Prueba evaluable de programación con Maxima

Criterios de evaluación

Cada uno de los ejercicios que componen esta prueba evaluable sobre la primera parte de la asignatura Física Computacional 1 se evaluará, de 0 a 10 puntos, de acuerdo a los siguientes criterios de evaluación:

- El código aportado realiza correctamente las tareas que se pedían en el enunciado, cálculos simbólicos y/o numéricos, representaciones gráficas, etc., (sin errores sintácticos): **5 puntos**
- El código está bien estructurado, se entiende claramente lo que se hace en cada parte del mismo, la estructura es lógica y está ordenada: **2 puntos**
- El código realiza las tareas que se piden de manera eficiente, las funciones pedidas están programadas correctamente, evitando el uso de variables globales: **1.5 puntos**
- El código está documentado con comentarios que facilitan entender qué es lo que se está haciendo en cada parte del mismo, incluyendo descripción del *input* y *output* y la finalidad del código: **1.5 puntos**

La calificación final de esta parte será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en todos los ejercicios que forman esta prueba, siempre y cuando se haya obtenido una calificación mínima de 5 puntos en todos ellos. Si uno (o más) de los ejercicios propuestos no alcanzan la calificación mínima de 5 puntos la calificación global de la prueba será *suspenso*, y no se calculará la media.

Nota:

- Es muy importante darse cuenta de que lo que se pide en cada uno de estos ejercicios es la programación de una *función*, no la resolución de un problema concreto.
- En la medida de lo posible ajústese al input y output especificado en cada ejercicio (aunque puede introducir pequeñas modificaciones si lo considera preciso, en ese caso introduzca una breve frase explicando las modificaciones introducidas).
- Muy importante, evite la definición de *variables globales* fuera de estas funciones.

- También le recomendamos que, antes de realizar estos ejercicios, revise la colección de problemas resueltos que puede encontrar en la página de la asignatura, así como las soluciones de las pruebas evaluables anteriores.

En la PEC de Maxima de este curso vamos a abordar el tema del análisis de *errores* o *incertidumbres* en medidas experimentales, tanto directas como indirectas. Esperamos que el código que realicen para esta PEC les sea útil en todas las aisgnaturas de Técnicas Experimentales de la titulación.

Errores o incertidumbres en medidas directas

Cuando se realiza una medida directa la incertidumbre de dicha medida está dada por la precisión del aparato de medida. Por ejemplo, si medimos una longitud con una regla (pongamos $L = 15\text{cm}$) lo normal es que la división más pequeña sea "milímetros", de modo que la precisión que podemos asegurar con este instrumento de medida son milímetros. En este caso, la manera correcta de reportar el resultado de la medida sería

$$L = 15{,}0 \pm 0{,}1\text{cm}$$

Con frecuencia es conveniente emplear el Sistema Internacional de unidades, en ese caso la forma correcta de reportar el resultado de esta medida sería

$$L = 0{,}150 \pm 0{,}001\text{m}$$

Aunque parezca algo trivial, la anterior forma de escribir resultados tiene varios aspectos de gran importancia, que conviene resaltar:

- El resultado de una medida se escribe con la forma general

  $$\text{medida} = \text{valor} \pm \text{incertidumbre unidades}$$

  donde, por supuesto, las unidades de la incertidumbre coinciden con las del valor de la medida.

- El error o incertidumbre asociado a la medida tiene una única cifra significativa (que en este caso vale 1).

- El valor de la medida ha sido redondeado hasta el nivel de precisión indicado por la incertidumbre asociada a esta medida. Es muy importante darse cuenta de que no es correcto proporcionar un resultado con *menos* precisión que la indicada en el error o incertidumbre (como p. ej. $L = 15 \pm 0{,}1\text{cm}$). Por el mismo motivo es incorrecto reportar un resultado con una precisión *mayor* que la indicada en el error o incertidumbre (p. ej., el resultado $L = 15{,}011223344 \pm 0{,}1\text{cm}$ sería inadmisible). Esto último se llama *precición ficticia* y es un error que debemos evitar al reportar resultados de medidas, tanto directas como indirectas.

Errores o incertidumbres en medidas indirectas

Parece algo bastante natural que el error o incertidumbre asociado a una medida directa sea la precisión del aparato de medida, pero ¿cómo se calcula la incertidumbre de una medida indirecta?

Supongamos que la magnitud F se calcula como una determinada función A de las variables x, y, z, las cuales se miden directamente. Esto convierte a F, dada por

$$F = A(x, y, z)$$

en una *medida indirecta*. Para calcular el error o incertidumbre asociado a F, que llamaremos ε, se aplica la *teoría de propagación de errores*, que consiste sencillamente en realizar un desarrollo en serie de Taylor a orden unidad para calcular la *varianza* (o desviación cuadrática media) de $A(x, y, z)$ suponiendo que sus argumentos tienen desviaciones cuadráticas medias dadas por sus incertidumbres correspondientes (ε_i) *al cuadrado*. Si suponemos que las variables independientes x, y, z son *estadísticamente independientes*, es decir, que no existe correlación entre ellas, entonces los errores introducidos por cada una de estas variables no están afectados por los errores de las otras y en estas condiciones la desviación cuadrática media de $A(x, y, z)$, que llamaremos ε^2, es sencillamente la suma de las desviaciones cuadráticas medias inducidas por cada una de sus variables, es decir:

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_z^2$$

siendo ε_x, ε_y, ε_z, los errores o incertidumbres asociados a las variables de las que depende la función que determina F. El resultado general para una función arbitraria, dependiente de n variables x_i con errores asociados ε_i, sería

$$F = A(x_1, \ldots, x_n), \qquad \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)^2 \varepsilon_i^2$$

Una vez realizado el cálculo que define la *varianza*, o *desviación cuadrática media*, ε^2, aún quedan por realizar dos operaciones:

- El error o incertidumbre asociado a la medida indirecta F se calcula como la raíz cuadrada de su desviación cuadrática media
$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2}$$

- Debemos **redondear** el resultado, de modo que evitemos incurrir en *precisión ficticia*. Si usamos un ordenador para realizar los cálculos anteriores lo normal es que este opere con un número elevado de dígitos (entre 16 y 21) y que nos muestre el resultado de estos cálculos con un número de cifras significativas alto (entre 10 y 12), de las cuales solo una, o en algunas ocasiones dos, tienen significado, el resto debe redondearse.

- Una vez hemos calculado la incertidumbre ε y hemos redondeado correctamente este número, debemos redondear el valor de $F = A(x_1, \ldots, x_n)$ de forma que tenga una precisión dada por su error, tal y como hacíamos con la medida directa $L = 0{,}150 \pm 0{,}001$m más arriba.

Cifras significativas y redondeos

Al realizarse la medición de una magnitud física nuestro objetivo es presentar el resultado final de la forma

$$\text{magnitud} = X^* \pm \varepsilon \text{ unidades}$$

donde X^* es el *valor aceptado* o *esperado* de la magnitud resultado de la medición y ε es una estimación del *error absoluto* o *incertidumbre* cometido. De esta manera se está suponiendo implícitamente que el valor verdadero X_V de la magnitud verifica

$$X_V \in (X^* - \varepsilon, X^* + \varepsilon)$$

A la hora de escribir resultados de medidas estos resultados deben reportarse con una precisión, es decir, con un número de cifras significativas, acorde con el error o incertidumbre correspondiente, para ello:

- **la última cifra significativa del valor esperado y la última cifra significativa del error han de ser del mismo orden decimal.**

Dado un número escrito en forma decimal, sus *cifras significativas* son todas aquellas distintas de cero. Un cero es una cifra significativa si:

- está situado entre dígitos no nulos, p. ej. 0,0**100205** (6 cifras significativas)
- está situado detrás de dígitos no nulos y a la derecha de la coma decimal, p. ej. **10,230** (5 cifras significativas)
- en el caso de números enteros, si está situado detrás de dígitos no nulos y se ha escrito la coma decimal explícitamente, p. ej.:

  1200, (4 cifras significativas) **12**00 (2 cifras significativas)

donde en la anterior lista de números se han resaltado en negrita aquellas cifras que son significativas.

A la hora de escribir resultados de medidas debemos aplicar **siempre** estas reglas de redondeo;

- El error ha de tener **una única cifra significativa**, excepto si la primera cifra significativa del error es un 1, en cuyo caso se acepta que se incluya una segunda cifra significativa.
- Se procurará expresar los resultados en notación científica, para así evitar la posible ambigüedad que surgiría en el caso que la última cifra significativa fuese un cero.
- El resultado ha de estar acompañado por las unidades correspondientes a la magnitud física que se ha medido.

De esta manera, tras la realización de una medida (valor esperado y error absoluto), se redondeará el error absoluto para que quede expresado con una única cifra significativa, o dos si la primera es un 1. Hecho esto queda determinado el orden de la última cifra significativa del valor esperado, redondeándose éste en consecuencia. Incluimos a continuación algunos ejemplos correpondientes a la medida de distintas masas:

$$1,23782 \pm 0,074 \text{ kg} \rightarrow \boxed{1,24 \pm 0,07 \text{ kg}}$$

$$0,087214 \pm 0,0001256 \text{ kg} \rightarrow \boxed{0,08721 \pm 0,00013 \text{ kg}} \rightarrow \boxed{(87,21 \pm 0,13) \times 10^{-3} \text{ kg}}$$

$$1276,23 \pm 31,456 \text{ kg} \rightarrow \boxed{1280 \pm 30 \text{ kg}} \rightarrow \boxed{(1,28 \pm 0,03) \times 10^{3} \text{ kg}}$$

$$1280,23 \pm 3,1456 \text{ kg} \rightarrow \boxed{1280, \pm 3 \text{ kg}} \rightarrow \boxed{(1,280 \pm 0,003) \times 10^{3} \text{ kg}}$$

Este es el resumen de reglas básicas sobre tratamiento de errores y presentación de resultados de medidas experimentales que deberán aplicar en todas las asignaturas de Técnicas Experimentales (I, II, III y IV) del grado. Para la PEC de MAXIMA de este curso deberán programar algunas funciones que les serán útiles posteriormente en dichas asignaturas.

Ejercicio 1

Programe una función que aplique las anteriores reglas de redondeo para calcular el valor correctamente redondeado del error ε de una medida indirecta.

input:
- Valor de ε *sin redondear*.

output:
- Valor de ε *redondeado*.

Ejercicio 2

Dada la medida indirecta $F = A(x_1, \ldots, x_n)$, donde las variables independientes tienen errores o incertidumbres dados por ε_i, programe una función que proporcione el error o incertidumbre de F redondeado correctamente

input:
- Función $A(x_1, \ldots, x_n)$.
- Lista de variables independientes $[x_1, \ldots, x_n]$.
- Lista de incertidumbres $[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$ asociadas a las variables independientes.

output:
- Valor de la incertidumbre ε asociada a la magnitud F, redondeada correctamente.

Ejercicio 3

Programe una función que haga lo mismo que la del ejercicio 2 pero en el caso en que la magnitud F esté dada de manera implícita por la solución de una ecuación del tipo

$$B(x_1, \ldots, x_n, F) = 0$$

donde suponemos que la solución para F existe y es única, pero no puede despejarse de manera analítica. En este caso el *input* y *output* de la función son similares a los del ejercicio 2, pero en lugar de conocer la función A lo que conocemos es la función B, que define a F por medio de la condición $B = 0$.

Ejercicio 4

Programe una función que realice la representación gráfica de una serie de n puntos (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ en dos dimensiones, mostrando las *barras de error* correspondientes a las abscisas x_i (barras de error horizonatales) y las ordenadas y_i (barras de error verticales). Para programar esta función puede emplear el paquete `draw` y la función `draw2d`.

input:
- Lista de puntos (x_i, y_i) a representar.
- Lista de incertidumbres $\varepsilon(x)_i$ correspondiente a las abscisas.
- Lista de incertidumbres $\varepsilon(y)_i$ correspondiente a las ordenadas.

output:
- Gráfica de los puntos con sus barras de error.