CÁLCULO I (1^o GITI). CURSO 2019-20. **20/01/2020**

SOLUCIONES CONTROL Bloque 3: Integración impropia y numérica, sucesiones y series.

1. Sea la integral definida:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)dx$$

   a) Aproxima la integral utilizando la Regla del Trapecio con $n = 3$.

   b) Si queremos aproximar su valor con un error menor que 0.01 ¿qué número n de subintervalos tendríamos que utilizar?

   a) Como $n = 3$ se tiene $h = \frac{1}{3}$ y los extremos de los subintervalos son $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = 1$ y la aproximación mediante la regla del trapecio es:

$$T_3 = \frac{1}{6}(\operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(1)) + \frac{1}{3}(\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + \operatorname{arctg}(\frac{2}{3})) \approx 0,434150.$$

   b) Si el número de subintervalos es n la fórmula del error nos dice que

$$|E_T| \leq \frac{K}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2(1-0) = \frac{K}{12n^2},$$

   donde K es una cota superior del valor absoluto de la derivada segunda de $\operatorname{arctg}(x)$ en $[0, 1]$. Como $(\operatorname{arctg}(x))'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ es inmediato comprobar que podemos tomar $K = 2$. Así $|E_T| \leq \frac{2}{12n^2}$, y está expresión será menor que 0,01 si $n = 5$.

2. a) Calcula la siguiente integral impropia:

$$\int_1^\infty (x-1)^2 e^{-x} dx.$$

   b) Enuncia el Criterio de la Integral de convergencia de series.

   c) Utiliza los apartados anteriores para estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^\infty (n-1)^2 e^{-n}.$$

   a)

$$\int_1^\infty (x-1)^2 e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b (x-1)^2 e^{-x} dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-(x^2+1)e^{-x}\Big|_{x=1}^{x=b}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{2}{e} - \frac{b^2+1}{e^b}\right) = \frac{2}{e}.$$

   b) Criterio de la Integral de convergencia de series:
   Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$.

- Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

El teorema sigue siendo válido si se cumplen las hipótesis en un intervalo $[\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 1$.

c) Vamos a utilizar el Criterio de la Integral con $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$:

- f es continua en todo $\mathbf{R}$ por ser el producto de un polinomio y una exponencial.
- f es positiva en todo $\mathbf{R}$ por ser el producto de un cuadrado y una exponencial.
- Para ver que f es decreciente calculamos su derivada

$$f'(x) = 2(x-1)e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x} = (3-x)(x-1)e^{-x} \leq 0 \text{ para } x \geq 3,$$

lo que asegura que f es decreciente en $[3, \infty)$.

Como se cumplen las hipótesis y la integral $\int_1^{\infty}(x-1)^2 e^{-x} dx$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2 e^{-n}$ también es convergente.

3. Dadas las siguientes series:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n^3+n^4)e^{-n} \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1} \quad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^3+3}$$

Justifica, aplicando los criterios correspondientes, si divergen o convergen.

¿Cuáles convergen absolutamente?

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^3+n^4)e^{-n}$

Utilizamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^3+(n+1)^4)e^{-(n+1)}}{(n^3+n^4)e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$$

luego la serie es convergente.

La serie converge también absolutamente pues es de términos positivos.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}$

Utilizamos el criterio de comparación directa:

$$\frac{2^n-1}{3^n+1} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{para } n \geq 1.$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ es una serie geométrica de razón menor 1 es convergente y, por comparación directa, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n+1}$ también.

La serie converge también absolutamente pues es de términos positivos.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^3+3}$ es una serie alternada, y vamos a comprobar su convergencia mediante las dos condiciones necesarias:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}=0.$
- La sucesión $\displaystyle\left\{\frac{n^2+2}{n^3+3}\right\}$ debe ser decreciente a partir de un n_0. Para comprobarlo estudiamos el signo de la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+3}$:

$$f'(x)=\frac{-x^4-6x^2+6x}{(x^3+3)^2}<0 \text{ para } x\geq 1,$$

que nos permite asegurar que la sucesión es decreciente desde $n_0=1$.

Para estudiar su convergencia absoluta tenemos que estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}$, que es comparable en el límite con la serie armónica:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+2}{n^3+3}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+3}=1\in(0,\infty).$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^3+3}$ también. De manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+2}{n^3+3}$ es condicionalmente convergente.

4. Dada la función $f(x)=\cos(\pi x)$ y el centro $a=1$:

   a) Encuentra su polinomio de Taylor de grado 3, $p_3(x)$.

   b) Enuncia el teorema de Taylor.

   c) Da una estimación del error que se comete cuando se utiliza $p_3(x)$ para aproximar a $f(x)$ en el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

   d) Escribe la serie de Taylor y justifica que converge a $\cos(\pi x)$ para todo $x\in(-\infty,\infty)$.

a) Para buscar el polinomio de Taylor, y posteriormente la serie, calculamos algunas derivadas de f en $x=1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\pi x) & f(1) &= -1\\
f'(x) &= -\pi\,\mathrm{sen}(\pi x) & f'(1) &= 0\\
f''(x) &= -\pi^2\cos(\pi x) & f''(1) &= \pi^2\\
f'''(x) &= \pi^3\,\mathrm{sen}(\pi x) & f'''(1) &= 0\\
f^{iv)}(x) &= \pi^4\cos(\pi x) & f^{iv)}(1) &= -\pi^4
\end{aligned}$$

Así tenemos

$$p_3(x)=-1+\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2.$$

b) Teorema de Taylor:

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a.

Entonces para cada $x \in I$ existe un punto c, que depende de x y de n, situado entre a y x tal que:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

o también

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

c) Para estimar el error al utilizar $p_3(x)$ en vez de $f(x)$ en $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ aplicamos el teorema de Taylor que nos dice que

$$|\cos(\pi x) - p_3(x)| = \left| \frac{\pi^4 \cos(\pi c)}{4!}(x-1)^4 \right| \leq \frac{\pi^4}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0,25367.$$

d) La serie de Taylor es

$$-1 + \frac{\pi^2}{2!}(x-1)^2 - \frac{\pi^4}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}(x-1)^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}(x-1)^{2n}.$$

Para justificar que converge a $\cos(\pi x)$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$, comprobamos que el resto n-ésimo tiende a 0:

$$|\cos(\pi x) - p_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{(n+1)} \right| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}|x-1|^{(n+1)},$$

que tiende a 0 pues, para cualquier x, es una exponencial de base $\pi|x-1|$ dividido por el factorial.