

# Ecuación de Karman

Ecuación de continuidad:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$       ECDM<sub>x</sub>:  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

Buscamos la forma conservativa de la ECDM<sub>x</sub>:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

CONTINUIDAD

$$\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Le restamos la ecuación de continuidad multiplicada por  $u_e$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$u_e \frac{\partial u}{\partial x} + u_e \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \ominus$$

---


$$\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) - \boxed{u_e} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) - \boxed{u_e} \frac{\partial v}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\downarrow \quad u_e \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u \cdot u_e)}{\partial x} - u \frac{du_e}{dx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot u) - \frac{\partial(u \cdot u_e)}{\partial x} + u \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) - \frac{\partial}{\partial y} (u_e \cdot v) - u_e \frac{du_e}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

VELOCIDADES EN LA CAPA LÍMITE

Integramos en la dirección transversal entre 0 y  $\infty$  :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(u - u_e) dy + v(u - u_e) \Big|_0^{\infty} + \frac{du_e}{dx} \int_0^{\infty} (u - u_e) dy = v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} u_e^2 \left( \frac{u}{u_e} - 1 \right) dy - v_p (-u_e) + \frac{du_e}{dx} \int_0^{\infty} u_e \left( \frac{u}{u_e} - 1 \right) dy = -v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\frac{\tau_p}{\mu}} \Big|_0$$

Multiplicando por -1 :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} u_e^2 \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy - v_p u_e + \frac{du_e}{dx} \int_0^{\infty} u_e \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy = \frac{\tau_p}{\rho}$$

Si recordamos las definiciones de los espesores de desplazamiento  $\delta_1$  y de cantidad de movimiento  $\delta_2$  :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

Y considerando capa límite incompresible ( $\rho = \text{cte}$ ) :

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy \quad \delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

Obtenemos :

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} u_e^2 \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy}_{u_e^2 \delta_2} - v_p u_e + \frac{du_e}{dx} \underbrace{\int_0^{\infty} u_e \left( 1 - \frac{u}{u_e} \right) dy}_{u_e \delta_1} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) - v_p u_e + u_e \frac{du_e}{dx} \delta_1 = \frac{\tau_p}{\rho}$$

...  $\frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) - v_p u_e + u_e \frac{du_e}{dx} \delta_1 = \frac{\tau_p}{\rho}$   $\rightarrow H_{12} \delta_2$  (lo queremos todo en función de  $\delta_2$ )

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$\frac{\tau_p}{\rho}$ , donde  $C_f$  es el coeficiente de fricción

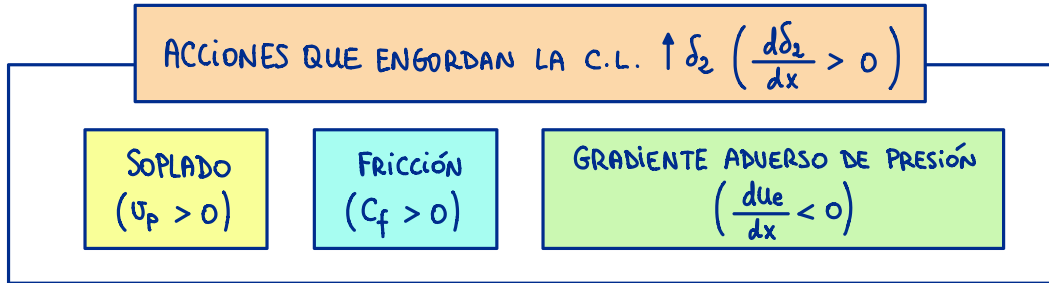
Finalmente llegamos a :

$$\frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H_{12}) \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \delta_2 = \frac{C_f}{2} + \frac{v_p}{u_e}$$

GRADIENTE DE PRESIONES      Fricción CON PARED      Succión/ SOPLADO

## ECUACIÓN DE KARMAN RÉGIMEN INCOMPRESIBLE

Le añadimos la condición inicial  $x = x_0 : \delta_2 = \delta_{20}$



$\delta_2$  ESTÁ MUY RELACIONADO CON LA RESISTENCIA AERODINÁMICA, POR LO QUE ES MUY RECOMENDABLE ESTUDIAR CÓMO EVOLUCIONA  $\delta_2$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70