Límites

V.M. Jiménez

Universidad de Alcalá (UAH)

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

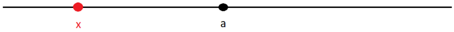
Hacer que x tienda hacia a

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a



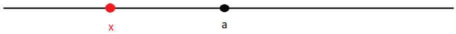
Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a



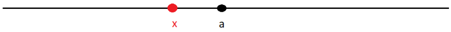
Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a



Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a

Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña

Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña $\mapsto$ Hacer $||x - a||$ más y más pequeña.

Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña $\mapsto$ Hacer $||x - a||$ más y más pequeña.
f(x) tiende hacia l

Límites

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña $\mapsto$ Hacer $||x-a||$ más y más pequeña.
f(x) tiende hacia l $\mapsto$ $||f(x)-l||$ más y más pequeña.

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña $\mapsto$ Hacer $||x-a||$ más y más pequeña.
f(x) tiende hacia l $\mapsto$ $||f(x)-l||$ más y más pequeña.
Luego, la frase anterior se traduce en::

"Se puede conseguir que $||f(x)-l||$ sea tan pequeño como se quiera, con tal de que $||x-a||$ sea suficientemente pequeño"

Una idea intuitiva

Nuestro próposito será el de dar significado a la siguiente expresión:

"Si x (la variable) tiende hacia a (un valor fijo), f(x) tiende hacia cierto número, llamémosle l."

Hacer que x tienda hacia a $\mapsto$ la distancia entre x y a es cada vez más pequeña $\mapsto$ Hacer $||x-a||$ más y más pequeña.
f(x) tiende hacia l $\mapsto$ $||f(x)-l||$ más y más pequeña.
Luego, la frase anterior se traduce en::

"Se puede conseguir que $||f(x)-l||$ sea tan pequeño como se quiera, con tal de que $||x-a||$ sea suficientemente pequeño"

Un poquito más riguroso...

Límites

Definición (de Cauchy)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $0 < ||x - a|| < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Límites

Definición (de Cauchy)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $0 < ||x - a|| < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

¿Por qué espacios euclídeos?

Límites

Algunos ejemplos

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Algunos ejemplos

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right) = ?$$

Límites

Partiendo de la definición dada, ¿cómo definirías los siguientes límites?

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Límites

Límite en infinito

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos, f **tiene límite l** en ∞, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real k de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $||x|| > k$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Límites

Límite en menos infinito

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos, f **tiene límite l** en $-\infty$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real k de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $||x|| < -k$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Límites

Límite infinito

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite** ∞ en $x = a$, si para cada número real $k > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x)|| > k$$

siempre que $0 < ||x - a|| < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Límites

Límite menos infinito

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite** $-\infty$ en $x = a$, si para cada número real $k > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x)|| < -k$$

siempre que $0 < ||x - a|| < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Límites

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in$, f **tiene límite l por la izquierda** en $x = a$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $0 < a - x < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

Límites

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in$, f **tiene límite l por la derecha** en $x = a$, si para cada número real $\epsilon > 0$, existe otro número real δ de tal manera que

$$||f(x) - l|| < \epsilon$$

siempre que $0 < x - a < \delta$. En este caso se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Límites

Otra aproximación al concepto de límite...

Límites

Otra aproximación al concepto de límite...

Pensaremos en una **sucesión** como en una "*correspondencia*", de tal manera que a cada número natural n se le asocia un elemento x_n de un conjunto X.

Límites

Otra aproximación al concepto de límite...

Pensaremos en una **sucesión** como en una "*correspondencia*", de tal manera que a cada número natural n se le asocia un elemento x_n de un conjunto X.

¿Otra forma de escribir esto?

Límites

Definición

Una **sucesión** es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Se escribe

$$f(n) = x_n.$$

A la sucesión así escrita se le denota como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y x_n es el **término general de la sucesión**.

Límites

Definición

Una **sucesión** es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Se escribe

$$f(n) = x_n.$$

A la sucesión así escrita se le denota como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y x_n es el **término general de la sucesión**.

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Creciente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Creciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \geq n_2$

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Creciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \geq n_2$

Estrictamente creciente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Creciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \geq n_2$

Estrictamente creciente: si $x_{n_1} > x_{n_2}$ siempre que $n_1 > n_2$

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Decreciente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Decreciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \leq n_2$

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Decreciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \leq n_2$

Estrictamente decreciente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Decreciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \leq n_2$

Estrictamente decreciente: si $x_{n_1} > x_{n_2}$ siempre que $n_1 < x_{n_2}$

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

Decreciente: si $x_{n_1} \geq x_{n_2}$ siempre que $n_1 \leq n_2$

Estrictamente decreciente: si $x_{n_1} > x_{n_2}$ siempre que $n_1 < x_{n_2}$

Monótona: Creciente o decreciente.

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

Acotada inferiormente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

> **Acotada inferiormente**: si existe un k tal que $x_n \geq k$ para todo n.

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

Acotada inferiormente: si existe un k tal que $x_n \geq k$ para todo n.

Acotada superiormente:

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

- **Acotada inferiormente**: si existe un k tal que $x_n \geq k$ para todo n.
- **Acotada superiormente**: si existe un r tal que $x_n \leq r$ para todo n.

Límites

Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está:

- **Acotada inferiormente**: si existe un k tal que $x_n \geq k$ para todo n.
- **Acotada superiormente**: si existe un r tal que $x_n \leq r$ para todo n.
- **Acotada**: Acotada inferiormente o superiormente.

Límites

Convergencia

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite l, si para cualquier número real $\epsilon > 0$, existe un natural N_0 tal que se cumple que

$$||l - x_n|| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N_0$. Se escribe,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

ó,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n \to \infty} l$$

Límites

Divergencia

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente a ∞, si para cualquier número real $k > 0$, existe un natural N_0 tal que se cumple que

$$||x_n|| > k,$$

para todo $n \geq N_0$. Se escribe,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

ó,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Límites

Divergencia

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente a $-\infty$, si para cualquier número real $k > 0$, existe un natural N_0 tal que se cumple que

$$||x_n|| < -k,$$

para todo $n \geq N_0$. Se escribe,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

ó,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

Límites

Definición (de Heine)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cualquier sucesión (x_n) convergente a a, se verifica que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite l.

Límites

Definición (de Heine)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cualquier sucesión (x_n) convergente a a, se verifica que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite l.

¿Cuáles serían las definiciones equivalentes cuando a ó l son infinito?

Límites

Definición (de Heine)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cualquier sucesión (x_n) convergente a a, se verifica que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite l.

¿Cuáles serían las definiciones equivalentes cuando a ó l son infinito? ¿y para los límites laterales?

Límites

Definición (de Heine)

Sea $f : V \to V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$, f **tiene límite l** en $x = a$, si para cualquier sucesión (x_n) convergente a a, se verifica que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite l.

¿Cuáles serían las definiciones equivalentes cuando a ó l son infinito? ¿y para los límites laterales?

¿Sabemos ahora resolver el límite de $sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ cuando x tiende a 0?

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- $$\lim_{x \to c} b = b$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- $$\lim_{x \to c} bf(x) = bl_1$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- Si l_1 y l_2 no son ambos infinitos de distintos signos,

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \pm g(x) \right) = l_1 \pm l_2$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- Si l_1 y l_2 no son uno 0 y el otro $\pm\infty$,

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)\, g(x) \right) = l_1 l_2$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- Si l_1 y l_2 no son ambos 0 o ambos infinitos,

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{l_1}{l_2}$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- $$\lim_{x \to c} \left(m^{g(x)} \right) = m^{l_2}, \quad m > 0$$

Límites

Es importante notar que las **propiedades de los límites** dejan exentos algunos caso

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- Si no es ninguno de estos casos: $l_1 = 1$ y $l_2 = \infty$, $l_1 = \infty$ y $l_2 = 0$, $l_1 = 0$ y $l_2 = 0$,

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)^{g(x)} \right) = l_1^{l_2}, \quad l_1 > 0$$

Algunos ejemplos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}} = ?$$

Ejercicio

Calcula los siguientes límites:

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-1}{x^2+2x}$$
- $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$
- $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$$

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) + g(x) \right),$$

si $l_1 = \infty$ y $l_2 = -\infty$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)\, g(x) \right),$$

  Si $l_1 = 0$ y $l_2 = \pm\infty$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right),$$

si $l_1 = l_2 = 0$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right),$$

si $l_1 = \pm\infty$ y $l_2 = \pm\infty$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** 0^0:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)^{g(x)} \right),$$

  si $l_1 = l_2 = 0$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** ∞^0:

$$\lim_{x \to c} \left(f(x)^{g(x)} \right),$$

si $l_1 = \pm\infty$ y $l_2 = 0$.

¿Qué ocurre con los casos que excluimos en las propiedades de los límites?

A estos casos se les suele llamar **indeterminaciones**.

Propiedades de lo límites

Consideremos f y g dos funciones con límites l_1 y l_2 en $x = c$, respectivamente:

- **Caso** 1^{∞}:

$$\lim_{x \to c} \left(f\left(x\right)^{g(x)} \right),$$

si $l_1 = 1$ y $l_2 = \pm\infty$.

Algunas estrategias

- Para los tres últimos caso se puede utilizar:

$$f\left(x\right)^{g(x)} = e^{Ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)Ln(f(x))}.$$

Algunas estrategias

- En el caso $\frac{\infty}{\infty}$ con $f(x)$ y $g(x)$ polinomios, podemos dividir ambos por x^n, donde n es el máximo entre el grado de $f(x)$ y $g(x)$. Análogo, para el caso en el que $f(x)$ y $g(x)$ sea funciones exponenciales.

Algunas estrategias

- ¿Qué ocurre con $\frac{0}{0}$ y $0 \cdot \infty$?

Ejercicio:

Hallar los siguientes límites:

- $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{sen\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2cos\left(x\right)-\sqrt{3}}$$

Regla de Sandwich

Supongamos que se cumple que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno de c (salvo, quizá, en el propio c) y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$$

Entonces,

$$\lim_{x \to c} g(x) = l$$