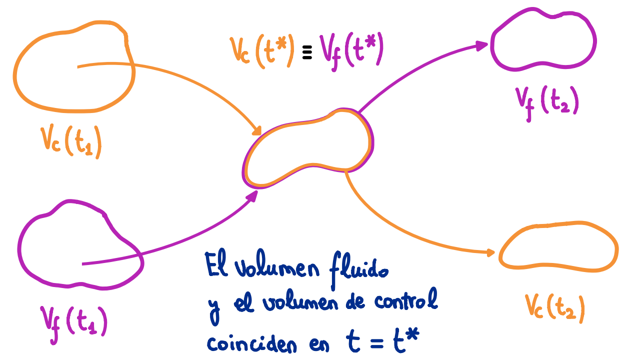
Ecuaciones de Navier ~ Stokes

Teorema de Transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{V_f(t)}}_{\text{Volumen fluido}} \phi \, dV = \frac{d}{dt}\underbrace{\int_{V_c(t)}}_{\text{Volumen de control}} \phi \, dV + \underbrace{\int_{\Sigma_c(t)} \phi(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Integral convectiva}}$$



En cuanto a las ecuaciones de Navier - Stokes:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho \, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho\cdot(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\cdot dA = 0}$$

Ecuación de continuidad (forma integral)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \longleftrightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\cdot\nabla\vec{v}}$$

Ecuación de continuidad (forma diferencial)

Derivada sustancial : $\frac{D\blacksquare}{Dt} = \frac{d\blacksquare}{dt} + \vec{v}\cdot\nabla\blacksquare$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V_c(t)} \rho\vec{v}\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \rho\cdot\vec{v}\cdot(\vec{v}-\vec{v}_c)\cdot\vec{n}\cdot dA = -\int_{\Sigma_c(t)} p\vec{n}\, dA + \int_{V_c(t)} \rho\vec{f}_m\, dV + \int_{\Sigma_c(t)} \bar{\bar{\tau}}_\mu\cdot\vec{n}\, dA}$$

Ecuación de cantidad de movimiento (forma integral)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \rho\vec{f}_m + \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}_\mu}$$

Ecuación de cantidad de movimiento (forma diferencial)

Tres formas de modificar la aceleración de la partícula fluida.

(Ec. continuidad)

$$\rho\left[\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\,\nabla\vec{v}}_{\frac{D\rho}{Dt}}\right] = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\underbrace{\vec{v}\,\nabla\vec{v}}_{\nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)-\vec{v}\wedge\vec{\omega}}\right] = -\nabla p + \rho\vec{f_m} + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}$$

donde $\vec{\omega}=\nabla\wedge\vec{v}$ es el vector vorticidad

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)-\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v}) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)+\vec{f_m}+\nabla\cdot\overline{\overline{\tau_\mu}}}$$

Energía total por unidad de masa : $e_t = \underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}}_{\text{Ecin macroscópica}} + \underbrace{e}_{\text{Einterna}}$

Generación de calor volumétrico
- Choques moleculares
- Absorción/Emisión fotones

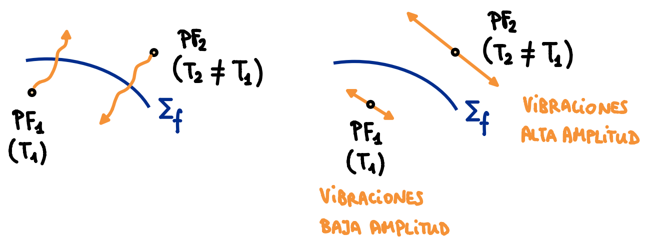
$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{V_f(t)}\rho\, e_t\, dV}_{\text{Vale 0 si } V_f \text{ es aislado}} = \underbrace{-\int_{\Sigma_f(t)}(p\cdot\vec{v})\cdot\vec{n}\cdot dA + \int_{V_f(t)}\rho\vec{f_m}\,dV + \int_{\Sigma_f(t)}\left(\overline{\overline{\tau_\mu}}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Trabajo por unidad de tiempo}} \underbrace{-\int_{\Sigma_f(t)}\vec{q}\cdot\vec{n}\cdot dA}_{\text{Cambios de Einterna}} + \int_{V_f(t)}q_v\,dV}$$

Ecuación de la energía (forma integral)

Vale 0 si V_f es aislado

Trabajo por unidad de tiempo que realizan las fuerzas que actúan sobre dV (mecanismos que pueden variar la energía)

Cambios de Einterna de partículas que entran y salen de Σ_f



$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}e_t) = \rho\frac{De_t}{Dt} = -\nabla\cdot(p\vec{v})+\nabla\cdot\left(\overline{\overline{\tau_\mu}}\,\vec{v}\right)+\rho\vec{f_m}\vec{v}-\nabla\cdot\vec{q}+q_v}$$

Ecuación de la energía (forma diferencial)

$$\overline{\overline{\tau_\mu}} = 2\mu\overline{\overline{S}} + \left(\mu_v-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\vec{v})\,\overline{\overline{I}}\ ,\ \text{con}\ S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$ Tensor de velocidades de deformación

$\vec{q} = -k\cdot\nabla T$ Ley de Fourier

$\left\{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v}\right.$

Para $q_v = 0$ la partícula fluida

e_t LC

l: coordenada línea de corriente

En líquidos $\longrightarrow$ se conserva $\underbrace{p + \rho U_m}_{\text{presión motriz}} + \underbrace{\frac{1}{2}|\vec{v}|^2}_{\text{presión dinámica}}$ a lo largo de la línea de corriente.

En gases $\longrightarrow$ se conservan
- $\vec{h} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}$ ENTALPÍA DE REMANSO
- s ENTROPÍA

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(\frac{T}{T_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$p_t = \rho_t R_g T_t$$

CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

- FLUJO LEJANO $(|\vec{x}| \to \infty)$: $\underbrace{\overset{\text{c.c. asintótica}}{\rho \to \rho_\infty}}_{\text{No necesaria en líquidos}}$; $\vec{v} \to \vec{v}_\infty$; $T \to T_\infty$

  FLUJO LEJOS DE UN OBSTÁCULO (CONDICIONES NO PERTURBADAS)

- $\underbrace{\text{SUPERFICIE SÓLIDA}}_{\text{Podemos definir puntos concretos}}$ $(\vec{x} \in \Sigma_s)$: $\underbrace{\vec{v} - \vec{v}_s = \vec{0}}_{\text{Por los efectos viscosos}}$; $\underbrace{T - T_s = 0}_{\text{Por conducción térmica}}$

- ENTRADA/SALIDA DE FLUJO: Condiciones compatibles con propagación de información.

NÚMEROS ADIMENSIONALES

COMPARA EL TÉRMINO CONVECTIVO DE LA ECdM CON ...

- NO ESTACIONARIO → STROUHAL (St)
- PRESIONES → EULER (Eu)
- FUERZAS MÁSICAS → FROUDE (Fr)
- VISCOSOS → REYNOLDS (Re)
- CONDUCCIÓN DE CALOR → PRANDTL (Pr)