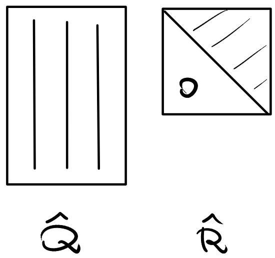
Ejemplo de factorización QR (reducida)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$



$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{A^{(1)}}{\underbrace{\|A^{(1)}\|}_{= r_{11} = 2}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{V^{(2)}}{\underbrace{\|V^{(2)}\|}_{= r_{22} = 4}} , \quad V^{(2)} = A^{(2)} - \langle \underbrace{A^{(2)}, q_1}_{r_{12}} \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = (1, 5, 1, 5) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 6$$

$$q_3 = \frac{V^{(3)}}{\underbrace{\|V^{(3)}\|}_{= r_{33} = 1}} , \quad V^{(3)} = A^{(3)} - \langle \underbrace{A^{(3)}, q_1}_{r_{13} = 2} \rangle q_1 - \langle \underbrace{A^{(3)}, q_2}_{r_{23} = -1} \rangle q_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

6.3 TRIANGULARIZACIÓN DE HOUSEHOLDER

1. en ciertas ocasiones es útil tener una factorización QR en la que Q es UNITARIA

$$\underbrace{A}_{n \times m} = \underbrace{\left[\,\hat{Q} \;\middle|\; \quad\,\right]}_{m \,|\, n-m} \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n-m \end{matrix}$$

factorización QR completa

$Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$R \in \mathbb{C}^{n \times m}$

A: $\mathbb{C}^{n \times m}$, $n \geq m$

Q: t.q. $Q^*Q = QQ^* = I$ ← unitaria (ortogonal en $\mathbb{R}$)

<u>observaciones</u> sobre QR completa:

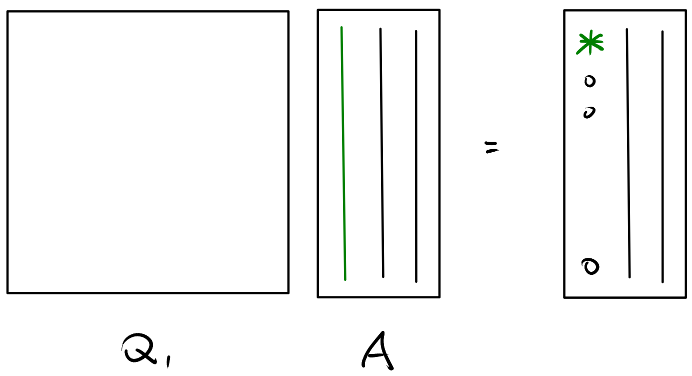
- Q se puede obtener por Gram-Schmidt construyendo $\hat{Q}$ y completando la base → se escogen vectores aleatorios y se procede con Gram-Schmidt
- cualquier algoritmo que produzca la QR completa construye una Q cuyas primeras columnas generan el mismo subespacio generado por las columnas de A → la R tiene ceros debajo de la $\hat{R}$

2. problema: el método de Gram-Schmidt es intrínsecamente <u>inestable</u>:

<u>ejemplo ilustrativo</u>: sean $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ normalizados

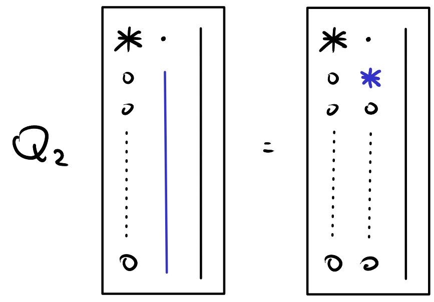
$(1-\varepsilon)$

al dividir las componentes de $v^{(2)}$ por este número pequeño se amplifican los errores idea de Householder: buscar Q_1 unitaria t.q.



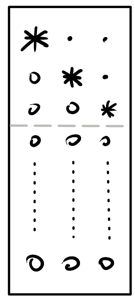
en la primera columna ponemos a cero todos los elementos excepto por el primero

↳ si sabemos encontrar una Q_1 así, entonces podemos hacer la misma operación para la segunda columna de $Q_1 A$, mirando sólo a partir del segundo elemento:



$\Rightarrow$ si A tiene m columnas, podemos construir m matrices unitarias $\{Q_j\}_{j=1}^m$ tales que

$\underbrace{Q_m Q_{m-1} \cdots Q_1}_{\text{producto de matrices unitarias: sigue siendo una matriz unitaria}} A =$



triangular superior

construcción: reflexión de Householder

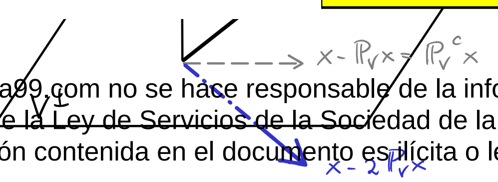
lema: sea $x \in \mathbb{C}^k$, $x \neq 0$, y sea $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{C}^k$

$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{C}^k$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ t.q. $(I - 2P_v)x = \beta e_1$.

observaciones:

- $I - 2P_v$ es unitaria: $(I-2P_v)^*(I-2P_v) \overset{P_v^* = P_v}{=} I - 4P_v + 4P_v^2 \overset{P_v = P_v^2}{=} I$

$\Rightarrow$ el lema nos dice que es una matriz del tipo deseado: es unitaria y manda cualquier x en un múltiplo de e_1



que se obtiene restando $P_v x$ a x.

restando $P_v x$ una vez más, se manda x a su simétrico respecto al plano $v^\perp$

demostración (en $\mathbb{R}^k$): queremos hallar β, v t.q. $(I - 2\mathbb{P}_v)x = \beta e_1$

recordar que $\mathbb{P}_v x = \langle x, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|}$

- $\mathbb{P}_v x = \frac{1}{2}(x - \beta e_1) \iff \langle x, v\rangle v = \frac{\|v\|^2}{2}(x - \beta e_1)$ $\Rightarrow \alpha \langle x, v \rangle = \frac{\|v\|^2}{2}$

  $\iff v = \alpha(x - \beta e_1)$ para cualquier α

- $$\begin{cases} \langle x, v\rangle = \alpha\left(\|x\|^2 - \beta \underbrace{\langle x, e_1\rangle}_{x_1}\right) \\ \|v\|^2 = \alpha^2 \langle x - \beta e_1, x - \beta e_1\rangle = \alpha^2\left(\|x\|^2 + \beta^2 - 2\beta\langle x, e_1\rangle\right) \end{cases}$$

- desde la identidad $\alpha \langle x, v\rangle = \frac{\|v\|^2}{2}$ obtenemos

$$\|x\|^2 - \beta x_1 = \frac{\|x\|^2 + \beta^2 - 2\beta x_1}{2} \Rightarrow \beta = \pm \|x\| \qquad \#$$

$\cdot \sim \cdot$

Estabilidad de esta operación respecto al problema de manejar vectores casi paralelos:

- dado un x, hemos encontrado (en $\mathbb{R}^k$) dos vectores que pueden generar una reflexión que cumple con nuestros requisitos: $v = x \pm \|x\| e_1$
- si x es casi paralelo a e_1, eligiendo el signo $-$ tenemos el mismo problema de antes: perdemos precisión en v y amplificamos este error al normalizarlo para construir $\mathbb{P}_v$. por la misma razón, si x es casi paralelo a $-e_1$ queremos usar el signo ...

paralelo a e_1 o a $-e_1$ es el signo de $x_1 = \langle x, e_1\rangle$. si $x_1 = 0$ es indiferente y se elige +

¿cómo cambia la demostración en $\mathbb{C}^k$?

- las diferencias están en α y en el producto escalar $\langle x, e_1 \rangle = x_1$, que podrían ser complejos

- para $\beta \in \mathbb{R}$, tenemos $\begin{cases} \langle x, v \rangle = \bar{\alpha}\left(\|x\|^2 - \beta x_1\right) \\ \|v\|^2 = |\alpha|^2\left(\|x\|^2 + \beta^2 - 2\beta\,\mathrm{Re}(x_1)\right) \end{cases}$

↳ la identidad $\alpha \langle x, v \rangle = \frac{\|v\|^2}{2}$ sigue eliminando α de la ecuación ↳ sólo hay que ocuparse de x_1

la última identidad es entonces:

$$\|x\|^2 - \beta x_1 = \frac{\|x\|^2 + \beta^2 - 2\beta\,\mathrm{Re}(x_1)}{2} \iff \beta^2 = \|x\|^2 - 2i\beta\,\mathrm{Im}(x_1)$$

$\Rightarrow$ si $\mathrm{Im}(x_1) \neq 0$ no existe solución con β real

- para $\beta \in \mathbb{C}$, tenemos $\begin{cases} \langle x, v \rangle = \bar{\alpha}\left(\|x\|^2 - \bar{\beta} x_1\right) \\ \|v\|^2 = |\alpha|^2\left(\|x\|^2 + |\beta|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\beta} x_1)\right) \end{cases}$

desde aquí se obtiene

$$\|x\|^2 - \bar{\beta} x_1 = \frac{\|x\|^2 + |\beta|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\beta} x_1)}{2} \iff |\beta|^2 = \|x\|^2 - 2i\,\mathrm{Im}(\bar{\beta} x_1)$$

$$\iff \begin{cases} |\beta|^2 = \|x\|^2 \\ \bar{\beta} x_1 \in \mathbb{R} \end{cases} : \quad \beta = \begin{cases} \pm \frac{x_1}{|x_1|}\|x\| & \text{si } x_1 \neq 0 \\ \|x\| & \text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

en $\mathbb{C}^k$ se elige $\boxed{v = x + \sigma_+(x_1)\|x\| e_1}$

donde $\sigma_+(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ para $z \in \mathbb{C}$.