

Hoja 4 de Problemas
Forma canónica de Jordan

1. Estudiar si los siguientes endomorfismos son diagonalizables y, en caso afirmativo, determinar una base que permita representar al endomorfismo de forma diagonal

a) $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida como

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b+c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$.

2. Se considera la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ cuerpo, una matriz cuadrada diagonalizable.

a) Estudiar la diagonalización de la matriz A^m , $m \in \mathbb{N}$.

b) Deducir un método para calcular A^m , $m \in \mathbb{N}$.

c) Si $\det(A) \neq 0$, estudiar la diagonalización de la matriz A^{-1}

d) Si $p(x) = a_m x^m + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, estudiar la diagonalización de la matriz $P(A) = a_m A^m + \dots + a_0 I$

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide

a) Estudiar si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y la matriz de paso.

b) Estudiar si A^{-1} es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y la matriz de paso.

c) Estudiar si $B = A^{500} + A^{300} + I$ es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y la matriz de paso.

4. Sea $\mathcal{U}$ un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 4 y sea $f \in \text{End}(\mathcal{U})$ definido como

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1, & f(u_3) &= -2u_1 - 2u_2 - u_3 - 2u_4 \\ f(u_2) &= u_2, & f(u_4) &= u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_4\}$ es una base de $\mathcal{U}$. Se pide

- a) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinar un base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ sea una matriz diagonal.
- b) Analizar si f es un automorfismo.

5. Se consider la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si A es diagonalizable y en caso afirmativo hallar la matriz de paso P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

6. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiar si

- a) A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.
- b) A es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ y, en caso afirmativo, realizar el proceso de diagonalización.

7. Se considera el endomorfismo

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}_3)_3[t] &\longrightarrow (\mathbb{Z}_3)_3[t] \\ [a_0] + [a_1]t + [a_2]t^2 + [a_3]t^3 &\longmapsto [a_0] + ([a_1] + [a_3])t + (2[a_0] + 2[a_2])t^2 + 2[a_3]t^3 \end{aligned}$$

Analizar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinar su expresión matricial diagonal y la base de $(\mathbb{Z}_3)_3[t]$ correspondiente.

8. Determinar la forma canónica de Jordan J , o canónica real $J_{\mathbb{R}}$, y la matriz de paso P para las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

9. Determinar la matrix exponencial de las matrices del ejercicio anterior.

10. Determinar el polinomio mínimo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Hallar las posibles formas canónicas de Jordan para las matrices cuyos polinomios característicos $p(t)$ y mínimos en $m(t)$ son los siguientes

a) $p(t) = (t-2)^4(t-3)^2, m(t) = (t-2)^2(t-3)^2$

b) $p(t) = (t-2)^7, m(t) = (t-2)^3$

c) $p(t) = (t-7)^5, m(t) = (t-7)^2$

d) $p(t) = (t-3)^4(t-5)^4, m(t) = (t-3)^2(t-5)^2$

12. Hallar la forma de Jordan así como la matriz de paso de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Sea $\mathcal{U}$ un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión 4 y sea $f \in \text{End}(\mathcal{U})$ definido como

$$\begin{aligned} f(u_1) &= u_1, & f(u_3) &= -3u_1 - 2u_2 - u_3 - 2u_4 \\ f(u_2) &= u_1 + u_2, & f(u_4) &= u_1 + u_2 + u_3 + 2u_4 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_4\}$ es una base de $\mathcal{U}$. Hallar la forma canónica de Jordan J de f así como la base $\mathcal{B}_J$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_J) = J$.

14. Determinar la matriz forma canónica de Jordan real y la matriz de paso, así como la exponencial, de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Hallar la forma canónica de Jordan, así como la matriz de paso, de la matriz:

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

16. Se considera el endomorfismo

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3) \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3) \\ \begin{pmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} [2a + 2b] & [2b] \\ [c + 2d] & [d] \end{pmatrix}$$

Hallar la forma canónica J de Jordan de f y obtener una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3)$ tal que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = J$.

17. Determinar en $\mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$ la expresión canónica de Jordan y la matriz de paso de la matriz

$$\begin{pmatrix} [4] & [1] & [0] & [1] \\ [0] & [1] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [4] \end{pmatrix}$$