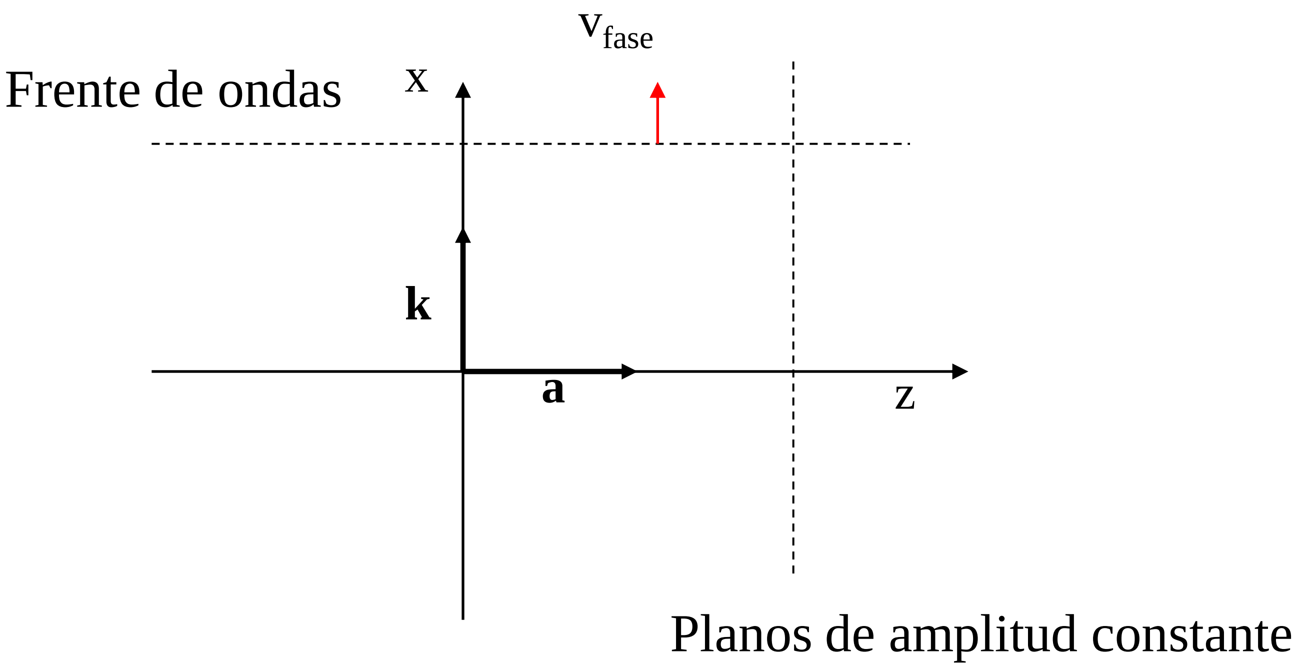
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-az} e^{i(kx-\omega t)}$$

O**nda armónica pero no es plana**

$$v_{fase} = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2}}$$

No podemos decir qué ángulo forma **E** con **k** o **a**.

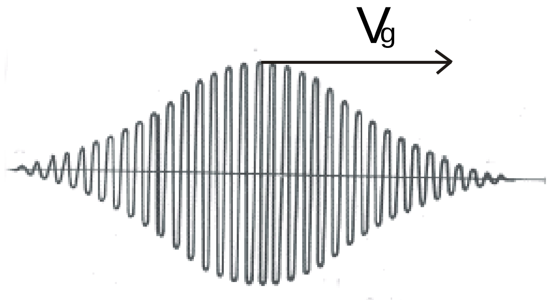
4. Propagación en medios homogéneos e isótropos



4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

velocidad de grupo - paquete de ondas casi-monocromático

$$E(z,t)=\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} d\omega E_0(\omega) e^{i(k(\omega)z-\omega t)} \qquad \Delta\omega << \omega_0$$



$$k(\omega)=n(\omega)\frac{\omega}{c}\cong k(\omega_0)+\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\cdots$$

$$E(z,t)\cong \tilde{E}(z,t)e^{i(k(\omega_0)z-\omega_0 t)}$$

envolvente del grupo $$\tilde{E}(z,t)=\int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} d\omega E_0(\omega) e^{i\left(\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} z-t\right)(\omega-\omega_0)}=\tilde{E}\left(\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} z-t\right)$$

la envolvente (grupo) se propaga sin deformarse a la **velocidad de grupo**

$$v_g=\frac{1}{\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}}=\frac{c}{n+\omega\frac{dn}{d\omega}}=\frac{c}{n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}}$$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medios absorbentes

Para estos medios el índice de absorción no es nulo: $\kappa \neq 0$ (ε_{gen} complejo).

$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \kappa^2)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa$$

El vector de ondas es complejo.

a) Si $\vec{k} \parallel \vec{a}$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa > 0 \quad \Rightarrow$$

n y κ tienen el mismo signo

Si tomamos $\mathbf{k}_0$ ($|\mathbf{k}_0| = \omega/c$) para designar la dirección de **k** y **a**:

$$\vec{k} = n\vec{k}_0$$

$$\vec{a} = \kappa\vec{k}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_c = (n + i\kappa)\vec{k}_0 = n_c\vec{k}_0$$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa \vec{k}_0 \cdot \vec{r}} e^{i(n\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(n_c \vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- Es una onda amortiguada armónica.

- Es una onda homogénea.

- Los vectores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son perpendiculares a $\mathbf{k}_0$, pero la parte real de $\mathbf{E}_0$ no es perpendicular a la de $\mathbf{H}_0$ cuando la polarización es elíptica.

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Para el caso de **k** | | **a** : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z - \omega t)}$

$$\left\langle \vec{S}(z) \right\rangle = \left\langle \vec{S}(0) \right\rangle e^{-\frac{4\pi}{\lambda_{\text{vacío}}}\kappa z}$$

Atenuación en dB por kilómetro: $\frac{A}{z} = \frac{10}{z} \log_{10}\left(\frac{\left|\left\langle \vec{S}(0) \right\rangle\right|}{\left|\left\langle \vec{S}(z) \right\rangle\right|} \right)$

ejemplos:
metal 4 10^{11} dB/km
vidrio vulgar (ventanas, lentes) 4 10^{5} dB/km
vidrio de fibras ópticas 0.1 dB/km

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

b) El caso general: κ>0 :

k y **a** forman un ángulo distinto de cero o de 90º

$$\vec{k}\cdot\vec{a}=\frac{\omega^2}{c^2}n\kappa>0$$

n y κ tienen siempre el mismo signo.

Superficies de amplitud constante y fase constante no coinciden.

Ejemplo de medio absorbente: los metales (κ~3). Para un amplio rango de frecuencias.

Ejemplo de medio transparente: el vidrio (opaco para el UV).

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Medio absorbente

$$\vec{k}^2 - \vec{a}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \kappa^2)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{a} = \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa$$

Si suponemos
ε y σ reales

$$|\vec{k}| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]^{1/2}$$

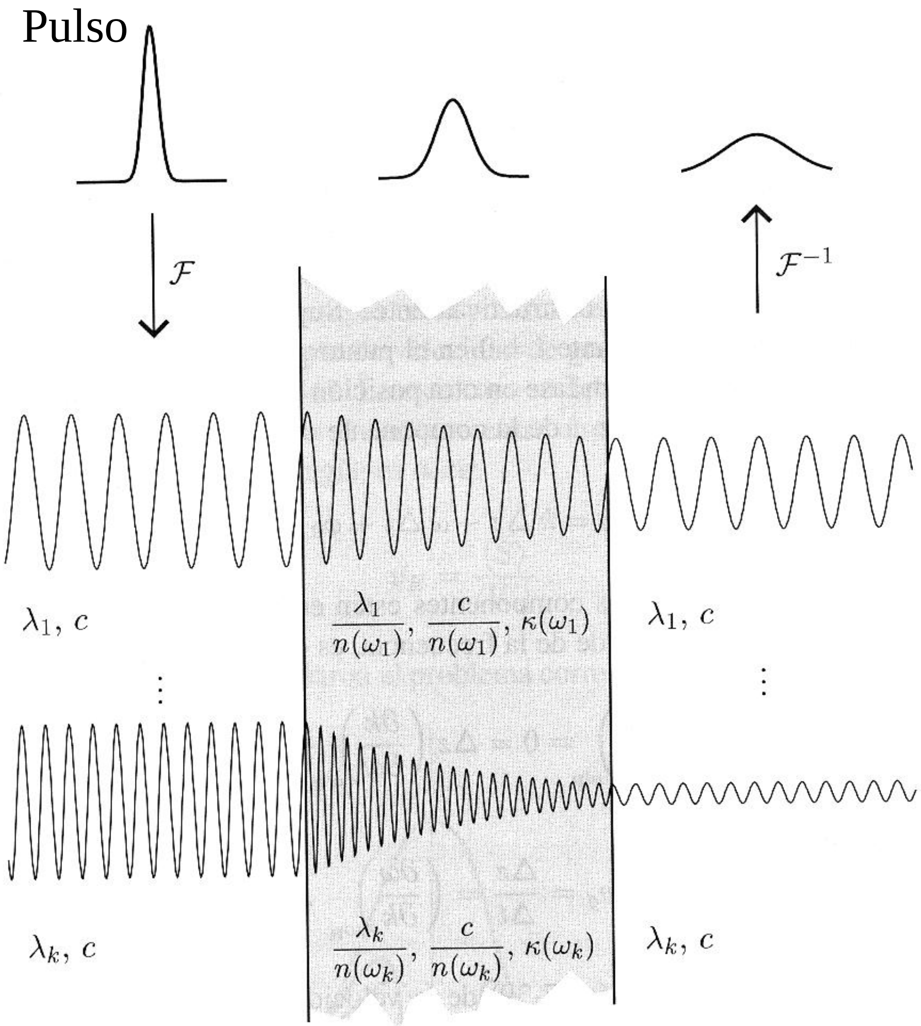
Para el caso de **k** | | **a** : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z - \omega t)}$

Longitud de penetración : $l_{\textbf{penetración}} = \frac{1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\kappa k_0} = \frac{\lambda_o}{2\pi\kappa}$

Velocidad de fase
y longitud de onda: $\mathbf{v}_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\frac{2}{\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2} + 1}\right]^{1/2}$ $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi \mathbf{v}_f}{\omega}$

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Atenuación de la onda



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-|\vec{a}|z} e^{i(|\vec{k}|z-\omega t)}$$

$$|\vec{k}| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2}$$

$$|\vec{a}| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2}$$

Distinta atenuación
Distinta fase

Tras atravesar el medio el pulso se ha ensanchado y atenuado.

4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Conductancia muy grande

$$\left|\vec{k}\right| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]^{1/2}$$

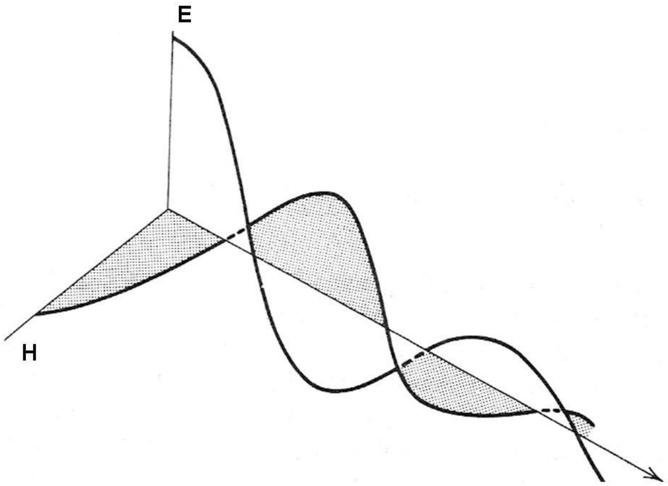
$$\left|\vec{a}\right| = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]^{1/2}$$

$$\sigma/\omega\varepsilon >> 1 \longrightarrow \varepsilon_{gen} \cong i\sigma/\omega$$

$$\left.\left|\vec{k}\right| \approx \left|\vec{a}\right| \approx \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} n^2-\kappa^2 \approx 0 \\ 2n\kappa \approx \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \end{array}\right\} \quad \boxed{n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}}$$

$$n_c = n + i\kappa = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i)$$

$$l_{penetración} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\lambda_0}{2\pi\kappa} = \frac{\lambda_0}{\pi}\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}}$$



4. Propagación en medios homogéneos e isótropos

Metal	n	κ
Sodium, solid	0·044	2·42
Silver, massive	0·20	3·44
Magnesium, massive	0·37	4·42
Potassium, molten	0·084	1·81
Cadmium, massive	1·13	5·01
Aluminium, massive	1·44	5·23
Tin, massive	1·48	5·25
Gold, electrolytic	0·47	2·83
Mercury, liquid	1·60	4·80
Zinc, massive	1·93	4·66
Copper, massive	0·62	2·57
Gallium, single crystal	3·69	5·43
Antimony, massive	3·04	4·94
Cobalt, massive	2·12	4·04
Nickel, electrolytic	1·58	3·42
Manganese, massive	2·41	3·88
Lead, massive	2·01	3·48
Platinum, electrolytic	2·63	3·54
Rhenium, massive	3·00	3·44
Tungsten, massive	3·46	3·25
Bismuth, massive	1·78	2·80
Iron, evaporated	1·51	1·63