

SOLUCIONES CONTROL Bloque 1: Números, Funciones, Límites y Continuidad.

1. Calcula las raíces cúbicas de -8.

Sabiendo que todas son raíces del polinomio

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 16x + 16$$

encuentra su factorización real y compleja.

Las tres raíces cúbicas de -8, w_1 , w_2 y w_3 tienen el mismo módulo $|w_i| = \sqrt[3]{|-8|} = 2$ y, como el argumento de -8 es π , sus argumentos son $\theta_{w_1} = \frac{\pi}{3}$, $\theta_{w_2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$, y $\theta_{w_3} = \frac{\pi}{3} + 2\frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Por tanto,

$$w_1 = 1 + \sqrt{3}i, w_2 = -2 \text{ y } w_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Como las raíces cúbicas de -8 son raíces del polinomio $P(x)$, podemos dividir éste por $x^3 + 8$ de forma exacta, obteniendo:

$$P(x) = (x^3 + 8)(x^2 - 2x + 2).$$

Así, las otras dos raíces de $P(x)$ son las del polinomio $x^2 - 2x + 2$, es decir, $1 - i$ y $1 + i$.

Ahora podemos escribir la factorización compleja de $P(x)$:

$$P(x) = (x - (1 + \sqrt{3}i))(x - (-2))(x - (1 - \sqrt{3}i))(x - (1 - i))(x - (1 + i)),$$

y, multiplicando los términos correspondientes a raíces conjugadas, la factorización real:

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x + 2).$$

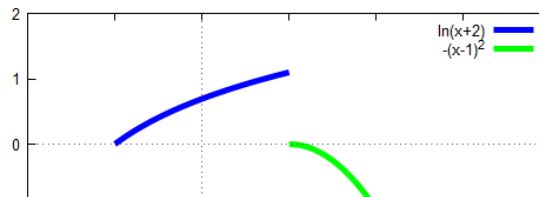
2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) & , \text{ si } x \in [-1, 1] \\ -(x-1)^2 & , \text{ si } x \in (1, 3] \end{cases}$$

a) Dibuja justificadamente su gráfica y encuentra su dominio y su rango.

b) Justifica que tiene inversa, dibuja su gráfica y defínela.

a) A partir de las gráficas conocidas $y = \ln x$ e $y = x^2$ se puede construir la de f :



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Como $\ln(x+2)$ está bien definido en $[-1, 1]$ y $-(x-1)^2$ en $(1, 3]$, el dominio de f es $[-1, 3]$.

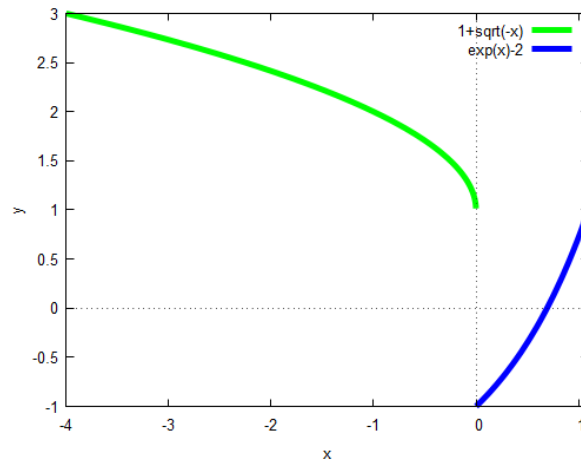
La función $\ln(x+2)$ es creciente y por tanto la imagen de $[-1, 1]$ mediante f es $[\ln(-1+2), \ln(1+2)] =$

$[\ln(1), \ln(3)]$. Por otro lado, la función $-(x-1)^2$ es decreciente en $(1, 3]$, de manera que su imagen mediante f

es $[-(3-1)^2, -(1-1)^2] = [-4, 0]$. En ambos casos se trata de $[\ln(1), \ln(3)]$ y $[-4, 0]$.

- b) Como f es estrictamente creciente en $[-1, 1]$ y mayor o igual que 0, y estrictamente decreciente y negativa en $(1, 3]$, no puede haber dos elementos distintos con la misma imagen, es decir, f es uno a uno y, por tanto, tiene inversa, f^{-1} .

La gráfica de la inversa es



Para definir f^{-1} hay que hacerlo en cada uno de los dos intervalos en los que está definida f obteniendo:

$$f^{-1} : [-4, \ln(3)] \rightarrow [-1, 3]$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{-x} & , \text{ si } x \in [-4, 0) \\ e^x - 2 & , \text{ si } x \in [0, \ln(3)] \end{cases}$$

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

- a) Justifica si es par o impar. ¿Es periódica?
 b) Estudia justificadamente donde es continua.
 c) Encuentra sus asíntotas.

a) f no es impar pues $f(0) \neq 0$.

Sí es par ya que:

$$f(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sen}(x)}{-x} = \frac{\text{sen}(x)}{x} = f(x).$$

No es periódica. Si lo fuese existiría un periodo $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$, y esto implicaría, sustituyendo x por $0, T, 2T, \dots$, que $1 = f(0) = f(T) = f(2T) = \dots = f(nT)$, es decir, $1 = \frac{\text{sen}(nT)}{nT}$, o $\text{sen}(nT) = nT$, para todo $n \in \mathbf{N}$, que es imposible ya que el seno toma valores en $[-1, 1]$.

b) Como $\text{sen}(x)$ y x son funciones continuas en todo \mathbf{R} podemos asegurar que f , su cociente, lo es salvo

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

el numerador en la fracción no tiene límite y el denominador tiende a ∞ , de manera que directamente no podemos conocer el límite de f . El teorema de compresión nos resuelve el problema, como



y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Análogamente se comprueba que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

y, por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal hacia la izquierda y hacia la derecha.

4. a) Enuncia el teorema de Bolzano.
b) Demuestra que la ecuación $\operatorname{arctg} x = 1 - x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.
c) Aproxima una solución de la ecuación encontrando su primera cifra decimal exacta.
- a) *Teorema de Bolzano:* Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
b) La ecuación $\operatorname{arctg} x = 1 - x$ es equivalente a la ecuación $x - 1 + \operatorname{arctg} x = 0$. Definimos la función $f(x) = x - 1 + \operatorname{arctg} x$ para que los puntos donde se anule sean las soluciones de la ecuación. Aplicamos el teorema de Bolzano a la función f en el intervalo $[0, 1]$:
- Como tanto el polinomio $x - 1$ como la función arcotangente son continuas en $[0, 1]$, su suma, f , también lo es.
 - $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} > 0$.
- Comprobadas las hipótesis, el teorema nos dice que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, c es solución de la ecuación.
- c) Volvemos a utilizar el teorema de Bolzano. A partir de $f(0,5) = -0,036352... < 0$ y $f(0,6) = 0,1404195... > 0$ podemos asegurar que la solución buscada es de la forma $c = 0,5...$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70