6.4 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES CON QR

- Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ invertible, y sea $A = QR$

QR completa
Q unitaria
R triang. sup. e invertible

queremos resolver $Ax = b$

$$QRx = b \iff Rx = Q^* b$$

↳ $\sim 2m^2$ flop

↳ sistema triangular $\sim m^2$ flop

- pregunta: si no conocemos explícitamente Q, y conocemos solo los vectores $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{m}$ de Householder ¿es posible resolver con el mismo número de flop?

triangularización de Householder:

$$A = \underbrace{Q_1 Q_2 \cdots Q_m}_{Q} R$$

$$\Rightarrow \quad Q^* b = Q_m^* Q_{m-1}^* \cdots Q_1^* b = Q_m(Q_{m-1} \cdots (Q_1 b))$$

productos matriz por vector

para $k \in \{1..m\}$, $$Q_k = \left(\begin{array}{c|c} I_{(k-1)\times(k-1)} & 0 \\ \hline 0 & I_{(m-k+1)\times(m-k+1)} - 2\mathbb{P}_{v^{(k)}} \end{array}\right)$$

si $u \in \mathbb{C}^m$, decimos $$u = \left(\begin{array}{c} u(1:k-1) \\ \hline u(k:m) \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Q_k u = \left(\begin{array}{c} u(1:k-1) \\ \hline u(k:m) - 2\langle u(k:m), v^{(k)}\rangle v^{(k)} \end{array}\right)$$

algoritmo para calcular $Q^* b$ a partir de $\{v^{(k)}\}_{k=1}^{n}$

for $k = 1 : n$

$$b(k:n) = b(k:n) \underset{\downarrow \atop (n-k+1)}{-} 2 \langle \underbrace{b(k:n), v^{(k)}}_{2(n-k+1)-1} \rangle \underset{\downarrow \atop (n-k+1)}{v^{(k)}}$$

end

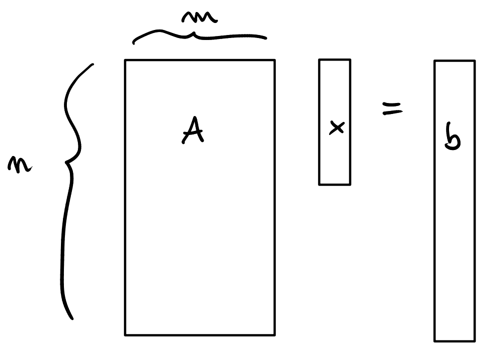
↳ el vector b de output de este algoritmo es el resultado de $Q^* b_{\nwarrow \text{input}}$

¿cuántos flop?

$$\text{flop} \simeq 4 \sum_{k=1}^{n} \overbrace{(n-k)}^{\ell} = 4 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \simeq 2n^2$$

7 PROBLEMAS DE MÍNIMOS CUADRADOS

7.1 Problema I : sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ $rg(A) = m < n$



sistema sobredeterminado o incompatible: más ecuaciones que incógnitas

- si $b \in Ran(A) = \{v \in \mathbb{C}^n : v = Ax\}$ $\Rightarrow \exists$ sol., y se puede encontrar con $A = \hat{Q}\hat{R}$ ← triang. INVERT

  $Ax = b \Leftrightarrow \hat{R}x = \hat{Q}^* b$

observación: $\forall b \in \mathbb{C}^n$ podemos calcular
$\hat{R}^{-1}\hat{Q}^* b$

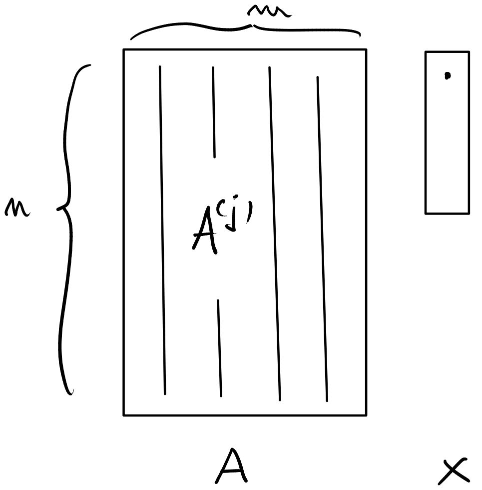
pero si $b \notin Ran(A)$, esto no resuelve $Ax = b$
↓
en este caso $\nexists$ solución

def: la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es $x_b \in \mathbb{C}^m$ t.q.

$$\|Ax_b - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^m$$

minimización de $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$

significado y relevancia



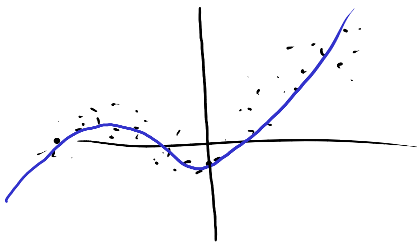
$$= \sum_{j=1}^{m} x_j A^{(j)}$$

combinación lineal de las columnas de A

- situación: tenemos a disposición $m < n$ vectores lin. indep. para representar un vector cualquiera de $\mathbb{C}^n$

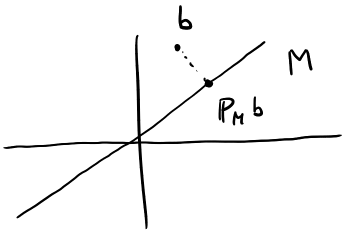
  ↳ problema I: encontrar la combinación lineal de las columnas que más se acerca a b en $\|\cdot\|_2$

  ↳ problema de aproximación



ejemplo: best fit polinomial

- geométricamente, este problema es equivalente al siguiente:
  - tenemos: . $M \subset \mathbb{C}^n$ subespacio vectorial de dimensión $m < n$
    . $b \in \mathbb{C}^n$
  - queremos encontrar el $v \in M$ que esté más cerca a b
  - equivalencia: si $M = \operatorname{Ran}(A)$, $v \in M \Leftrightarrow v = Ax$



$v \in M$ tal que $\|v - b\|_2 \leq \|v' - b\|_2$ $\forall v' \in M$ es dado por $v = \mathbb{P}_M b$

↳ este enunciado se podrá demostrar a partir de la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$