

**CÁLCULO I ( 1º GIEAI). CURSO 2016-17.**  
**SOLUCIONES PRÁCTICA BLOQUE 3: Transformada de Laplace, Sucesiones y Series.**

1. Estudia para qué valores de  $p \in \mathbb{R}$  se verifica que las siguientes integrales son convergentes:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$     (b)  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$     (c)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

(a)  $p > 1$     (b)  $p < 1$     (c) Siempre es divergente

2. Calcula las integrales impropias que converjan:

(a)  $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$     (b)  $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$     (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$   
 (d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$     (e)  $\int_{-\infty}^1 \cos(\pi x) dx$     (f)  $\int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$   
 (g)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$     (h)  $\int_0^{\infty} \cos^2 x dx$     (i)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx$

(a) 1    (b) -1    (c) 2  
 (d)  $\frac{\pi}{2}$     (e) no converge    (f) 4  
 (g) 2    (h) no converge    (i)  $\pi$

3. Comprueba que la siguiente integral impropia converge:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \cos^2 x}{x^3 + 1} dx$$

Basta observar que  $\cos^2 x \leq 1$  y  $\frac{x}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^2}$ , y utilizar el teorema de comparación.

4. Encuentra las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

(a)  $t + 4$     (b)  $a + bt + ct^2$     (c)  $4t^3 + t^2$   
 (d)  $ce^{-at+b}$     (e)  $\sin \pi t$     (f)  $\cos(\omega t + \theta)$   
 (g)  $\sin^2 t$     (h)  $\cos^2 \omega t$     (i)  $e^{-t} \cos t$

- Los apartados a) ...e) se resuelven aplicando el principio de linealidad para la transformada de Laplace y las transformadas que aparecen en la tabla. Fíjate en que  $ce^{-at+b} = ce^b e^{-at}$ .
- Para f) utiliza que  $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$ . Para g) y h) es necesario tener en cuenta que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

- - -

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$s + a$      $s^2 + \pi^2$      $s^2 + \omega^2$

5. Halla la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a)  $1 - 2u(t - 1)$       (b)  $te^{-t}$       (c)  $7e^{-5t}u(t - 6)$   
 (d)  $e^{2\pi t} \cos(2\pi t)$       (e)  $(t - \beta)u(t - c)$       (f)  $u(t - 2\pi) \sin t$

- a) usar linealidad y la transformada de la función escalón.
- b) análogo al apartado i) del ejercicio anterior.
- c) por linealidad  $\mathcal{L}(7e^{-5t}u(t - 6)) = 7\mathcal{L}(e^{-5t}u(t - 6))$ . Tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}(u(t - 6)) = \frac{1}{s}e^{-6s}$$

y usamos la primera fórmula de traslación:  $F(s - (-5)) = \frac{1}{s + 5}e^{-6(s+5)}$ . No olvides multiplicar por 7.

- d) hay que utilizar la primera fórmula de traslación.
- e) Pensando en usar la segunda fórmula de traslación, suma y resta  $c$  dentro del paréntesis:

$$(t - \beta)u(t - c) = (t - c - \beta + c)u(t - c) = (t - c)u(t - c) + (c - \beta)u(t - c)$$

y usa el principio de linealidad.

- f) ayuda:  $\sin(t) = \sin(t - 2\pi)$  y usar la segunda fórmula de traslación.

(a)  $\frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s}$       (b)  $\frac{1}{(s + 1)^2}$       (c)  $\frac{7}{s + 5}e^{-6(s+5)}$   
 (d)  $\frac{s - 2\pi}{(s - 2\pi)^2 + 4\pi^2}$       (e)  $e^{-cs} \left( \frac{1}{s^2} + \frac{c - \beta}{s} \right)$       (f)  $\frac{1}{s^2 + 1}e^{-2\pi s}$

6. Encuentra la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

(a)  $-3\frac{s + 5}{s(s + 3)}$       (b)  $\frac{s - 2}{s^2 + 1}$   
 (c)  $-\frac{2s^3 + s^2 - 3}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + 1)}$       (d)  $\frac{1}{s}(e^{-\alpha s} - e^{-\beta s})$

A la vista de la tabla de transformadas inversas, en a), b) y c) los cocientes hay que escribirlos como suma de fracciones simples. En d) hay que usar la transformada inversa de la función escalón.

- Por ejemplo, en a)

$$\frac{s + 5}{s(s + 3)} = \frac{5/3}{s} + \frac{-2/3}{s + 3}$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left(-3\frac{s + 5}{s(s + 3)}\right) = -3\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/3}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2/3}{s + 3}\right)\right) = -5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + 3}\right)$$

y de ahí se tiene la solución que aparece abajo.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(c)  $x' = -x + u(t - 1), x(0) = 0$       (d)  $x' = bx + ate^{bt}, x(0) = x_0$

8. Usa la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de valor inicial:

(a)  $x'' + 3x' + 2x = e^{-3t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$     (b)  $x'' + \frac{1}{2}x' + x = \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$

(a)  $x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t}$     (b)  $x(t) = -\frac{8\sqrt{15}}{15}e^{-\frac{1}{4}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) + 2 \operatorname{sen} t$

9. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

(a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 1}{n^2 + 1}$     (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1}$     (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 e^{-n}$

(d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n} - n)$     (e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$     (f)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{4n + 1}{3n - 1}\right)$

(g)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n^2 + 3) - \ln(n^2 + 1))$     (h)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3^n + 1}$     (i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{n}$

(a)  $\text{diverge a } +\infty$     (b) 0    (c) 0    (d)  $-\frac{1}{2}$     (e)  $e^{-5}$

(f)  $\ln \frac{4}{3}$     (g) 0    (h) 0    (i) no tiene límite

10. Utiliza el teorema de compresión para calcular el límite de las siguientes sucesiones:

(a)  $\left\{\frac{4^n}{n!}\right\}$     (b)  $\left\{\frac{a^n}{n!}\right\}$  con  $a \in \mathbb{R}$     (c)  $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

(a) Para todo  $n > 4$  se tiene  $0 < \frac{4^n}{n!} < \frac{4^4}{4!} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4}$  y como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^4}{4!} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} = 0$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n!} = 0$ .

(b) Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > |a|$  se tiene entonces  $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| < \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N}$  y como

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N} = 0$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

(c) Para todo  $n \geq 1$  se tiene  $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$  y como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  se tiene  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

11. Dadas las siguientes sucesiones estudia si son monótonas:

(a)  $\left\{\frac{3+n}{n}\right\}$     (b)  $\left\{\frac{e^n}{n^5}\right\}$     (c)  $\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}$     (d)  $\{n^2 + (-1)^n n\}$

(a) decreciente ;    (b) no monótona ;    (c) creciente ;    (d) creciente .

12. Sea  $S = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$ .

a) Define por recurrencia una sucesión cuyos términos sean los elementos de  $S$ .

b) Demuestra, por inducción, que la sucesión es creciente y que 2 es una cota superior.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

■ Si es cierto para  $n$  también lo es para  $n + 1$ :

si  $a_{n-1} < a_n$  entonces  $\sqrt{2} \cdot a_{n-1} < \sqrt{2} \cdot a_n$  luego  $a_n < a_{n+1}$ .

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.

Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

**Cartagena99**

**2 es una cota superior:**

- Es cierto para  $n = 1$ :  $a_1 = \sqrt{2} < 2$ .
- Si es cierto para  $n$  también lo es para  $n + 1$ :  
si  $a_n < 2$  entonces  $\sqrt{2 \cdot a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$  luego  $a_{n+1} < 2$ .

c) La sucesión es convergente puesto que es monótona y acotada.

Su límite  $L$  verifica  $L = \sqrt{2 \cdot L}$  luego  $L = 2$ .

d) Como la sucesión es creciente  $\sqrt{2}$  es una cota inferior de  $S$  y su límite 2 una cota superior, luego  $S$  está acotado. El mínimo de  $S$  es  $\sqrt{2}$  y máximo no tiene.

e)  $S$  está acotado, si  $a > 1$  entonces el mínimo de  $S$  es  $\sqrt{a}$  y no tiene máximo, y si  $a < 1$  no tiene mínimo y el máximo es  $\sqrt{a}$ .

13. Sea  $S = \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots \right\}$ . ¿Está  $S$  acotado? ¿Tiene mínimo y máximo?

$S$  está acotado. El mínimo de  $S$  es  $\sqrt{2}$  y máximo no tiene.

14. Determina si la serie converge o diverge. Si converge calcula su suma:

- |  |   |  |   |
|--|---|--|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}$            | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$            | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4}$                          | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ |
| (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{7}{6^{n-1}}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$    |
| (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+2}}{7^{n-1}}$      | (j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$               | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$                    | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } n$                   |

- |                      |                   |                   |                         |
|----------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| (a) $\frac{5}{2}$    | (b) $\frac{1}{2}$ | (c) Diverge       | (d) $\frac{4}{7}$       |
| (e) 6                | (f) Diverge       | (g) $\frac{1}{4}$ | (h) $\frac{e}{\pi - e}$ |
| (i) $\frac{7}{3}4^3$ | (j) $\frac{3}{4}$ | (k) $\frac{1}{6}$ | (l) Diverge             |

15. Escribe los siguientes números con desarrollo decimal periódico en forma de fracción de números enteros:

- (a) 5,37373737...    (b) 0,159159159...    (c) 0,451141414141...

- (a)  $\frac{532}{99}$     (b)  $\frac{159}{999}$     (c)  $\frac{44663}{99000}$

16. Determina, mediante el criterio de la integral, si la serie converge o diverge.

- |  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+2n)^{3/2}}$ |
|--|--|---|--|



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

La serie converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$ .

18. Determina, mediante los criterios de comparación, si la serie converge o diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^4 + 9n^2} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{1 + \sqrt{n}} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3}}{5n^2 + n - 1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \operatorname{sen}^2 n}{1 + n^2} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-1/2}}{2 + \operatorname{sen}^2 n} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^n}{5^n + 2} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+4)}$$

(a) Convergente    (b) Convergente    (c) Divergente    (d) Divergente  
 (e) Convergente    (f) Divergente    (g) Convergente    (h) Divergente

19. Determina, mediante los criterios del cociente o la raíz, si la serie converge o diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n^{50} e^{-n} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \ln n}{2^n} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n-1}}{n^n} \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{ne}{2n+3} \right)^n \quad (k) \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n}{\ln n} \right)^n \quad (l) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{5}{2n+3} \right)^{n^2}$$

(a) Convergente    (b) Convergente    (c) Divergente    (d) Convergente  
 (e) Convergente    (f) Divergente    (g) Divergente    (h) Los criterios no deciden  
 (i) Convergente    (j) Divergente    (k) Divergente    (l) Convergente

20. Determina, usando el criterio adecuado, si la serie converge o diverge.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n}{2n^3 + 3n^2 + 1} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/n}}{n^3} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 3n^2}{3^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 7}{n+1} \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \sqrt[3]{n+1}} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{n-1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{3^n}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n^2}{2n+4n^2} \right)^n \quad (j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 4^n} \quad (k) \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \cdots \quad (l) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$$

$$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad (n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{n-2}}{3^n} \quad (\tilde{n}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad (o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^3}$$

(a) Divergente    (b) Convergente    (c) Divergente    (d) Convergente  
 (e) Convergente    (f) Convergente    (g) Convergente    (h) Convergente  
 (i) Divergente    (j) Convergente    (k) Divergente    (l) Divergente  
 (m) Convergente    (n) Divergente    ( $\tilde{n}$ ) Convergente    (o) Divergente

21. Determina si las siguientes series alternadas convergen o divergen.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k}{4^k}$$

23. Determina si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n}$  (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2}$  (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi)}{n^3}$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$   
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5^n}$  (g)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n^2+1) \ln n}$  (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

- (a) Cond. conv. (b) Divergente (c) Absol. conv. (d) Cond. conv.  
 (e) Cond. conv. (f) Absol. conv. (g) Cond. conv. (h) Cond. conv.

24. La serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  converge para  $x = -3$  y diverge para  $x = 4$ . Justifica si convergen o divergen las siguientes series:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 5^n$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n$  (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(-\frac{3}{2}\right)^n$  (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 6^n$

- (a) Divergente (b) Convergente (c) Convergente (d) Divergente

25. Encuentra el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$  (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$   
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  (f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  (g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$  (h)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$   
 (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$  (j)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$  (k)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{n^2+4}$  (l)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$

- (a) 1, [-1, 1] (b)  $\infty, (-\infty, \infty)$  (c)  $\frac{1}{5}, [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$  (d) 1, [-1, 1]  
 (e) 1, (-1, 1] (f)  $\infty, (-\infty, \infty)$  (g)  $\infty, (-\infty, \infty)$  (h) 1, [-1, 1]  
 (i) 1, (-2, 0] (j)  $\frac{4}{3}, (-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3})$  (k) 1, [-2, 0] (l)  $\infty, (-\infty, \infty)$

26. Encuentra la representación mediante serie de potencias de las siguientes funciones y determina su intervalo de convergencia:

(a)  $f(x) = \frac{x}{1-x}$  (b)  $f(x) = \frac{1}{x^4+16}$  (c)  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  (d)  $f(x) = \ln(1-x)$

(a)  $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, (-1, 1)$ .

(b)  $\frac{1}{x^4+16} = \frac{1}{16} \left( \frac{1}{1 + \frac{x^4}{16}} \right) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^4}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{16^{n+1}}, (-2, 2)$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

27. Evalúa la integral indefinida como serie de potencias

(a)  $\int \frac{x}{1+x^5} dx$       (b)  $\int \operatorname{atan}(x^2) dx$

(a) 
$$\int \frac{x}{1+x^5} dx = \int x \frac{1}{1-(-x^5)} dx = \int (x - x^6 + x^{11} + x^{16} + \dots) dx$$

$$= C + \frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{17}}{17} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2+5n}}{2+5n}$$

(b) 
$$\int \operatorname{atan}(x^2) dx = \int (x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \dots) dx$$

$$= C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3 \cdot 7} + \frac{x^{11}}{5 \cdot 11} - \frac{x^{15}}{7 \cdot 15} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3+4n}}{(1+2n)(3+4n)}$$

28. Encuentra el polinomio de Mclaurin de 4º grado de las funciones:

(a)  $f(x) = e^{-2x}$       (b)  $f(x) = \operatorname{tg} x$       (c)  $f(x) = e^x \cos x$

(d)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$       (e)  $f(x) = \sqrt{1+x}$       (f)  $f(x) = \ln(3+2x)$

(a)  $1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$       (b)  $x + \frac{1}{3}x^3$       (c)  $1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$

(d)  $-1 + x - 3x^2 + x^3$       (e)  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$       (f)  $\ln 3 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{81}x^3 - \frac{4}{81}x^4$

29. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3 con centro en  $x = a$  de las funciones:

(a)  $f(x) = e^x; a = 1$       (b)  $f(x) = \sqrt{x}; a = 4$       (c)  $f(x) = \ln x; a = 1$       (d)  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x); a = -\frac{1}{3}$

(a)  $e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$       (b)  $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$

(c)  $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$       (d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{4} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\pi^3}{12} \left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

30. Encuentra la serie de Mclaurin de las funciones:

(a)  $f(x) = e^{-x}$       (b)  $f(x) = e^{ax}$       (c)  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$       (d)  $f(x) = \ln(1-x)$

(a)  $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$       (b)  $1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!}$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

(a)  $-\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$       (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n!}$       (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n$       (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2n}$

32. Para las siguientes funciones

a) Escribe la fórmula del resto  $R_n(x)$  para los valores dados de  $a$  y  $n$ .

b) Encuentra el máximo intervalo abierto en el que la fórmula del resto es válida.

(a)  $f(x) = e^{2x}$ ;  $a = 0$ ;  $n = 5$       (b)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ;  $a = 0$ ;  $n = 4$       (c)  $f(x) = xe^x$ ;  $a = 0$ ;  $n = 3$

(d)  $f(x) = \operatorname{atan} x$ ;  $a = 0$ ;  $n = 2$       (e)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $a = 4$ ;  $n = 3$       (f)  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ;  $a = \frac{\pi}{6}$ ;  $n = 4$

(a)  $\frac{2^6 e^{2c}}{6!} x^6$ ;  $(-\infty, \infty)$       (b)  $-\frac{x^5}{(c+1)^6}$ ;  $(-1, \infty)$       (c)  $\frac{(4+c)e^c}{4!} x^4$ ;  $(-\infty, \infty)$

(d)  $-\frac{1-3c^2}{3(1+c^2)^3} x^3$ ;  $(-\infty, \infty)$       (e)  $-\frac{5}{128c^{7/2}}(x-4)^4$ ;  $(0, \infty)$       (f)  $\frac{\cos c}{5!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^5$ ;  $(-\infty, \infty)$

33. Prueba que la serie de Maclaurin de  $f(x) = \cos x$  converge a  $\cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

34. Prueba que la serie de Taylor de  $f(x) = e^x$  con centro en  $a = 1$  converge a  $e^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} |x-1|^{n+1} \leq \max\{e^x, e\} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

35. Prueba que la serie de Taylor de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  con centro en  $a = \frac{\pi}{4}$  converge a  $\operatorname{sen} x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

$$|R_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \left|x - \frac{\pi}{4}\right|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left|x - \frac{\pi}{4}\right|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

36. Utiliza el polinomio de Taylor apropiado, del menor orden  $n$  posible, para calcular valores aproximados de los números que se indican con error menor que  $\epsilon$  dado en cada caso.

Sugerencia: acota el término del resto de la fórmula de Taylor, cuando sea necesario, para determinar el número  $n$  de términos de la suma parcial.

a) El valor del número  $e$  con  $\epsilon = 0,02$  (Nota:  $f(x) = e^x$  y tenemos que aproximar  $f(1)$ ).

b)  $\operatorname{sen}(0,5)$  con  $\epsilon = 0,001$ .

c)  $\ln(0,8)$  con  $\epsilon = 0,001$  (Nota: utiliza la función  $\ln(1-x)$  y  $x = 0,2$ ).

a)  $e \approx 2,71666 \dots \approx 2,717$  (polinomio de grado 5)

b)  $\operatorname{sen}(0,5) \approx 0,4791666 \dots \approx 0,4792$  (polinomio de grado 3)

c)  $\ln(0,8) \approx -0,222666 \dots \approx -0,2227$  (polinomio de grado 3)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70