

Cálculo I

Bloque II: Derivación e integración.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2020-21

Rafael Bravo de la Parra

Cálculo I, Bloque II

Rectas tangentes y velocidades

La ecuación de una recta en el plano que pasa por el punto (a, b) y tiene pendiente m es $y = b + m(x - a)$.

Límite del cociente incremental

- Sea $f(x)$ una función continua en a . Si existe el límite

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

entonces la **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por este punto y cuya pendiente es m :

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Derivada de una función en un punto

Definición

La **derivada de la función** $f(x)$ **en el punto** a , denotada $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe.

La derivada por la derecha, $f'_+(a)$, y por la izquierda, $f'_-(a)$, se definen análogamente utilizando, respectivamente, el límite por la derecha y por la izquierda.

Notaciones

$f'(x)$ prima de x , $\frac{dy}{dx}$ derivada de y con respecto a x , y' y prima, y $\frac{d}{dx}(f(x))$ derivada con respecto a x de f de x .

El valor de la derivada en el punto a : $f'(a)$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$, $y'(a)$ y $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=a}$.

Ecuación de la recta tangente

La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a es

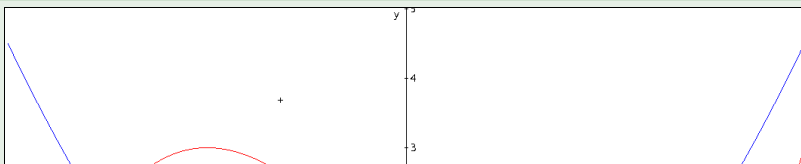
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Función derivada

Definición

La **función derivada** de $f(x)$, denotada $f'(x)$, es la función que tiene por dominio $\text{dom}(f') = \{x \in \text{dom}(f) : f'(x) \text{ existe}\}$ y que a cada x le hace corresponder $f'(x)$.

$$y = f(x) \text{ e } y = f'(x)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Función diferenciable y derivadas de orden superior.

Definición

La función $f(x)$ es **diferenciable en a** si $f'(a)$ existe, y es **diferenciable en un intervalo abierto** (a, b) (donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser ∞) si es diferenciable en todo punto del intervalo.

f es **diferenciable en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , tiene derivada por la derecha en a y derivada por la izquierda en b .

Teorema

Si $f(x)$ es diferenciable en a entonces es continua en a .

Definición (Segunda derivada y derivadas de orden superior.)

La segunda derivada de la función $f(x)$ es la derivada de la función derivada $f'(x)$ y se denota: $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' , y $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$.

En general, la derivada n -ésima de la función $f(x)$ es la derivada de la función derivada $(n-1)$ -ésima y se denota: $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $y^{(n)}$, y $\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$.

Linealización de una función en un punto.

Definición

La linealización de la función $f(x)$ en el punto a es la función polinómica de primer grado:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linealización de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $a = 1$: $L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$

x	f(x) = $\sqrt[3]{x}$	L(x) = $1 + \frac{1}{3}(x - 1)$
0.0	0.0651802846	0.0666666666

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Teorema

Las siguientes funciones son diferenciables:

- 1 Funciones polinómicas y racionales.
- 2 Funciones potenciales en $(0, \infty)$.
- 3 Las funciones raíz salvo en el 0.
- 4 Funciones trigonométricas.
- 5 Función arcotangente. Las funciones arcoseno y arcocoseno salvo en -1 y 1 .
- 6 Funciones exponenciales y logarítmicas.
- 7 La función valor absoluto salvo en el 0.

Derivación y operaciones.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables en el punto a . Entonces también son diferenciables en a las funciones $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y, si $g(a) \neq 0$, $(f/g)(x)$. Además:

- 1 $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- 2 $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- 3 $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \quad \text{Regla de la cadena}$$

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Derivación implícita

Una función se dice que está definida explícitamente cuando podemos escribir las imágenes de los elementos x del dominio de la forma $y = f(x)$.

En ocasiones una función queda definida a través de una relación entre las variables x e y , $F(x, y) = 0$, en este caso se dice que la función está **definida implícitamente**.

Con ayuda de la regla de la cadena se puede encontrar la derivada de la función mediante **derivación implícita** que consiste en considerar y como función de x , $y(x)$, y despejar $y'(x)$ en la expresión:

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$$

Análogamente se puede utilizar la derivación implícita para obtener derivadas de orden superior de la función, por ejemplo la segunda derivada despejando $y''(x)$ a partir de:

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x, y(x)) = 0$$

Aplicaciones de la Regla de la cadena.

Teorema

Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto (a, b) . Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ o $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es uno a uno.

Teorema (Derivada de la función inversa)

Sea f una función diferenciable en el intervalo I y tal que $f'(x) \neq 0$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Derivación logarítmica

La derivación de algunas funciones complicadas, $y = f(x)$, que incluyen productos, cocientes y potencias se puede simplificar utilizando la **derivación logarítmica**:

- 1 Se toman logaritmos en $y = f(x)$, $\ln y = \ln f(x)$, y se simplifica todo lo posible el segundo miembro.
- 2 Se deriva implícitamente la versión simplificada de $\ln y = \ln f(x)$:
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(\ln f(x)).$$
- 3 Y como $\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ se tiene que $\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx}(\ln f(x))$.

Razones de cambio relacionadas

La derivación implícita se utiliza también para encontrar razones (tasas o velocidades) de cambio de variables relacionadas que están cambiando en el tiempo.

- 1 Dentro del problema encontrar las cantidades que cambian en el tiempo y asignarles una variable (dependiente del tiempo, e.d., una función).
- 2 Relacionar las variables implicadas en el problema mediante una

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

en el punto anterior.

Teorema del valor medio.

Teorema (Teorema de Rolle)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Teorema del valor medio)

Si f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Signo de f' y crecimiento de f .

Definición

La función $f(x)$ es **creciente** (decreciente) **en el intervalo** I si, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Teorema

Sea f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) .

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.

Extremos locales y puntos críticos

Definición

- 1 Se dice que la función $f(x)$ tiene un **máximo local o relativo** en c si está definida y verifica que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c .
- 2 Se dice que la función $f(x)$ tiene un **mínimo local o relativo** en c si está definida y verifica que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c .

Los máximos y mínimos locales se denominan extremos locales.

Teorema

Si la función $f(x)$ tiene un extremo local en c , entonces o $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Definición

Sea una función $f(x)$, los puntos c de su dominio para los que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe se denominan **puntos críticos**.

Los extremos locales de una función se alcanzan en puntos críticos.

Extremos locales

Teorema (Criterio de la 1ª derivada)

Supongamos que c es un punto crítico de la función $f(x)$ y que ésta es continua en c .

- 1 Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ entonces en c se alcanza un máximo local.
- 2 Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$ entonces en c se alcanza un mínimo local.
- 3 Si existe $\delta > 0$ tal que el signo de $f'(x)$ se mantiene para $0 < |x - c| < \delta$ entonces en c no se alcanza un extremo local.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Extremos absolutos

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado

Los valores extremos de una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ existen y sólo se pueden alcanzar en sus puntos críticos o en los extremos del intervalo. Procedimiento para encontrarlos:

- 1 Encuentra los puntos críticos c_1, c_2, \dots, c_n de f en el intervalo abierto (a, b) .
- 2 El máximo y el mínimo de los valores $f(a), f(c_1), \dots, f(c_n)$ y $f(b)$ son respectivamente el máximo y el mínimo absolutos de f en $[a, b]$.

Cálculo de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo abierto

Supongamos que f es continua en el intervalo abierto (a, b) donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$.

Los extremos absolutos no tienen por qué existir pero si existen se alcanzarán en puntos críticos. Procedimiento para encontrarlos:

- 1 Calcula, si existen, $f(a_+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $f(b_-) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
- 2 Encuentra los puntos críticos c_1, c_2, \dots, c_n de f en el intervalo abierto (a, b) .
- 3 El máximo (el mínimo) de los valores $f(c_1), \dots, f(c_n)$ es el máximo (respectivamente el mínimo) absoluto de f en (a, b) si es mayor o igual (respectivamente menor o igual) que $f(a_+)$ y $f(b_-)$.

Método de Newton.

Ecuación $f(x) = 0$ con f función derivable.

Algoritmo del Método de Newton:

- 1 Primera aproximación: x_0
- 2 Conocida la aproximación x_n definimos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

- Si la sucesión $\{x_n\}$ converge lo hace hacia una raíz de la ecuación y se pueden aceptar como exactas las cifras decimales que se repiten de un paso al siguiente.
- Si la sucesión $\{x_n\}$ no converge o lo hace hacia una raíz no buscada se debe reiniciar el algoritmo con una mejor primera aproximación x_0 .

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$x_3 = g(x_2) = 0,73908513321516064166, x_4 = g(x_3) = 0,73908513321516064166,$$
$$x_5 = g(x_4) = 0,73908513321516064165 = x_6$$

Regla de L'Hôpital.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en un intervalo abierto que contiene a a , salvo quizá en el propio a , y tal que $g'(x) \neq 0$ para todo x en el intervalo excepto posiblemente en a .

Si se verifica una de las dos condiciones siguientes (indeterminaciones de cociente):

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tanto si el límite del segundo miembro existe como si es $+\infty$ o $-\infty$.

Nota: Se puede sustituir a en el enunciado por a^- , a^+ , $+\infty$ o $-\infty$.

Primitivas de una función.

Definición

Se dice que una función F es una **primitiva** (o antiderivada) de una función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Teorema (Las primitivas de una función difieren en una constante)

$F'(x) = G'(x)$ para todo $x \in [a, b]$ si y sólo si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

Notación de la integral indefinida.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

constante de integración.

Primitivas de una función.

La derivación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas.

$\frac{d}{dx}(\)$ denota la derivación de () respecto a x

$\int (\)dx$ denota la integración de () respecto a x .

Si $\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces F es una primitiva de f , es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

- Una primitiva de la derivada de una función es esa función más una constante:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

- La derivada de una primitiva de una función es esa función:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x)$$

Toda fórmula de derivación nos da la correspondiente fórmula de integración.

Propiedades de la integral indefinida.

Teorema (La integración es lineal.)

Sean $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Entonces

1 $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C$, donde k es una constante.

2 $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + C$

Regla de integración por partes.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables se tiene que:

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Problema del área.

Área A bajo la gráfica de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de la misma longitud $\Delta x = (b - a)/n$, $x_k = a + k\Delta x$ (**partición regular** del intervalo $[a, b]$).
- Se elige un **punto de muestra** x_k^* en cada uno de los subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$. Así $f(x_k^*)\Delta x$ representa el área de un rectángulo de base el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(x_k^*)$.
- Se aproxima el área A mediante la suma de las áreas de los n rectángulos:

$$A \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

Definición

Sea f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. El área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ se define como

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x$$

Integral definida: Sumas de Riemann.

Sumas de Riemann de una función $y = f(x)$ en $[a, b]$

Suponemos f función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$.

- Se divide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitudes $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, donde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Esta colección de números se denomina **partición** del intervalo $[a, b]$ y se denota por P .

- Sea $\|P\|$ la mayor de las longitudes Δx_k de los intervalos que se denomina **norma** de la partición P .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Integral definida: definición.

Definición (Integral definida)

Sea f función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$. La **integral definida** de f en $[a, b]$ se define, si el límite existe, como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

En este caso se dice que f es **integrable** en $[a, b]$. Los números a y b se denominan, respectivamente, **límite inferior** y **límite superior** de la integral y la función f es el **integrand**.

Teorema (Condiciones suficientes de integrabilidad)

- Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f es acotada en $[a, b]$ y sólo tiene un número finito de discontinuidades entonces f es integrable en $[a, b]$.

Corolario

Sea f continua en $[a, b]$ y tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el área A bajo la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$ es

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida.

Definición (Límites de integración)

- Si a está en el dominio de f entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si f es integrable en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Teorema (Linealidad)

Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$.

- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propiedades de la integral definida.

Teorema (Integral definida de una constante)

Para cualquier constante k

$$\int_a^b k dx = k(b - a).$$

Teorema (Propiedades de comparación)

Sea f una función integrable en $[a, b]$.

- Si $m \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx$.
- Si $f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Teorema fundamental del Cálculo.

Teorema (Teorema fundamental del Cálculo)

Sea f una función continua en $[a, b]$. La función g definida para todo $x \in [a, b]$ como:

$$g(x) = \int_a^x f(s) ds.$$

es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g'(x) = f(x)$, es decir, g es una **primitiva** de f .

Corolario

Sean α y β continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , y f continua en un intervalo que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Propiedades de la integral definida.

Regla de sustitución

Sea $u = g(x)$ una función cuya derivada es continua en el intervalo $[a, b]$ y sea f una función continua en el rango de g , entonces si $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$ se tiene que:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Regla de integración por partes.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $[a, b]$ con f' y g' continuas en $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

Aplicaciones de la integración: Áreas y volúmenes.

Definición (Área entre dos curvas)

El área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones integrables en $[a, b]$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Definición (Volumen de un sólido a partir del área de sus secciones)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$\int_a^b f(x) dx$

Aplicaciones de la integración: Longitud de un arco de curva.

Definición (Longitud de un arco de curva)

Sea la curva $y = f(x)$, donde f es una función con derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Si la curva está definida paramétricamente como $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $t \in [a, b]$, con f y g funciones con derivada continua en $[a, b]$, entonces la longitud del arco de la curva entre los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Rafael Bravo de la Parra

Cálculo I, Bloque II

Aplicaciones de la integración: Valor medio de una función.

Definición (Valor medio de una función en un intervalo)

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ se define el valor medio de f en $[a, b]$ como:

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema (Teorema del Valor Medio para integrales)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.