6.4 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES CON QR

- sea $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertible, y sea $A = QR$

QR completa
Q unitaria
R triang. sup. e invertible

queremos resolver $Ax = b$

$$QRx = b \iff Rx = Q^* b$$

$\hookrightarrow \sim 2m^2$ flop

$\hookrightarrow$ sistema triangular $\sim m^2$ flop

- pregunta: si no conocemos explícitamente Q, y conocemos solo los vectores $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{m}$ de Householder ¿es posible resolver con el mismo número de flop?

triangularización de Householder:

$$A = \underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_m}_{Q} R$$

$$\Rightarrow Q^* b = Q_m^* Q_{m-1}^* \dots Q_1^* b = Q_m(Q_{m-1} \dots (Q_1 b))$$

productos matriz por vector

para $k \in \{1..m\}$, $$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{(k-1)\times(k-1)} & 0 \\ \hline 0 & I_{(m-k+1)\times(m-k+1)} - 2\mathbb{P}_{v^{(k)}} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x(1:k-1) \\ \vdots \\ x(k:m) - 2\langle x(k:m), v^{(k)}\rangle v^{(k)} \end{pmatrix}$$

algoritmo para calcular $Q^* b$ a partir de $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{n}$

for $k = 1 : n$

$$b(k:n) = b(k:n) - \underset{(n-k+1)}{2} \langle \underbrace{b(k:n), v^{(k)}}_{2(n-k+1)-1} \rangle \underset{(n-k+1)}{v^{(k)}}$$

end

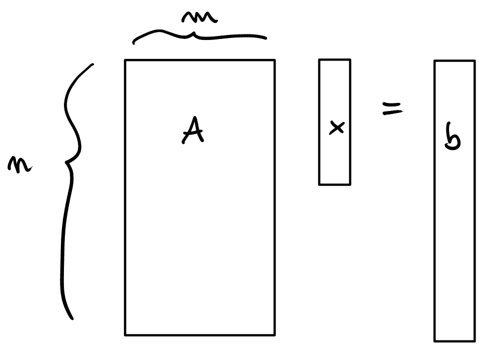
↳ el vector b de output de este algoritmo es el resultado de $Q^* b$ ← input

¿ cuántos flop?

$$\text{flop} \simeq 4 \sum_{k=1}^{n} \overbrace{(n-k)}^{\ell} = 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \simeq 2n^2$$

7 PROBLEMAS DE MÍNIMOS CUADRADOS

7.1 Problema I : sea $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ $rg(A) = m < n$



sistema sobredeterminado o incompatible : más ecuaciones que incógnitas

- si $b \in Ran(A) = \{v \in \mathbb{C}^n : v = Ax\}$

  $\Rightarrow \exists$ sol. , y se puede encontrar con $A = \hat{Q}\hat{R}$ ← triang. INVERT

  $Ax = b \iff \hat{R}x = \hat{Q}^* b$

observación : $\forall b \in \mathbb{C}^n$ podemos calcular

$$\hat{R}^{-1}\hat{Q}^* b$$

pero si $b \notin Ran(A)$, esto no resuelve $Ax = b$

↓

en este caso $\nexists$ solución

<u>def</u> : la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es $x_b \in \mathbb{C}^n$ t.q.

$$\|Ax_b - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

minimización de $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$

<u>significado</u> y <u>relevancia</u>

m

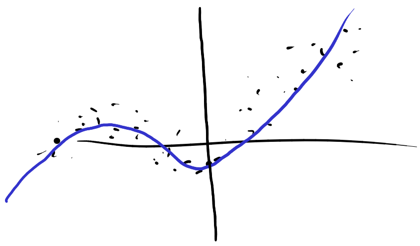
de las columnas de A

A x

- situación: tenemos a disposición $m < n$ vectores lin. indep. para representar un vector cualquiera de $\mathbb{C}^n$

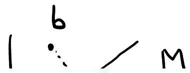
  ↳ problema I: encontrar la combinación lineal de las columnas que más se acerca a b en $\|\cdot\|_2$

  ↳ problema de aproximación



ejemplo: best fit polinomial

- geometricamente, este problema es equivalente al siguiente:
  - tenemos: . $M \subset \mathbb{C}^n$ subespacio vectorial de dimensión $m < n$
    . $b \in \mathbb{C}^n$
  - queremos encontrar el $v \in M$ que esté más cerca a b
  - equivalencia: si $M = \mathrm{Ran}(A)$, $v \in M \iff v = Ax$



mínimos cuadrados de $Ax = b$