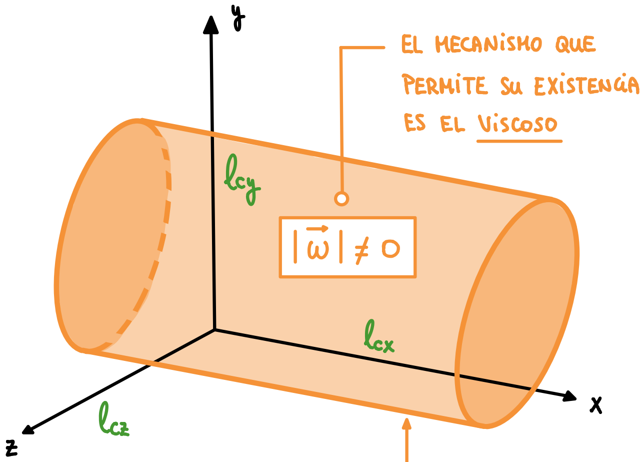
Flujo Esbelto Laminar de Cortadura Libre



Dirección privilegiada del flujo "x" : $l_{cx} \sim l$

$l_{cy}, l_{cz} \sim \delta \ll l$

Velocidad en x : $\begin{cases} u_c \\ \Delta u_c \end{cases}$ $(\Delta u_c \lesssim u_c)$

Velocidad en y,z : $\begin{cases} v_c, w_c \\ \Delta v_c, \Delta w_c \end{cases}$ $(\Delta v_c, \Delta w_c \sim v_c)$ → Usamos esta por ejemplo para órdenes de magnitud.

En algún punto la velocidad transversal es prácticamente nula.

$|\vec{\omega}| \sim \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ VORTICIDAD DOMINADA POR LAS DERIVADAS TRANSVERSALES DE LA VELOCIDAD EN "x".

- CORTADURA $\rightleftharpoons |\vec{\omega}| \neq 0$ $\boxed{\text{EN UNA REGIÓN DE TAMAÑO } O(\delta)}$.
- LIBRE : no hay interacción entre paredes.

$|y^2 + z^2| \gg \delta^2 : |\vec{\omega}| \longrightarrow 0$ Flujo irrotacional al alejarnos mucho

Es un flujo CASI - UNIDIRECCIONAL $\xrightarrow[\text{3D}]{\text{CONTINUIDAD}}$ $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\sim \frac{\Delta u_c}{l}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\sim \frac{v_c}{\delta}} = 0 \longrightarrow \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \underbrace{\frac{\delta}{l}}_{\text{ESBELTO}} \ll 1$

Y sabemos que : $\frac{\Delta u_c}{u_c} \lesssim 1$

$\longrightarrow \boxed{\frac{v_c}{u_c} \lesssim \frac{\delta}{l} \ll 1}$

Como ejemplos de flujos esbeltos están chorros, estelas, capa límite, capas de mezcla ...

En la región $y, z \sim \delta$, $|\vec{\omega}| \neq 0$:

$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \sim \frac{\boxed{v_c}}{\delta}$ Sin "Δ" porque v y w son parecidas

$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \sim \frac{\boxed{\Delta u_c}}{\delta}$ Con "Δ" porque u y w NO son parecidas

$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\boxed{\Delta u_c}}{\delta}$ Con "Δ" porque u y w NO son parecidas

$\omega_y, \omega_z \sim \frac{\Delta u_c}{\delta}$; $\frac{\omega_x}{\max(\omega_y, \omega_z)} \sim \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \frac{\delta}{l} \ll 1$

$\xrightarrow[\omega_x \text{ al ser } v_c \ll \Delta u_c]{\text{Se puede despreciar}}$ $\boxed{\vec{\omega} \approx \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{k}}$

TÉRMINO DOMINANTE DE LOS DOS TÉRMINOS VISCOSOS. SE ENCARGA DE DIFUNDIR LA VORTICIDAD

En $y \sim \delta$: $u_c \frac{\cdot}{l} \sim \nu \frac{\cdot}{\delta^2} \longrightarrow \left(\frac{\delta}{l}\right) \sim \frac{\nu}{u_c l} \sim Re \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{l} \sim Re}$

Igualando los órdenes de magnitud de los términos CONVECTIVO y DE PRESIONES de la ECdM$_x$:

$$u_c \frac{\Delta u_c}{\ell} \sim \frac{\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\ell} \longrightarrow \Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \sim u_c\,\Delta u_c$$

De la ecuación de continuidad : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \longrightarrow \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \frac{\delta}{\ell} \ll 1 \longrightarrow \frac{v_c}{u_c} \overset{\Delta u_c \lesssim u_c}{\lesssim} \frac{v_c}{\Delta u_c} \sim \frac{\delta}{\ell} \ll 1 \quad (*)$

ECdM$_y$ (en la dirección transversal) :

Se incluye el término no estacionario teniendo ya en cuenta $St \lesssim 1$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}}_{\sim u_c \frac{v_c}{\ell}\ (St \lesssim 1)} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}_{\sim \frac{\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\delta}} + \underbrace{\cancel{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}}_{\sim \nu \frac{v_c}{\ell^2}} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\sim \nu \frac{v_c}{\delta^2}}$$

$\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \ll 1$

$$\sim \longrightarrow \frac{u_c}{\ell} \sim \frac{\nu}{\delta} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{\ell} \sim Re^{-1/2} \ll 1}$$

Igualando los órdenes de magnitud de los términos CONVECTIVO y DE PRESIONES de la ECdM$_y$:

$$\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \sim u_c \frac{v_c}{\ell}\delta \overset{(*)}{\sim} \Delta u_c \frac{\delta}{\ell}\frac{u_c}{\ell}\delta \sim \Delta u_c\, u_c \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2$$

Por tanto :

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) &\sim u_c\,\Delta u_c\\ \Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) &\sim \Delta u_c\, u_c\left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2\end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{\Delta_y\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)}{\Delta_x\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)} \sim \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^2 \ll 1} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \approx 0}$$

DE CARA A RESOLVER LA ECdM$_x$ PODEMOS ASUMIR

ESTO OCURRE POR SER MUY DÉBILES LAS VELOCIDADES TRANSVERSALES

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \approx 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e \longrightarrow \text{EXTERIOR}$$

De momento contamos con las siguientes ecuaciones para resolver el flujo :

Desaparece si $St \ll 1$ (casi estacionario)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0} \qquad \boxed{\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right) \approx 0}$$

Si recordamos, la ECdM puede expresarse también como : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right) - \vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{v}) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \vec{f}_m + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}}_\mu$

$\frac{\partial u_e}{\partial t}$ (en el caso casi estacionario $= 0$) ... $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_e^2}{2}\right)$ ... U_m

Por tanto :

$$-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)_e \approx \boxed{\frac{\partial U_e}{\partial t}} + U_e\,\frac{dU_e}{dx}$$

DATO PREVIO, OBTENIDO DE RESOLVER FLUJO DE EULER (EXTERIOR) PREVIAMENTE

Así pues, las ecuaciones quedan :

Desaparecen si $St \ll 1$ (casi estacionario)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

CONTINUIDAD

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial U_e}{\partial t}} + U_e\,\frac{dU_e}{dx} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ECdMx

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+U_m\right)\approx 0$$

ECdMy