

Ejercicios del tema 5

- (1) (*) Para las matrices reales

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) calcula sus autovalores y sus autovectores;
- (b) decide si son diagonalizables;
- (c) en caso de que sean diagonalizables, encuentra una matriz invertible P tal que $P_i^{-1} A_i P_i$ sea una matriz diagonal.

- (2) Demuestra que la matriz real

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$. (Ind. Deberás utilizar algún teorema de Cálculo)

- (3) (*) Decide si las matrices reales

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

son diagonalizables sobre $\mathbf{R}$ y sobre $\mathbf{C}$. Para aquella A_i que lo sea halla una matriz diagonal D_i semejante a ella y una matriz invertible Q_i tal que $Q_i^{-1} D_i Q_i = A_i$.

- (4) Halla los autovalores y los autovectores de los endomorfismos f_1, f_2 y f_3 de $\mathbf{R}^3$ dados por
- (a) (*) $f_1(x, y, z) = (x, x + 2y + z, -x - y)$
 - (b) $f_2(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z)$
 - (c) (*) $f_3(x, y, z) = (2y - z, 2x - z, 2x - y)$
- y decide si son endomorfismos diagonalizables.

- (5) (*) Consideramos el endomorfismo de
- $\mathbf{R}^2$
- dado por

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 3y, 3x - 4y).$$

- (a) Halla los autovalores y los autovectores de f .
- (b) ¿Es f diagonalizable? En caso de que lo sea, halla una base B tal que $M_B f$ sea diagonal.
- (c) Describe f geométricamente.

- (6) (*) Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbf{R}$?

(b) ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbf{C}$?

(7) (*) Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Es f diagonalizable?

(b) En caso de que f sea diagonalizable, halla una base B formada por autovectores de f y halla $M_B f$.

(8) Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial real V de dimensión 3 y sea f el endomorfismo de V dado por

$$f(u_1) = u_1 + u_2, \quad f(u_2) = 2u_1, \quad \text{Ker } f = L(u_1 + u_3).$$

Halla:

(a) La matriz de f respecto de la base B .

(b) La imagen de f y su rango.

(c) Los autovalores de f .

(d) Una base B' , escrita en función de B , respecto de la cual la matriz de f sea diagonal.

(e) La matriz del cambio de base de B a B' .

(9) Estudia para qué valores de los parámetros α, β y γ son diagonalizables las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(10) (*) Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V . Demuestra que f es un automorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f .

(11) (*) Consideramos los subespacios vectoriales U y W de $\mathbf{R}^4$ dados respectivamente por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x & -y & +z & -t & = & 0 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & & +2z & = & 0 \end{cases}.$$

Demuestra que existe un endomorfismo f de $\mathbf{R}^4$ cuyos valores propios son 1 y 2 y con subespacios propios $V_1(f) = W$ y $V_2(f) = U$. ¿Es f único?

(12) Halla A^{33} , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(13) Sean $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$x_{n+1} = 6x_n - y_n, \quad y_{n+1} = 3x_n + 2y_n$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Partiendo de los datos iniciales $x_1 = 1, y_1 = -1$, calcula el valor de $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$. Indicación: considera la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- (14) (*) Consideramos la población de cierto país, que dividimos en tres clases: alta, media y baja. Las probabilidades de que una persona cambie de clase o no al cabo de un año dependen solo de la clase a la que ha pertenecido durante el año y son las mismas todos los años. Concretamente

- la probabilidad de seguir siendo de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase alta es 0 ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase media es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase baja es 0 ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase baja es $1/2$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase baja es $1/2$.

Podemos usar la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

para estudiar la evolución de la distribución de la población del país como sigue. Si el número de habitantes de clase alta después de n años es x_n , el número de habitantes de clase media después de n años es y_n y el número de habitantes de clase baja después de n años es z_n , entonces obtenemos $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ a partir de x_n, y_n, z_n así:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Este tipo de proceso es un ejemplo de *cadena de Markov* y a la matriz T se la llama *matriz de transición*. Observa que las entradas de cada columna de T son probabilidades y suman 1. Por ello se dice también que T es una matriz *estocástica*.

- (a) Calcula los autovalores y los autovectores de T . ¿Es T diagonalizable?
- (b) Encuentra, si es posible una matriz real 3×3 invertible Q y una matriz real 3×3 diagonal D tal que $T = Q^{-1}DQ$.
- (c) Halla T^n para todo $n \in \mathbf{N}$.
- (d) Supongamos que este año el país tiene 16 millones de habitantes, de los cuales 0,5 millones son de clase alta, 13 millones son de clase media y 2,5 millones son de clase baja. ¿Cuál será el número de habitantes pertenecientes a cada clase al cabo de 20 años?
- (e) Con los mismos datos iniciales del apartado anterior, cuando pase mucho, mucho tiempo, ¿a qué cantidades tenderá el número de habitantes pertenecientes a cada clase?
- (f) ¿Existe alguna distribución de la población (expresada como un vector con coordenadas entre 0 y 1, ya que lo que nos interesan son los porcentajes) que no varíe a lo largo del tiempo? Si existe, ¿cuál es?

Un vector como aquel por el que se nos pregunta en el apartado (f) es vector fijo para la matriz T , es decir, que es vector propio de T para el valor propio 1. Dicho vector nos da una *distribución estacionaria* (en este ejemplo concreto, una distribución estacionaria de la población), ya que dicha distribución permanece invariante independientemente del tiempo que pase.