Diagonalización de Endomorfismos (Resumen)

Índice

En todo este resumen **se asume** que:

- $\mathscr{U}$ es un $\mathbb{K}$-e.v. de tipo finito, $\dim(\mathscr{U}) = n$,
- $f \in \mathrm{End}(\mathscr{U})$,
- $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es la representación matricial de f en una cierta base $\overline{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{U}$ (en la práctica, si es posible, $\overline{\mathscr{B}}$ es la base canónica).

Teniendo en cuenta el isomorfismo entre $\mathrm{End}(\mathscr{U})$ y $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ (véase `Resumen` sobre [Homomorfismos entre Espacios Vectoriales]), se desarrolla la teoría para matrices. Es decir, se trabajará con A en lugar de con f, pero el lector debe tener en cuenta que en cualquier momento las afirmaciones son traducibles de un contexto al otro. Para falicitar la lectura, en los puntos clave, se introducirán notas aclaratorias a pie de página.

Añadir que cuando se utilice la notación $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I})$ nos referimos[1] a

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}) = \left\{u \in \mathbb{K}^n \,\middle|\, (A-\lambda\mathrm{I})\cdot u^T = \overline{0}\right\}$$

Obsérvese que $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I})$ es un s.v. de $\mathbb{K}^n$ y, por tanto, tiene sentido hablar de su dimensión y de bases.

1. Semejanza de matrices

Definición. Sean $A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se dice que A es semejante a B si existe $P \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

1. A es semejante a A con I matriz de paso.
2. Si A es semejante a B (con P matriz de paso de B a A) entonces B es semejante a A (con P^{-1} matriz de paso de A a B)
3. Si A es semejante a B (con P matriz de paso de B a A) y B es semejante a C (con Q matriz de paso de C a B) entonces A es semejante a C (con PQ matriz de paso de C a A).
4. Las tres observaciones anteriores, se expresan diciendo que la noción de semejanza es una relación de equivalencia en $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ (véase `Resumen` sobre [Estructuras Algebraicas] y sobre [Formas Bilineales, Formas Cuadráticas y Espacios Euclídeos]).

La fórmula del cambio de base en endomorfismos (véase `Resumen` sobre Homomorfismos entre Espacios Vectoriales) implica el siguiente resultado

Teorema. Todas las representaciones matriciales de un mismo endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathscr{U})$ son semejantes.

2. Motivación y planteamiento del problema

Motivación: véase pizarra

Definición. Se dice que $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable[2] si A es semejante a una matriz diagonal D con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Observación. Observése que las matrices A y D tienen sus coeficientes en el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. De hecho, puede ser que una matriz real no sea diagonalizable (sobre $\mathbb{R}$) pero que, si se considera como matriz compleja, si que lo sea sobre $\mathbb{C}$ (véase Hoja 3 de problemas).

Problema de la diagonalización[3]

- Dada $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$
- Decidir si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinar
  1. $D \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diagonal sobre $\mathbb{K}$ y
  2. $P \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ regular

  tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

3. Autovalores, autovectores y autoespacios

Teorema. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. A es diagonalizable sii existe una base $\{\ u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ (no necesariamente distintos) tal que

$$A \cdot u_i^T = \lambda_i u_i^T, \ \ i = 1, \dots, n.$$

En tal caso

donde las columnas de P son $u_1^T, \dots, u_n^T$.

Este teorema justifica la siguiente definición.

Definición. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se dice[4] que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor (o un valor propio) de A si existe $u \in \mathbb{K}^n$, $u \neq \overline{0}$, tal que $A \cdot u^T = \lambda u^T$. El vector u se llama autovector asociado a λ o vector propio asociado a λ.

Observación.

1. $\overline{0}$ jamás es autovector, sin embargo 0 puede ser autovalor.

2. Si λ es autovalor de $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ entonces $\lambda \in \mathbb{K}$.

3. Asociado a un autovalor existen varios autovectores, pero un autovector sólo puede estar asociado a un único autovalor.

Con la nueva terminología, el teorema anterior se reformula como sigue.

Teorema. (Primer teorema de diagonalización)
Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. A es diagonalizable sii existe una base $\{ u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A. En tal caso

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ son los autovalores (no necesariamente distintos) a los que están asociados, respectivamente, los autovectores $u_1, \dots, u_n$ y donde las columnas de P son $u_1^T, \dots, u_n^T$.

Definición. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. Se define[5] el autoespacio asociado a A como en conjunto

$$\mathscr{W}_\lambda = \left\{ u \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot u^T = \lambda u^T \right\}$$

Observación.

1. $\mathscr{W}_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I})$ y por tanto $\mathscr{W}_\lambda$ es un s.v. de $\mathbb{K}^n$.

2. Como un autovector sólo puede estar asociado a un único autovalor, si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de A entonces $\mathscr{W}_\lambda \cap \mathscr{W}_\mu = \{\overline{0}\}$.

3. Determinación de autovectores.
   Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y supóngase que se conoce un autovalor λ de A. Se quiere determinar $\mathscr{W}_\lambda$.
   Para ello, basta tener en cuenta que $\mathscr{W}_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I})$ y aplicar el método descrito en el `Resumen` sobre Homomorfismos entre Espacios Vectoriales, ejecutando los pasos 3 y 4 la matriz $(A - \lambda \mathrm{I})$ en lugar de hacerlo con A.

Teorema. Si $\{u_1, \dots, u_k\}$ son autovectores asociados a autovalores distintos de A, entonces $\{u_1, \dots, u_k\}$ son l.i.

Corolario. (Cond. suficiente de diagonalización)
Si $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.

4. Determinación de autovalores: el polinomio característico.

En la sección anterior hemos visto que si $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y se conoce un autovalor λ de A, sabemos determinar $\mathscr{W}_\lambda$. En este apartado, analizamos la determinación de los autovalores. Para ello, se razona como sigue.

$$\begin{gathered}\lambda \in \mathbb{K} \text{ es autovalor de } A\\ \Updownarrow\\ \exists u \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } u \neq \overline{0} \text{ y } A\cdot u^T = \lambda u^T\\ \Updownarrow\\ \exists u \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } u \neq \overline{0} \text{ y } (A-\lambda \mathrm{I})\cdot u^T = \overline{0}\\ \Updownarrow\\ \mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}) \neq \{\overline{0}\}\\ \Updownarrow\\ \det(A-\lambda\mathrm{I}) = 0.\end{gathered}$$

Por tanto, los autovalores de A son aquellos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\det(A-\lambda\mathrm{I}) = 0$. Este hecho motiva la siguiente definición

Definición. Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. De define el polinomio característico de A como el polinomio

$$P_A(t) = (-1)^n \det(A - t\mathrm{I}).$$

Por tanto, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

entonces

$$P_A(t) = (-1)^n \det\begin{pmatrix} a_{1,1}-t & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}-t\end{pmatrix}.$$

Observación. Si $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, entonces $P_A(t)$ tiene grado n y es mónico.

Teorema. Si dos matrices son semejantes, sus polinomios característicos coinciden[6].

Teorema. Los autovalores de $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son las raíces en $\mathbb{K}$ de $P_A(t)$.

Supóngase ahora que $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable. Entonces existe una matriz $D \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

En consecuencia, si A es diagonalible, todas las raíces de A pertenecen a $\mathbb{K}$. Se deduce así el siguiente teorema.

5. Segundo teorema de diagonalización

Teorema. (Segundo teorema de diagonalización)
Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ y

$$P_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todos distintos y elementos de $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. A es diagonalizable
2. $\dim(\mathscr{W}_{\lambda_i}) = n_i, \forall i = 1, \ldots, r$.

Ademas, en caso afirmativo, se tiene que *la* matriz diagonal D semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}\right\}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \left.\begin{matrix}\lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix}\right\}_{n_r} \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso P de A a D tiene la siguiente estructura

- Las n_1 primeras columnas de P son una base de $\mathscr{W}_{\lambda_1}$
- Las n_2 siguientes columnas de P son una base de $\mathscr{W}_{\lambda_2}$
- etc.

Es decir,

$$P = \left(\boxed{\begin{matrix}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_1}\end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_2}\end{matrix}} \; \cdots \; \boxed{\begin{matrix}\text{Base}\\ \text{de}\\ \mathscr{W}_{\lambda_{n_r}}\end{matrix}} \right)$$

6. Teorema espectral (caso real)

Observación. Cuando la matriz de paso P es ortogonal, se dice que la diagonalización es mediante transformaciones ortogonales. Este tipo de diagonalización se estudiará en el capítulo sobre Espacios Euclídeos.

7. Algoritmo de diagonalización.

Caso matricial: Sea $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

1. Determinar el polinomio característico $P_A(t)$ de A.
2. Si alguna raíz de $P_A(t)$ no pertenece a $\mathbb{K}$, entonces A no es diagonalizable.
3. Sea $P_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$ con $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ distintos.
4. Para todo $i = 1,\ldots,r$, comprobar si $\dim(\mathscr{W}_i) = n_i$ y, en caso afirmativo, calcular una base $\mathscr{B}_{\lambda_i} = \{u_{i,1},\ldots,u_{i,n_i}\}$ de $\mathscr{W}_i$.
5. Si para algún $i \in \{1,\ldots,r\}$ no se da la igualdad anterior entonces A no es diagonalizable. En caso contrario, A es diagonalizable y además

$$D = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}\right\}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \left.\begin{matrix}\lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{matrix}\right\}_{n_r}\end{pmatrix}$$

y P es la matriz cuyas columnas son $u_{1,1},\ldots,u_{1,n_1},\ldots,u_{r,1},\ldots,u_{i,n_r}$. Se verifica $D = P^{-1}\cdot A\cdot P$.

Observación. (Caso Endomorfismos)
En el caso de endomorfismos, se actúa como sigue (sea $f \in \mathrm{End}(\mathscr{U})$ con $\dim(\mathscr{U}) = n$)

1. Se fija una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{U}$ (en la práctica $\mathscr{B} = \mathscr{B}_c$)
2. Se obtiene $A = \mathscr{M}(f,\mathscr{B})$.
3. Se aplican los pasos 1,2,3,4,5 del algoritmo anterior. En este caso, la base de $\mathscr{U}$ de autovectores se obtiene juntando las bases $\mathscr{B}_{\lambda_i}$ (cada vector $u_{i,j}$ de la base $\mathscr{B}_{\lambda_i}$ son las coordenadas, del correspondiente autovector, en la base $\mathscr{B}$).

En tal caso, puede que A sea diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y, para decidirlo, se necesita estudiar la dimensión de los autoespacios, etc.

Sea $\lambda = a + b\,\mathtt{i} \in \mathbb{C}$, con $b \neq 0$, una raíz del polinomio característico de A y, como estamos considerando $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, un autovalor de A. Como el polinomio característico de A, $P_A(t)$, es un polinomio con coeficientes reales, se verifica que $\overline{\lambda} = a - b\,\mathtt{i}$ también es raíz de $P_A(t)$ y en consecuencia autovalor de A. Ahora bien, a continuación se muestra como la información del autovalor $\overline{\lambda}$ se deduce de la información del autovalor λ. De forma mas precisa, se cumple que

1. La multiplicidad de λ y $\overline{\lambda}$ en $P_A(t)$ coinciden.
2. $\dim(\mathscr{W}_\lambda) = \dim(\mathscr{W}_{\overline{\lambda}})$.
3. Si $\mathscr{B}_\lambda$ es una base de $\mathscr{W}_\lambda$, entonces
$$\mathscr{B}_{\overline{\lambda}} = \overline{\mathscr{B}_\lambda},$$
donde $\overline{\mathscr{B}_\lambda}$ representa la conjugación de $\mathscr{B}_\lambda$.