CÁLCULO I (1^o GIEAI). CURSO 2015-16.

SOLUCIONES EXAMEN Bloque 2 (1 de diciembre de 2015)

1. Sea la función
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 2x.$$
   a) Enuncia el teorema del valor medio.
   b) Comprueba que la función f verifica las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y di que es lo que asegura entonces su tesis.
   c) Aproxima numéricamente con 3 cifras decimales exactas los valores intermedios que aparecen en la tesis del teorema.

   a) Teorema del valor medio: Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
   o, equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

   b) f es una función polinómica de manera que es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. El teorema del valor medio nos dice entonces que existe al menos un $c \in (0, 2)$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}, \text{ es decir, } c^3 + 2c - 2 = 2.$$

   c) Para aproximar numéricamente con 3 cifras decimales exactas las raíces de $c^3 + 2c - 2 = 2$ en $(0, 2)$ utilizamos el método de Newton. Escribimos la ecuación en la forma $h(x) = 0$, $x^3 + 2x - 4 = 0$, y definimos la función $g(x) = x - h(x)/h'(x)$:
$$g(x) = x - \frac{x^3 + 2x - 4}{3x^2 + 2}$$
   que vamos a iterar comenzando con $x_0 = 1$, $x_1 = g(x_0) = g(1) = 1{,}2$, $x_2 = g(x_1) = g(1{,}2) = 1{,}179746835443038$, $x_3 = g(x_2) = g(1{,}179746835443038) = 1{,}179509057012881$ y como x_2 y x_3 tienen ya tres cifras decimales iguales podemos asegurar que la raíz que buscamos es de la forma $c = 1{,}179\cdots$.
   No existen más raíces ya que $x^3 + 2x - 4$ es creciente (derivada positiva).

2. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} \ln(2x^3 - 6x + 6) & \text{si } x \in [0, 2) \\ \dfrac{\ln(10)}{x - 1} & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$
   a) Justifica que en $x = 2$ es continua pero no derivable y define la función $f'(x)$.
   b) Encuentra razonadamente sus extremos locales y absolutos si existen.
   c) ¿Cuál es su rango?

   a) $\ln(2x^3 - 6x + 6)$ es continua y derivable en $[0, 2]$ por ser composición de $\ln x$ y un polinomio, y $\ln(10)/(x - 1)$ que es una función racional también lo es en $[2, \infty)$. Así la continuidad de f en $x = 2$ se deduce de lo siguiente:
$$f(2) = \ln(10), \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \ln(2x^3-6x+6) = \ln(10), \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(10)}{x - 1} = \ln(10).$$
   Que en $x = 2$ f no es derivable se deduce de que las derivadas a la izquierda y a la derecha de f en $x = 2$ coinciden, respectivamente, con las de $\ln(2x^3 - 6x + 6)$ y $\ln(10)/(x - 1)$ que son distintas:
$$f'_-(2) = \frac{d}{dx}(\ln(2x^3 - 6x + 6))\Big|_{x=2} = \frac{6x^2 - 6}{2x^3 - 6x + 6}\Big|_{x=2} = \frac{9}{5}$$
$$f'_+(2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(10)}{x - 1}\right)\Big|_{x=2} = -\frac{\ln(10)}{(x - 1)^2}\Big|_{x=2} = -\ln(10)$$

El dominio de f' es por tanto $[0,2)\cup(2,\infty)$ y queda definida de la siguiente forma:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{6x^2-6}{2x^3-6x+6} & \text{si } x\in[0,2) \\ -\dfrac{\ln(10)}{(x-1)^2} & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$$

b) Buscamos los puntos críticos de f y estudiamos el signo de f'. Un punto crítico es $x=2$ donde la derivada no existe y si resolvemos $f'(x)=0$ solo encontramos la raíz $x=1$. Tenemos entonces

x	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$	∞
f'		$-$	0	$+$	no ex.	$-$	
f	$\ln 6$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 10$	$\searrow$	0

que nos dice que en $x=1$ hay un mínimo local y en $x=2$ un máximo local, que también es máximo absoluto, y no hay mínimo absoluto pues $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ y la función es siempre positiva.

c) El rango de f es $(0,\ln(10)]$.

3. Sea la función

$$f(x)=\int_0^x \left(\ln(\frac{1}{2}+t)\right)^3\,dt$$

con dominio $[0,2]$.

a) Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y halla $f'(x)$.

b) Estudia donde crece y decrece $f(x)$.

c) Aproxima el valor del mínimo absoluto de $f(x)$ utilizando la regla del trapecio con $n=5$.

a) Teorema Fundamental del Cálculo: Sea f una función continua en $[a,b]$. La función g definida para todo $x\in[a,b]$ como:

$$g(x)=\int_a^x f(s)ds.$$

es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y

$$g'(x)=f(x),$$

es decir, g es una primitiva de f.

$f'(x)=\left(\ln(\frac{1}{2}+x)\right)^3$.

b) Para estudiar donde crece y decrece $f(x)$ calculamos el signo de la derivada en $[0,2]$. Empezamos por ver donde se anula

$$\left(\ln(\frac{1}{2}+x)\right)^3=0,\ \ln(\frac{1}{2}+x)=0,\ \frac{1}{2}+x=1 \text{ y } x=\frac{1}{2},$$

y luego observamos que $f'(x)<0$ para $x\in[0,\frac{1}{2})$ y $f'(x)>0$ para $x\in(\frac{1}{2},2]$, de manera que decrece hasta $x=\frac{1}{2}$ y a partir de ahí crece. En $x=\frac{1}{2}$ alcanza su mínimo absoluto.

c) El mínimo absoluto de $f(x)$ es $f(1/2)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln(\frac{1}{2}+t)\right)^3\,dt,$

La regla del trapecio con $n=5$ se aplicaría así:

$h=\frac{1/2}{5}=0{,}1$ y siendo la partición del intervalo $x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$, $x_4=0.4$ y $x_5=0.5$, obteniéndose

$T_5=\frac{0{,}1}{2}(f(0)+f(0{,}5))+0{,}1(f(0{,}1)+f(0{,}2)+f(0{,}3)+f(0{,}4))=$
$0{,}05(-0{,}3330246519889294+0)+$
$0{,}1(-0{,}1332962777189353-0{,}04537512191920206-0{,}01111099677894066-0{,}00116959004327433 4)$
$=-0{,}0357464312454817.$

4. Sea R la región limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ e $y = \dfrac{1}{9x}$.

   a) Calcula el área de R.

   b) Calcula el volumen del sólido que se genera cuando R gira alrededor del eje x.

   a) Calculamos los puntos de corte de las curvas $y = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ e $y = \dfrac{1}{9x}$ resolviendo la ecuación $\dfrac{1}{(2x+1)^2} = \dfrac{1}{9x}$ que tiene soluciones $x = 1/4$ y $x = 1$. Sustituyendo por ejemplo $x = 1/2$ comprobamos que $\dfrac{1}{(2x+1)^2} > \dfrac{1}{9x}$ en el intervalo $(1/4, 1)$ de manera que el área de R se calcula mediante la siguiente integral:

$$A_R = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{9x} \right) dx = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{9} \ln|x| \right) \Bigg|_{x=1/4}^{x=1} = \frac{1}{6} - \frac{\ln 4}{9} \approx 0{,}01263396.$$

   b) Al ser un sólido de revolución de una región R limitada por dos curvas, las secciones transversales serán coronas circulares cuyo radio interior vendrá dado por la curva que está más cerca del eje x, $r_x = \dfrac{1}{9x}$ y el superior por la que está más lejos, $R_x = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$. Y así el volumen pedido se calcula mediante la siguiente integral:

$$V = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \pi \left(\left(\frac{1}{(2x+1)^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{9x} \right)^2 \right) dx = \pi \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{1}{(2x+1)^4} - \frac{1}{81x^2} \right) dx =$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{6(2x+1)^3} + \frac{1}{81x} \right) \Bigg|_{x=1/4}^{x=1} = \frac{\pi}{162} \approx 0{,}01939255.$$