SOLUCIONES CONTROL Bloque 2: Derivación e Integración.

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right) & \text{si } x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x-1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Demuestra que es derivable y define la función $f'(x)$. ¿Es derivable f'?

   b) Enuncia el teorema del valor medio.

   c) Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ y encuentra los valores intermedios c que verifican su tesis.

a) Como la función $\ln\left(\dfrac{1}{2-x}\right)$ es continua y derivable (composición de una racional y el logaritmo) para $x < 2$ tenemos que f es continua y derivable para $x < 1$. También, como la función $\operatorname{arctg}(x-1)$ es continua y derivable para todo $x \in \mathbf{R}$ (composición de un polinomio y el arcotangente) tenemos que f es continua y derivable para $x > 1$.

Nos queda justificar la continuidad y la derivabilidad en $x = 1$.

Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \left(\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)\Big|_{x=1} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = (\operatorname{arctg}(x-1))|_{x=1} = f(1) = 0.$$

Derivabilidad:

$$f'_-(1) = \left(\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)'\Bigg|_{x=1} = \left(\frac{1}{2-x}\right)\Bigg|_{x=1} = 1 = f'_+(1) = (\operatorname{arctg}(x-1))'|_{x=1} = \left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)\Bigg|_{x=1}.$$

La función $f'(x)$ queda definida:

$$\begin{aligned} f' : \quad \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{1+(x-1)^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Argumentos análogos a los anteriores justifican que f' es continua y derivable en $\mathbf{R} - \{1\}$. En $x = 1$, f' es continua pero no derivable porque $f''_-(1) = 1$ mientras que $f''_+(1) = 0$.

b) *Teorema del valor medio.* Si f es una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) La función $f(x)$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, de manera que existe $c \in (0,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{\ldots} = \frac{\pi/4+\ln 2}{\ldots}$$

$$\frac{\ldots}{1+(c-1)^2} = \frac{\ldots}{2}, \quad c = 1 + \sqrt{\frac{\ldots}{\pi/4+\ln 2} - 1} \approx 1{,}593\ldots$$

2. *a*) Utiliza el método de Newton para calcular dos cifras decimales exactas de una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la ecuación $x^3 = 3 - \tan(x)$.

   b) Utiliza la Regla de L'Hôpital para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\log(x+1)}.$$

   a) Definimos la función $f(x) = x^3 - 3 + \tan(x)$, que es derivable en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La ecuación $x^3 = 3 - \tan(x)$ se puede escribir de la forma $f(x) = 0$ y podemos aplicar el método de Newton.
   Para ellos definimos la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 3 + \tan(x)}{3x^2 + 1 + \tan^2(x)}$$

   y la iteramos desde el valor inicial $x_0 = 1$, obteniendo
   $x_1 = g(1) = 1{,}06888...$ y $x_2 = g(x_1) = 1{,}06328....$
   Como ya se repiten las dos primeras cifras decimales las podemos dar por buenas. La solución buscada será de la forma 1,06....

   b)

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(x))^{\log(x+1)} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen}(x))}{1/\log(x+1)}\right) \underset{\text{R.L'H.}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)/\operatorname{sen}(x)}{-\dfrac{1}{\log^2(x+1)} \cdot \dfrac{1}{x+1}}\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to 0^+} (-\cos(x)(x+1)) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2(x+1)}{\operatorname{sen}(x)}\right) \underset{\text{R.L'H.}}{=} \exp\left(-\lim_{x\to 0^+} \frac{2\log(x+1)}{\cos(x)(x+1)}\right) = e^0 = 1.$$

3. Sea la función

$$f(x) = \int_0^x (4t - 2)e^{-2t}\, dt$$

con dominio $[0, \infty)$.

   a) Enuncia el Teorema Fundamental del Cálculo y calcula $f'(x)$.

   b) Justifica que tiene extremos absolutos y calcúlalos.

   a) *Teorema Fundamental del Cálculo*. Sea f una función continua en $[a, b]$. La función g definida para todo $x \in [a, b]$ como $g(x) = \int_a^x f(s)ds$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g'(x) = f(x)$.
   $f'(x) = (4x - 2)e^{-2x}$.

   b) Como la función $(4x - 2)e^{-2x}$ (producto de polinomio por exponencial) es continua en $\mathbf{R}$, el teorema fundamental del Cálculo nos dice que f es continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$ y que su derivada es

$$f'(x) = (4x - 2)e^{-2x}.$$

   El signo de f' depende del de $4x - 2$, que es negativo hasta $1/2$ y positivo a partir de él. De manera que en $x = 1/2$ se alcanza el mínimo absoluto de f, que será f(1/2). El máximo absoluto de f se

   se tiene que 0 es el máximo absoluto.

4. *a*) Para cada $b \in [0, \frac{1}{2}]$, calcula el área, $A(b)$, de la región R_b que encierran la curva $y = x - x^2$ y la recta $y = bx$.

b) Encuentra el valor medio de la función $A(b)$ del apartado anterior para $b \in [0, \frac{1}{2}]$.

c) Halla el volumen del sólido generado al rotar la región $R_{\frac{1}{2}}$:

1) Alrededor del eje x.
2) Alrededor del eje y (basta con dejar indicada la integral correspondiente).

a) Para cada $b \in [0, \frac{1}{2}]$, buscamos la intersección entre $y = x - x^2$ e $y = bx$ obteniendo dos puntos en $x = 0$ y $x = 1 - b$. Calculando los valores de los polinomios de 2º y primer grado en un punto intermedio, por ejemplo $x = (1-b)/2$, se obtiene que el de 2º grado es mayor. Por tanto,

$$A(b) = \int_0^{1-b} (x - x^2 - bx)\, dx = \frac{1}{6}(1-b)^3.$$

b) El valor medio de la función $A(b)$ del apartado anterior para $b \in [0, \frac{1}{2}]$ se calcula según la siguiente fórmula:

$$\bar{A}\big|_{[0,\frac{1}{2}]} = \frac{1}{1/2}\int_0^{1/2} \frac{1}{6}(1-b)^3 db = -\frac{1}{12}(1-b)^4 \Big|_{b=0}^{b=1/2} = \frac{5}{64}.$$

c) La región $R_{\frac{1}{2}}$ está situada entre $x = 0$ y $x = 1/2$ con la curva $y = x - x^2$ por encima y la recta $y = x/2$ por debajo, de manera que el volumen del sólido que se obtiene al rotarla alrededor del eje x es

$$V_1 = \int_0^{1/2} \pi \left((x - x^2)^2 - (x/2)^2\right)\, dx = \frac{\pi}{160}.$$

La región $R_{\frac{1}{2}}$ observada desde el eje y se sitúa entre $y = 0$ e $y = 1/4$ teniendo por debajo la curva $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4y})$ (inversa del polinomio de 2º grado) y por encima la recta $x = 2y$ (inversa del polinomio de primer grado). El volumen pedido se expresa mediante la siguiente integral:

$$V_2 = \int_0^{1/4} \pi \left((2y)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4y}\right)\right)^2\right)\, dy = \frac{\pi}{96}.$$