Ejercicios del tema 5

(1) **(*)** Para las matrices reales

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) calcula sus autovalores y sus autovectores;
(b) decide si son diagonalizables;
(c) en caso de que sean diagonalizables, encuentra una matriz invertible P tal que $P_i^{-1}A_iP_i$ sea una matriz diagonal.

(2) Demuestra que la matriz real

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable sobre $\mathbf{R}$. (Ind. Deberás utilizar algún teorema de Cálculo)

(3) **(*)** Decide si las matrices reales

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

son diagonalizables sobre $\mathbf{R}$ y sobre $\mathbf{C}$. Para aquella A_i que lo sea halla una matriz diagonal D_i semejante a ella y una matriz invertible Q_i tal que $Q_i^{-1}D_iQ_i = A_i$.

(4) Halla los autovalores y los autovectores de los endomorfimos f_1, f_2 y f_3 de $\mathbf{R}^3$ dados por

(a) **(*)** $f_1(x, y, z) = (x, x + 2y + z, -x - y)$
(b) $f_2(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z)$
(c) **(*)** $f_3(x, y, z) = (2y - z, 2x - z, 2x - y)$

y decide si son endomorfismos diagonalizables.

(5) **(*)** Consideramos el endomorfismo de $\mathbf{R}^2$ dado por

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 3y, 3x - 4y).$$

(a) Halla los autovalores y los autovectores de f.
(b) ¿Es f diagonalizable? En caso de que lo sea, halla una base B tal que M_Bf sea diagonal.

(b) ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbf{C}$?

(7) **(*)** Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Es f diagonalizable?
(b) En caso de que f sea diagonalizable, halla una base B formada por autovectores de f y halla $M_B f$.

(8) Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial real V de dimensión 3 y sea f el endomorfismo de V dado por

$$f(u_1) = u_1 + u_2, \qquad f(u_2) = 2u_1, \qquad \operatorname{Ker} f = L(u_1 + u_3).$$

Halla:
(a) La matriz de f respecto de la base B.
(b) La imagen de f y su rango.
(c) Los autovalores de f.
(d) Una base B', escrita en función de B, respecto de la cual la matriz de f sea diagonal.
(e) La matriz del cambio de base de B a B'.

(9) Estudia para qué valores de los parámetros α, β y γ son diagonalizables las siguientes matrices reales:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 3 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(10) **(*)** Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Demuestra que f es un automorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f.

(11) **(*)** Consideramos los subespacios vectoriales U y W de $\mathbf{R}^4$ dados respectivamente por las ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}.$$

Demuestra que existe un endomorfismo f de $\mathbf{R}^4$ cuyos valores propios son 1 y 2 y con subespacios propios $V_1(f) = W$ y $V_2(f) = U$. ¿Es f único?

(12) Halla A^{33}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(14) **(*)** Consideramos la población de cierto país, que dividimos en tres clases: alta, media y baja. Las probabilidades de que una persona cambie de clase o no al cabo de un año dependen solo de la clase a la que ha pertenecido durante el año y son las mismas todos los años. Concretamente

- la probabilidad de seguir siendo de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase alta es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase media es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si era de clase baja es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase baja es $1/2$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase baja es $1/2$.

Podemos usar la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

para estudiar la evolución de la distribución de la población del país como sigue. Si el número de habitantes de clase alta después de n años es x_n, el número de habitantes de clase media después de n años es y_n y el número de habitantes de clase alta después de n años es z_n, entonces obtenemos $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ a partir de x_n, y_n, z_n así:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Este tipo de proceso es un ejemplo de *cadena de Markov* y a la matriz T se la llama *matriz de transición*. Observa que las entradas de cada columna de T son probabilidades y suman 1. Por ello se dice también que T es una matriz *estocástica*.

(a) Calcula los autovalores y los autovectores de T. ¿Es T diagonalizable?
(b) Encuentra, si es posible una matriz real 3×3 invertible Q y una matriz real 3×3 diagonal D tal que $T = Q^{-1}DQ$.
(c) Halla T^n para todo $n \in \mathbf{N}$.
(d) Supongamos que este año el país tiene 16 millones de habitantes, de los cuales $0,5$ millones son de clase alta, 13 millones son de clase media y $2,5$ millones son de clase baja. ¿Cuál será el número de habitates pertenecientes a cada clase al cabo de 20 años?
(e) Con los mismos datos iniciales del apartado anterior, cuando pase mucho, mucho tiempo, ¿a qué cantidades tenderá el número de habitantes pertenecientes a cada clase?
(f) ¿Existe alguna distribución de la población (expresada como un vector con