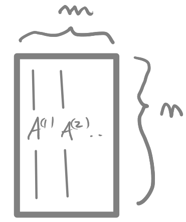
6.2 FACTORIZACIÓN QR (reducida)

↳ ortonormalización de Gram-Schmidt

<u>teorema</u>: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $m \leq n$

$rg(A) = m$ (rango max)

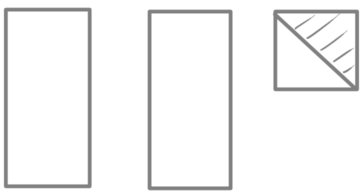


$\Rightarrow \exists\ \hat{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ triangular superior invertible

$\exists\ \hat{Q} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\hat{Q} = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{pmatrix}$ t.q.

- $\mathcal{L}(\{q_j\}_{j=1}^{k}) = \mathcal{L}(\{A^{(j)}\}_{j=1}^{k}) \quad \forall\, k \in \{1..m\}$
- $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{i,j}$ $\longrightarrow$ $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

t.q. $A = \hat{Q}\ \hat{R}$.



<u>demostración</u>:

- $q_1 = \dfrac{A^{(1)}}{\|A^{(1)}\|}$ $\qquad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

- $q_2 = \dfrac{A^{(2)} - \langle A^{(2)}, q_1 \rangle q_1}{\|A^{(2)} - \langle A^{(2)}, q_1 \rangle q_1\|} = \dfrac{A^{(2)} - P_{q_1} A^{(2)}}{\|A^{(2)} - P_{q_1} A^{(2)}\|} = \dfrac{P_{q_1}^{c} A^{(2)}}{\|P_{q_1}^{c} A^{(2)}\|}$

  $\neq 0$ porque A tiene rg max

- $q_k = \dfrac{A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle A^{(k)}, q_j \rangle q_j}{\|A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \langle A^{(k)}, q_j \rangle q_j\|}$, $k = 2 \ldots m$ $\longrightarrow$

. sea $r_{jk} = \begin{cases} \langle A^{(k)}, q_j \rangle & , j = 1 \dots k-1 \\ \| A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j \| & , j = k \end{cases}$ $\leftarrow \hat{R}$

$$\Rightarrow \quad q_k = \frac{A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j}{r_{kk}} \qquad k = 2 \dots m$$

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} r_{jk} q_j \quad : \quad A = \hat{Q} \hat{R}$$

\#

.~.

Algoritmo de Gram-Schmidt CLÁSICO

```
r11 = ||A(1)|| ,   q1 = A(1) / r11
for k = 2 : m
    V(k) = A(k)
    for j = 1 : k-1
        rjk = < A(k), qj >
        V(k) = V(k) - rjk qj
    end
    rkk = ||V(k)|| ,   qk = V(k) / rkk
end
```

↳ en cada paso k se restan a $V^{(k)}$ todas las proyecciones sobre los q_j $j = 1 \dots k-1$

$$V^{(k)} = \underbrace{\mathbb{P}^c_{q_{k-1}} \mathbb{P}^c_{q_{k-2}} \dots \mathbb{P}^c_{q_1}}_{\text{composición de proyecciones}} V^{(k)}$$

composición de proyecciones $\rightarrow$ errores numéricos

Algoritmo de Gram-Schmidt MODIFICADO

idea $V^{(k)} = A^{(k)} \quad k = 1 \dots m$

$V^{(k)} = \mathbb{P}^c_{q_1} V^{(k)} \quad k = 2 \dots m$

$V^{(k)} = \mathbb{P}^c_{q_2} V^{(k)} \quad k = 3 \dots m$

$\vdots \qquad \vdots$

los vectores se mantienen más ortogonales entre ellos

implementación

$V = A \qquad \left(V = \left(V^{(1)}\ V^{(2)} \dots V^{(m)} \right) \right)$

for $j = 1 : m$

$\quad r_{jj} = \| V^{(j)} \|, \quad q_j = \frac{V^{(j)}}{r_{jj}}$

$\quad$ for $k = j+1 : m$

$\qquad r_{jk} = \langle A^{(k)}, q_j \rangle$ → producto escalar $\mathbb{C}^m$: n prod + $(n-1)$ sum

$\qquad V^{(k)} = V^{(k)} - r_{jk} q_j$ → n prod + n sum

$\quad$ end

end

este algoritmo produce vectores q_j "más ortonormales":

es más pequeño el ERROR $\| \hat{Q}^* \hat{Q} - I_{m \times m} \|$

en una norma de $\mathbb{C}^{m \times m}$

¿cuantas operaciones aritméticas? $\simeq 2 n m^2$

for $j=1:m$

$\quad$ for $k=j+1:m$ → $\text{flop} \simeq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m} 4n = 4n \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (m-j)}_{\sum_{i=0}^{m-1} i} \simeq 2nm^2$

$\qquad 4n$

$\quad$ end

end