

Hoja 3 de Problemas
(Homomorfismos (aplicaciones lineales) entre espacios vectoriales)

1. [Concepto de homomorfismo] Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

$$1.1. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$$

$$1.4. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, y, x + y)$$

$$1.2. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2, y^2)$$

$$1.5. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + 1, y, x + y)$$

$$1.3. f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (xy, y)$$

$$1.6. f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), f(A) = A^T$$

$$1.7. f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[t], f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + bt^3$$

$$1.8. f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[t], f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 1 + bt^3$$

$$1.9. f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_3[t], f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + b^2t^3$$

$$1.10. f : \mathbb{R}_n[t] \rightarrow \mathbb{R}_n[t], f(p) = p'.$$

$$1.11. f : \mathbb{R}_3[t] \rightarrow \mathbb{R}^3, f(p) = (p'(0), p''(0), \int_0^1 p(t) dt).$$

$$1.12. f : \mathbb{R}_1[t]^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[t] \times \mathbb{R}^2, f((a + bt, c + dt)) = (1 + dt, (a + c, b + d)).$$

$$1.13. f : \mathbb{R}_1[t]^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[t] \times \mathbb{R}^2, f((a + bt, c + dt)) = (a + dt, (ac, b + d)).$$

$$1.14. f : \mathbb{R}_1[t]^2 \rightarrow \mathbb{R}_1[t] \times \mathbb{R}^2, f((a + bt, c + dt)) = (a + dt, (a + c, b + d)).$$

2. Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^4 definido, en la base canónica, como:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_3, -x_1 - x_3 + x_4)$$

a) Determinar la representación matricial de f en la base canónica.

b) Determinar $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$.

c) Determinar el núcleo y la imagen de f .

d) Estudiar si f es un automorfismo.

3. Sea considera la aplicación

$$f : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, a + b + c, 0)$$

a) Demostrar que f es un homomorfismo.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4. Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} \mathbb{K} -espacios vectoriales de tipo finito y sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de \mathcal{U} y \mathcal{V} respectivamente. Sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un homomorfismo que cumple que

$$f(u_1) = v_1 + v_2 + v_3, \quad f(u_2) = \bar{0}_{\mathcal{V}}.$$

Determinar ecuaciones implícitas, paramétricas y bases (si existen) de $\text{Ker}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

5. Sea f un homomorfismo entre dos \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión 3 y 4, respectivamente, representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

Determinar los valores de a para los que f es homomorfismo inyectivo ¿Existe algún valor de a para el cual f sea suprayectivo?.

6. Sea \mathcal{U} un \mathbb{K} -e.v. de dimensión 3 y sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de \mathcal{U} . Se considera el endomorfismo $f \in \text{End}(\mathcal{U})$ definido como:

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (y + z)e_1 + (x + z)e_2 + (y - x)e_3$$

Hallar:

- Representación matricial de f respecto a la base \mathcal{B} .
- Ecuaciones del $\text{Ker}(f)$ y de la $\text{Im}(f)$.
- Determinar una base del $\text{Ker}(f)$ y ampliarla a una base de \mathcal{U} .

7. Determinar $\#(\text{End}((\mathbb{Z}_3)^2))$.

8. Sea $\mathcal{V} = (\mathbb{Z}_5)_2[t]$ y $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ el homomorfismo definido como

$$f([a_0] + [a_1]t + [a_2]t^2) = [a_0 + 3a_1 + a_2] + [a_0 + aa_1 + 3a_2]t + [aa_0 + 4a_1 + a_2]t^2,$$

donde $[a] \in \mathbb{Z}_5$. Determinar los valores de a para los que f es automorfismo. Para $[a] = [2]$ determinar el núcleo y la imagen de f .

9. Se considera el endomorfismo

$$f : \mathbb{R}_1[t] \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_1[t] \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$\left(a_0 + a_1 t, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \mapsto \left((a_0 + a_1 + a + b) + (a_0 + a_1 + a + b + c + d)t, \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c+d & d \end{pmatrix} \right).$$

Determinar el núcleo y la imagen f .

10. En el espacio vectorial real \mathcal{U} , de dimensión 4, se considera el endomorfismo f definido como:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

b) Sea h el endomorfismo que se obtiene al particularizar $m = 1$ en la aplicación lineal f . Entonces se pide:

- 1) Ecuaciones paramétricas e implícitas, bases y dimensión del núcleo y la imagen de h .
- 2) Estudiar si $\mathcal{U} = \text{Ker}(h) \oplus \text{Im}(h)$.
- 3) Determinar $B = \mathcal{M}(h, \mathcal{B}^*)$, donde $\mathcal{B}^* = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

11. En \mathbb{R}^4 se considera la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, y el endomorfismo f de \mathbb{R}^4 definido como:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1 + au_2 + au_3 \\ f(u_2) &= au_1 + u_2 + au_3 \\ f(u_3) &= au_1 + au_2 + u_3 \\ f(u_4) &= bu_1 + cu_2 + du_3 + eu_4, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Estudiar para que valores de a, b, c, d, e , el endomorfismo f es un isomorfismo.

12. Deducir si los siguientes espacios vectoriales son isomorfos y, en caso afirmativo, establecer un isomorfismo entre ellos

- a) $\mathcal{W}_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathcal{W}_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$.
- b) $\mathcal{W}_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathcal{W}_2 = \mathbb{R}_2[t]$.
- c) $\mathcal{W}_1 = \mathbb{R}_2[t]$, $\mathcal{W}_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{Traza}(A) = 0\}$.
- d) $\mathcal{W}_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, $\mathcal{W}_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \text{Traza}(A) = 0\}$.
- e) $\mathcal{W}_1 = \mathbb{R}_2[t] \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{W}_2 = \{A \in \mathcal{M}_{8 \times 8}(\mathbb{R}) \mid \text{Traza}(A) = 0\}$.

13. Se consideran los endomorfismos

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}_1[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[t], & g: \mathbb{R}_1[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[t] \\ a + bt & \longmapsto & (a + b) + bt & a + bt & \longmapsto & a + (a + b)t \end{array}$$

Determinar el núcleo y la imagen de $f^2 + 4fg + g^2$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70