6.2 FACTORIZACIÓN QR (reducida)

↳ ortonormalización de Gram-Schmidt

<ins>teorema</ins>: sea $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $m \leqslant n$

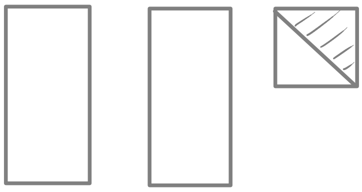
$rg(A) = m$ (rango max)

$\Rightarrow \exists\ \hat{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ triangular superior invertible

$\exists\ \hat{Q} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\hat{Q} = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \cdots & q_m \\ | & & | \end{pmatrix}$ t.q.

- $\mathcal{L}(\{q_j\}_{j=1}^{k}) = \mathcal{L}(\{A^{(j)}\}_{j=1}^{k}) \quad \forall k \in \{1 .. m\}$
- $< q_i , q_j > = \delta_{i,j}$ → $<x,y>_{\mathbb{C}^m} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$

t.q. $A = \hat{Q}\ \hat{R}$.



<ins>demostración</ins>:

- $q_1 = \dfrac{A^{(1)}}{\|A^{(1)}\|}$ $\qquad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$

- $q_2 = \dfrac{A^{(2)} - <A^{(2)}, q_1> q_1}{\| A^{(2)} - <A^{(2)}, q_1> q_1 \|} = \dfrac{A^{(2)} - \mathbb{P}_{q_1} A^{(2)}}{\| A^{(2)} - \mathbb{P}_{q_1} A^{(2)} \|} = \dfrac{\mathbb{P}_{q_1}^{c} A^{(2)}}{\| \mathbb{P}_{q_1}^{c} A^{(2)} \|}$

$\| A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} < A^{(k)}, q_j > q_j \|$ ⟶

- Sea $r_{jk} = \begin{cases} \langle A^{(k)}, q_j \rangle & , \; j = 1 \dots k-1 \\ \left\| A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j \right\| & , \; j = k \end{cases}$ $\leftarrow \hat{R}$

$$\Rightarrow \quad q_k = \frac{A^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j}{r_{kk}} \qquad k = 2 \dots m$$

$$A^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} r_{jk} q_j \quad : \quad A = \hat{Q} \hat{R} \qquad \#$$

·~·

Algoritmo de Gram-Schmidt CLÁSICO

$r_{11} = \| A^{(1)} \|$, $q_1 = \dfrac{A^{(1)}}{r_{11}}$

for $k = 2 : m$

  $V^{(k)} = A^{(k)}$

  for $j = 1 : k-1$

    $r_{jk} = \langle A^{(k)}, q_j \rangle$

    $V^{(k)} = V^{(k)} - r_{jk} q_j$

  end

  $r_{kk} = \| V^{(k)} \|$, $q_k = \dfrac{V^{(k)}}{r_{kk}}$

end

$\underbrace{q_{k-1} \quad q_{k-2} \quad \dots \quad q_1}$

composición de proyectores $\Rightarrow$ errores numéricos

Algoritmo de Gram-Schmidt MODIFICADO

idea

$$V^{(k)} = A^{(k)} \qquad k = 1 \dots m$$

$$V^{(k)} = \mathbb{P}^c_{q_1} V^{(k)} \qquad k = 2 \dots m$$

$$V^{(k)} = \mathbb{P}^c_{q_2} V^{(k)} \qquad k = 3 \dots m$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

los vectores se mantienen más ortogonales entre ellos

implementación

$V = A \qquad \left(V = \left(V^{(1)}\ V^{(2)} \dots V^{(m)} \right) \right)$

for $j = 1 : m$

$\quad r_{jj} = \| V^{(j)} \| \ , \quad q_j = \dfrac{V^{(j)}}{r_{jj}}$

$\quad$ for $k = j+1 : m$

$\quad\quad r_{jk} = \langle A^{(k)}, q_j \rangle$ $\rightarrow$ producto escalar $\mathbb{C}^m$: m prod $+ (m-1)$ sum

$\quad\quad V^{(k)} = V^{(k)} - r_{jk} q_j$ $\rightarrow$ m prod $+$ m sum

$\quad$ end

end

este algoritmo produce vectores q_j "más ortonormales":

es más pequeño el ERROR $\| \hat{Q}^* \hat{Q} - I_{m \times m} \|$

en una norma de $\mathbb{C}^{m \times m}$

$4m$

end

end