Preliminares Sobre Análisis Matricial (Resumen)

Índice

En todo lo que sigue, se asume que $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

1. Concepto de matriz y operaciones

Definición. Una matriz de orden $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un tabla A de m filas y n columnas, formada por elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$, del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una submatriz de A es una matriz formada a partir de A suprimiendo filas y/o columnas. Se llama diagonal principal de A a la diagonal formada por los elementos de la forma a_{ii}.

Observación. Se escribe $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ o bien $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ si es cuadrada.

Observación.

- La matriz nula $m \times n$ se define como la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ donde $a_{ij} = 0\ \forall i\ \forall j$; se representa por $\mathbf{0}$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, se define la multiplicación de λ por A como la matriz $m \times n$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}.$$

Si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ es una matriz $n \times p$, se define la multiplicación de A por B como la matriz $m \times p$

$$A \cdot B = (c_{ik})_{1\leq i\leq m, 1\leq k\leq p}$$

donde $c_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k}$.

Proposición. Sean A, B, C matrices con los tamaños adecuados, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathbf{0}$ la matriz nula e I la matriz identidad. Se verifica que

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$
3. $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$
4. $A + B = B + A$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1\,A = A$
9. $A(BC) = (AB)C$
10. $A\,\mathrm{I} = \mathrm{I}\,A = A$
11. $A(B + C) = AB + AC$

2. Tipos de matrices

1. Matriz fila: $m = 1$; matriz columna: $n = 1$; matriz cuadrada: $m = n$.
2. Matriz triangular superior: A es cuadrada y $a_{ij} = 0\ \forall i > j$; matriz triangular inferior: A es cuadrada y $a_{ij} = 0\ \forall i < j$.
3. Matriz diagonal: $m = n$ y $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$.
4. Matriz transpuesta: si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, la matriz transpuesta de A se representa por A^T y se define como $A^T = (a_{ji})_{1\leq j\leq n, 1\leq i\leq m}$.
5. Matriz simétrica: $A = A^T$;
6. Matriz antisimétrica: $A = -A^T$.
7. Matriz ortogonal: $A \cdot A^T = I$.

Proposición. Sean A, B matrices con los tamaños adecuados y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se verifica que

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Sea $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$. Se define el índice de σ, y se representa por $\epsilon(\sigma)$, como el número de veces que $i_j < i_k$ siendo $k < j$.

Definición. Se define el determinante de $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ como

$$\det(A) = \sum_{\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}.$$

$\det(A)$ también se suele representar por $|A|$.

Definición. Una matriz cuadrada A se llama singular si $\det(A) = 0$. En caso contrario, se llama regular (o no singular).

Proposición. Sean A, B matrices $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se verifica

1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.
3. Sea A^* la matriz que resulta al permutar dos filas (resp. columnas) de A, entonces $\det(A^*) = -\det(A)$.
4. Sea A^* la matriz que resulta al multiplicar una fila (resp. columna) de A por λ, entonces $\det(A^*) = \lambda \det(A)$.
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
6. Si una fila (resp. columna) de A es proporcional a otra fila (resp. columna) de A, entonces $\det(A) = 0$. En particular, si alguna fila (resp. columna) es nula, entonces $\det(A) = 0$.
7. Sea A^* la matriz que resulta al sumar a una fila (resp. columna) de A cualquier otra fila (resp. columna) de A multiplicada, previamente, por un elemento de $\mathbb{K}$, entonces $\det(A^*) = \det(A)$.
8. Si A es triangular (en particular, diagonal) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
9. Sea A una matriz $n \times n$ con la siguiente estructura

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

donde M_{ij} son matrices $n_i \times n_j$ tales que $n_1 + n_2 = n$. Si M_{21} o M_{12} es la matriz nula, entonces

$$\det(A) = \det(M_{11})\det(M_{22}).$$

4. Cálculo de determinantes

i-ésima y la columna j-ésima. En esta situación, si i es cualquier elemento en $\{1, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}.$$

O bien, si j es cualquier elemento en $\{1, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

4.2. Triangulación de una matriz

Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ una matriz, no necesariamente cuadrada. El desarrollo del método se presenta por filas, de forma similar se actúa por columnas.

La idea consiste en transfomar A, mediante operaciones elementales, en un matriz triangulada. Una matriz triangulada o escalonada es una matriz que satisface:

- Las filas nulas (si existen) están al final.
- Cada una de las filas comienza con una sucesión de ceros (que suele ser vacia en el caso de la primera fila) que tiene, al menos, un cero mas que la fila anterior.

En esta situación, el proceso de triangulación (o eliminación) gaussiana es como sigue (nos referiremos a la fila i-ésima de la matriz como F_i y a la columna j-ésima como C_j):

Procedimiento de triangulación (o eliminación) gaussiana

1. Si $a_{11} = 0$ determinar un elemento en la primera columna de A que no sea nulo y permutar las correspondientes filas. Si tal elemento no existe, trabajar en la zona de la matriz que se obtiene al suprimir C_1.
2. $\forall i \in \{2, \dots, m\}$ reemplazar F_i por $F_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} F_1$.
3. Repetir el proceso, hasta consumir todas las filas, trabajando en la zona de la matriz A que se obtiene al suprimir las filas, y las correspondientes columnas, en las que ya se ha trabajado.

En esta situación, teniendo en cuenta las propiedades del determinante (véase arriba), si A es cuadrada $(m = n)$ y $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es la triangulación de A entonces

$$\det(A) = (-1)^{\epsilon} \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

donde ϵ es el número de permutaciones de filas que se han realizado durante el proceso de triangulación.

Ejemplo

Ejercicio. Triangular la matriz sobre $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] \\ [3] & [4] \\ [4] & [3] \end{pmatrix}$$

Observación. La matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

se llama matriz de Van der Monde. Se verifica que

$$\det(A_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

5. Matriz inversa

Definición. Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Se dice A que es invertible si existe otra matriz B, $n \times n$, sobre $\mathbb{K}$, tal que $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}$. En tal caso, a B se le llama matriz inversa de A y se representa como A^{-1}.

Proposición.

1. La matriz inversa de una matriz, si existe, es única.
2. A es invertible si y sólo si es regular.
3. Si A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

   donde A_{ij} es el adjunto de a_{ij} (véase arriba).

4. Si A, B son invertibles del mismo tamaño, $A \cdot B$ es invertible y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
5. Si A es invertible, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

Observación. **[Método de Gauss-Jordan]**
Sea A invertible. Se considera la matriz ampliada $(A \,|\, \mathrm{I})$ y se aplica el proceso de triangulación, haciendo ceros también por encima de la diagonal, hasta obtener $(\mathrm{I} \,|\, E)$. Entonces $A^{-1} = E$.

Ejemplo.

Ejercicio. Invertir la matriz sobre $\mathbb{Z}_5$

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [2] \\ [1] & [3] \end{pmatrix}$$

6. Rango de una Matriz

Definición. Sea A una matriz $m \times n$. Se define el rango de A como el máximo de los órdenes de las submatrices regulares de A. Se representa por $\mathrm{rg}(A)$.

Observación.

1. Si A es $m \times n$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.
2. Si $\mathrm{rg}(A) = s$ entonces existe una submatriz de A regular de orden $s \times s$ y toda submatriz de A de orden $t \times t$, con $t > s$, es singular.
3. El rango de A coincide con el número de filas no nulas que tiene la matriz triangulada de A.

7. Sistemas de Ecuaciones lineales

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathcal{S} \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ y x_i son las incógnitas. $\mathcal{S}$ admite una representación matricial como sigue:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}^{b}$$

o bien $A \cdot X = b$.

A la matriz A se le llama matriz del sistema y a b matriz de términos independientes. A la matriz que se obtiene al añadir a la derecha de A la columna b se le llama matriz ampliada y se representa como $(A|b)$. Si b es nulo, se dice que el sistema es homogéneo.

Definición. Se dice que $\mathcal{S}$ es: compatible determinado si el sistema tiene solución única; compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones; e incompatible si no tiene solución.

Teorema. (Rouche Fröbneius)

1. $\mathcal{E}$ tiene solución $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}((A|b))$.

- $\mathcal{E}$ es compatible indeterminado $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}((A|b)) < n$.
- Todo sistema homogéneo es compatible.

Observación. (Resolución via triangulación) Sea $(U|u)$ la matriz triangulada de la matriz ampliada $(A|b)$. Sea $\mathcal{E}^*$ el sistema de ecuaciones lineales asociado a $(U|u)$. Entonces $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^*$ son sistemas equivalentes; es decir tienen las mismas soluciones. Por tanto, para resolver $\mathcal{E}$, se obtiene primero $\mathcal{E}^*$ y se determinan sus soluciones. Obsérvese que resolver un sistema de ecuaciones lineales con matriz triangulada es sencillo.

Teorema. (Regla de Cramer) Sea $\mathcal{E}$ con $m = n$ y $\mathrm{rg}(A) = n$. Entonces, si representamos por C_i las columnas de A, se verifica que

$$x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, b, C_i, \dots, C_n)}{\det(A)},\ i = 1, \dots, n$$

8. Factorización $PA = LU$

En esta última sección se muestra como la reinterpretación matricial del proceso de triangulación visto arriba permite expresar una matriz A, $m \times n$, como

$$PA = LU$$

donde

- P es una matriz de permutación; es decir, una matriz obtenida permutando filas en la matriz identidad,
- L es una matriz triangular inferior $m \times m$ con 1 en todas las posiciones de la diagonal,
- U es una matriz triangulada $m \times n$.

Observación. [Aplicación]
Supongamos que se conoce una factorización $PA = LU$. Entonces, como P es invertible, el sistema $AX = b$ es equivalente al sistem $PAX = Pb$; es decir, al sistema $LUX = Pb$. Este último sistema se puede abordar resolviendo dos sistemas triangulares:

1. Primero se resuelve $LX = Pb$; sea a la solución.
2. Después se resuelve el sistema $UX = a$.

Esta interpretación es especialmente interesante cuando se tiene que resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz del sistema.

Procedimiento $PA = LU$

1. [Inicialización] Sea $P = \mathrm{I}$, $L = \mathbf{0}$.

3. [Salida] Devolver $L+\mathrm{I}$, P y U como la matriz triangulada de A.

Ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}\\ P=\mathrm{I}\\ L=\mathbf{0}\end{array}\right\} \xrightarrow{F_1 \leftrightsquigarrow F_2} \left.\begin{array}{l} U=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\\ P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ L=\mathbf{0}\end{array}\right\} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3-\frac{1}{2}F_1} \left.\begin{array}{l} U=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&3/2\end{pmatrix}\\ P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3-\frac{3}{2}F_2} \left.\begin{array}{l} U=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\\ P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Salida}} \left.\begin{array}{l} U=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\\ P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Ejercicio. Determinar una descomposición $PA=LU$ donde P es la matriz sobre $\mathbb{Z}_5$

$$A=\begin{pmatrix}[1]&[2]\\ [3]&[4]\\ [4]&[3]\end{pmatrix}$$

9. Grupos matriciales (opcional)

Sea $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de todas las matrices $m\times n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$.

- $(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),+)$, donde $+$ es la suma usual de matrices, es un grupo abeliano.
- Sea $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})=\{A\in\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A)\neq 0\}$.
  $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación usual de matrices, es un grupo. A $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ se le llama grupo lineal de orden n sobre $\mathbb{K}$.
- Sea $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})=\{A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \det(A)=1\}$.
  $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}),\cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación usual de matrices, es un grupo. A $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ se le llama grupo especial lineal de orden n sobre $\mathbb{K}$.