

Unidad 3: Resolución de ecuaciones

Ceros o raíces de una función.

Máximos y mínimos.

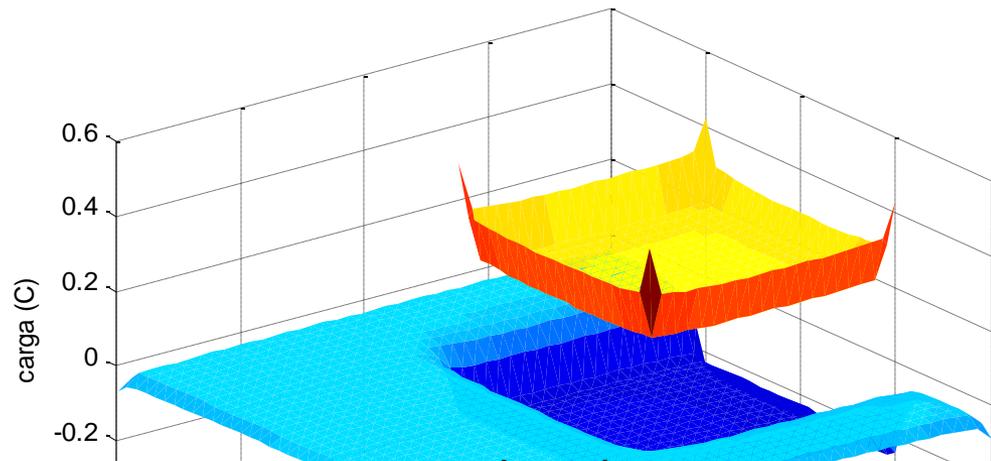
Sistemas de ecuaciones lineales.

Colisiones entre partículas: conservación del momento y la energía.

Distribuciones de carga eléctrica.

Circuitos eléctricos.

Sistemas elásticos.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Raíces (o ceros) de una función

Las raíces (o ceros) de una función $f(x)$ son aquellos valores de x en los que $f(x)=0$.

Utilidad:

Resolver ecuaciones.

Encontrar x que cumpla $x = \arctan(x^2 - \pi)$ es lo mismo que encontrar las raíces de $f(x) = \arctan(x^2 - \pi) - x$

Encontrar máximos y mínimos de una función $f(x)$ es lo mismo que encontrar las raíces de su derivada $f'(x)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

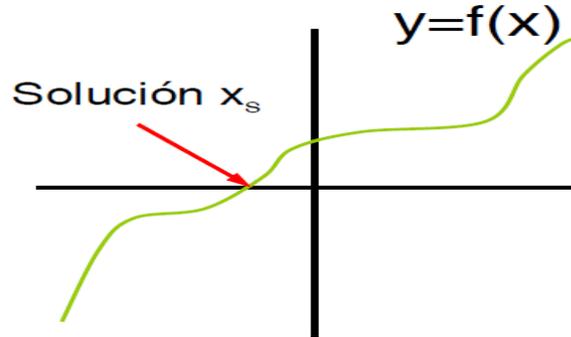
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Métodos para encontrar los ceros de una función $f(x)$

Teorema de Bolzano: Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con $f(c) = 0$.



- Por inspección visual: se dibuja $f(x)$ en un cierto intervalo x y se busca dónde cambia de signo.
- Por inspección automatizada: para una *mesh* fina de x , se buscan los intervalos en los que $f(x)$ cambia de signo: $f(x)*f(x+dx) < 0$.
- Método de la bisección: se empieza con un intervalo de x que contenga la raíz y se divide en dos quedándonos con la mitad que contenga la raíz.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$f(x+dx) \approx f(x) + (df(x)/dx) * dx = 0$$

Inspección automatizada

Escribir un *script* para encontrar las dos primeras raíces positivas de la función $f(x)=(\sin(x)-x*\cos(x))/x^2$ por inspección visual y por inspección automatizada.

```
clear all ;

%% inspección visual
x=linspace(0,10,100) ; % ajustar intervalo para que haya dos ceros
f=(sin(x)-x.*cos(x))./(x.^2) ;
plot(x,f) ;

%% inspección automatizada
x=linspace(0,10,100) ;
f=(sin(x)-x.*cos(x))./(x.^2) ;

ff=f(1:end-1).*f(2:end) ; % atención, tiene un elemento menos
x_mid=(x(1:end-1)+x(2:end))/2 ; % puntos medios de los intervalos
h_negativos=ff<0 ; % generar vector lógico
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: Inspección automatizada

Escribir una función de usuario `zeros_autom.m` para encontrar las raíces con el método de inspección automatizada, y utilizarla en el *script* anterior.

```
function [zeros]=zeros_autom(x,y)
```

Ejemplo: Inspección automatizada.

Escribir un *script* que, empleando la función `zeros_autom.m`, encuentre las cinco primeras raíces positivas de $f(x)=(\cos(x)-0.1)*\exp(-x)$.

Ejemplo: Escribir un *script* que encuentre los siete primeros *cortes* de las funciones $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=\cos(x)*\exp(-x)$.

Ejemplo: máximos y mínimos. Encontrar los cinco primeros máximos o

mínimos de $f(x)=\cos(x)*\exp(-x)$. Dibujar la derivada segunda con

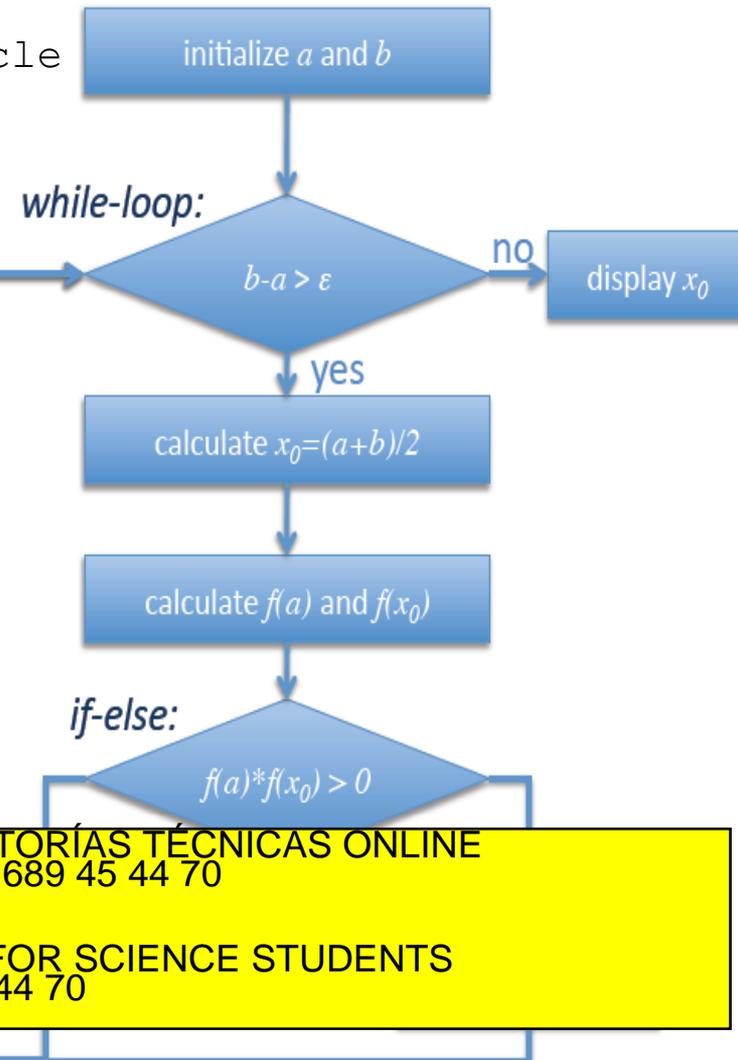


CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Método de la bisección

```
a=1 ; b=10 ; % intervalo inicial
epsilon=0.0001 ; % tolerancia
niter=0 ; % init núm de iteraciones del bucle
while (b-a)>epsilon
    x0=(a+b)/2 ; % centro intervalo
    f_a=sin(a) ; % valor f(a)
    f_x0=sin(x0) ; % valor f(x0)
    % Bolzano a dcha o izq de x0?
    if (f_a*f_x0)>0
        a=x0 ; % derecha
    else
        b=x0 ; % izquierda
    end
    % incrementar número de iteración
    niter=niter+1 ;
end
x0 , niter % mostrar resultado
```



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicio: escribir una función de usuario `zero_bisection.m` que encuentre una raíz de una función anónima (`fun`) en un cierto intervalo $[a,b]$ con tolerancia `epsilon`.

```
function [zero,n_iter]=zero_bisection(fun,a,b,epsilon)
```

Ejercicio: utilizar la función `zero_bisection.m` para encontrar la raíz de la función $U(r)=(2/r^2)-(5/r)$ en el intervalo $[0.2,2]$. Pintar la función $U(r)$ y marcar la raíz.

NOTA: $U(r)$ es un potencial gravitatorio efectivo en coordenadas esféricas.

Ejercicio: encontrar la solución (utilizando `zero_bisection.m`) de $x=\exp(-x/4)$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow-bordered box.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo: distancia de impacto de un proyectil

Se lanza un proyectil con una velocidad de 100 m/s y ángulo de 30 grados desde la cima de una colina en la que el terreno obedece a la ecuación

$$y_0(x) = h * \exp(-0.5 * (x/a)^2)$$

con $h=200$ m y $a=800$ m. En el punto de impacto con el suelo debe cumplirse $y(x)=y_0(x)$, siendo $y(x)$ la trayectoria del proyectil.

Escribir una función llamada altura.m que calcule la función $f(x)=y(x)-y_0(x)$, esto es, la altura sobre el terreno, para cualquier valor x .

Utilizar la función del método de la bisección para encontrar la distancia de impacto x_0 , donde $f(x_0)=0$.

Dibujar las funciones $y_0(x)$ e $y(x)$ verificando que la solución obtenida es la correcta.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

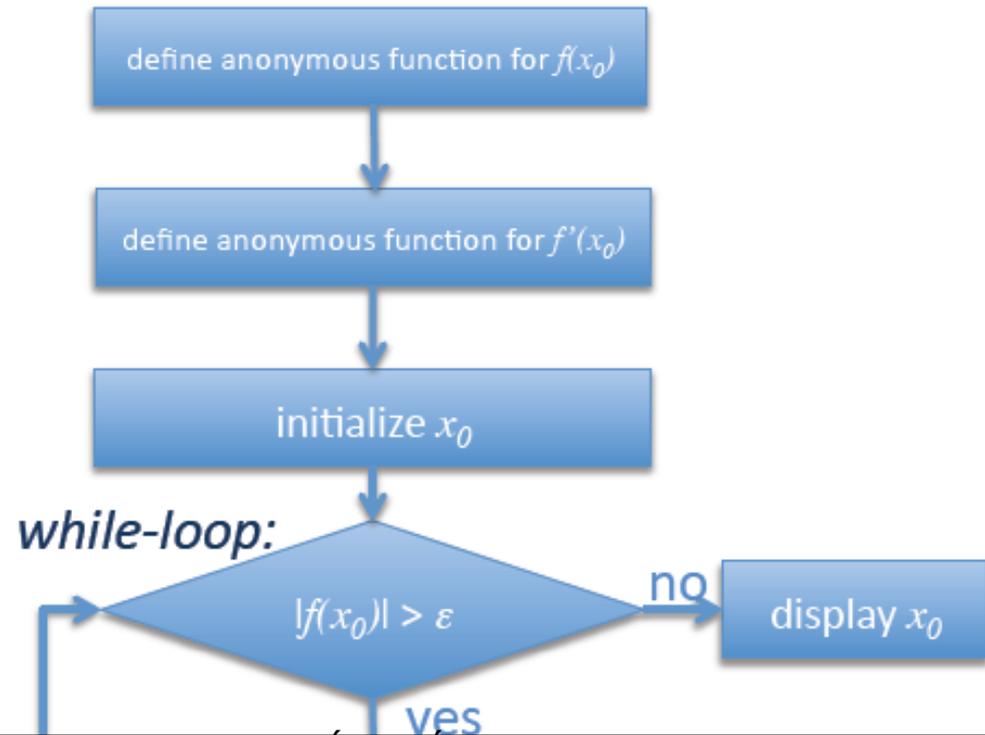
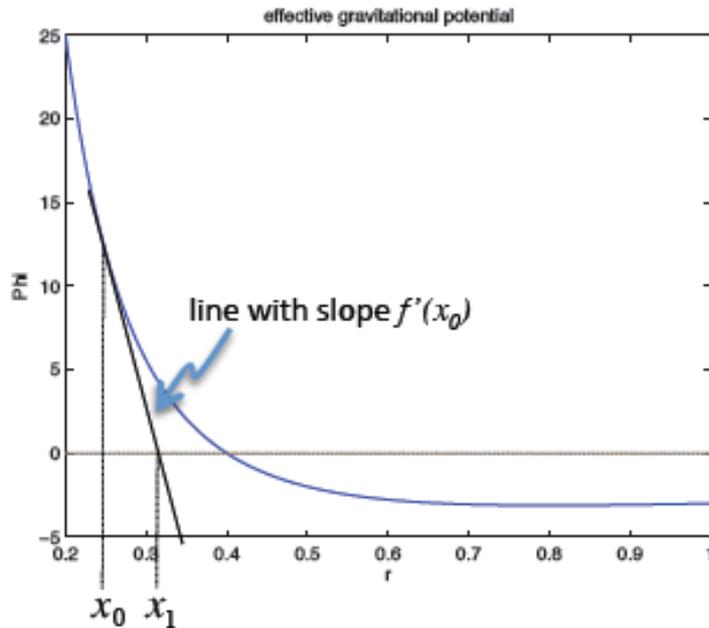
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ceros de una función: método de Newton-Raphson

Aprovecha el valor de la derivada de $f(x)$ para aproximarse al cero de la función.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Escribir una función `zero_Newton.m` que encuentre un cero de una función y su derivada definidas como *anónimas*.

```
function [zero,n_iter]=zero_Newton(f,df,zero_init,f_epsilon)
n_iter=0 ;
zero=zero_init ;
while abs(f(zero))>f_epsilon
    zero=zero-f(zero)/df(zero) ;
    n_iter=n_iter+1 ;
end
```

Ejercicio: utilizar `zero_Newton.m` para encontrar el cero de $F(r)=2/r^2-5/r$ en el intervalo $[0.2,2]$. Representar gráficamente la función y marcar el cero con un símbolo.

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, green, serif font. The text is set against a light blue background with a white, curved underline that resembles a wave or a stylized '9'. The overall design is clean and modern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sistemas de ecuaciones lineales

Considérese el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siguiente:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

donde x_1 y x_2 son las incógnitas, A_{ij} son los coeficientes y b_i son los términos independientes.

Matricialmente puede expresarse mediante:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

es decir $A\vec{x} = \vec{b}$

Entonces la solución x puede encontrarse mediante la matriz inversa de A , $\text{inv}(A)$:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is green. Below the text is a blue and orange swoosh graphic.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Lo anterior puede generalizarse a un sistema de N ecuaciones lineales con N incógnitas x_i

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

y nuevamente la solución para las N incógnitas x_i viene dada por $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$

ATENCIÓN: x y b son vectores columna.

NOTA: la matriz A debe ser cuadrada cuando el sistema de ecuaciones es determinado y su determinante $\det(A)$ ser distinto de cero para que la matriz A sea invertible (de lo contrario NO se trata de un sistema de ecuaciones linealmente independiente).

Ejercicio: encuentre las soluciones (x e y) de las dos ecuaciones $3x+6y=4$; $-2x-7.2y=7$

Ejercicio: encuentre las soluciones (x e y) de las dos ecuaciones
 $0.8*\sin(x)+1*y=0.1$; $1*\sin(x)-0.1*y=1$

Ejercicio: encuentre las soluciones (x e y) de las dos ecuaciones

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Expresé x como un vector TIIA.

Ejemplo de dinámica:

Se tiene un cubo de 4 kg de masa moviéndose hacia la derecha con velocidad 6 m/s, que choca elásticamente con otro cubo de 2 kg de masa que inicialmente también se mueve hacia la derecha con velocidad 3 m/s. Calcular la velocidad de cada cubo después de la colisión aplicando la conservación de la energía cinética y del momento lineal, resolviendo un sistema lineal de ecuaciones.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

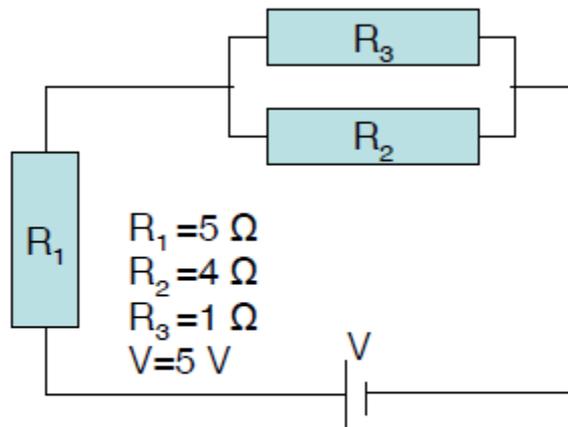
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

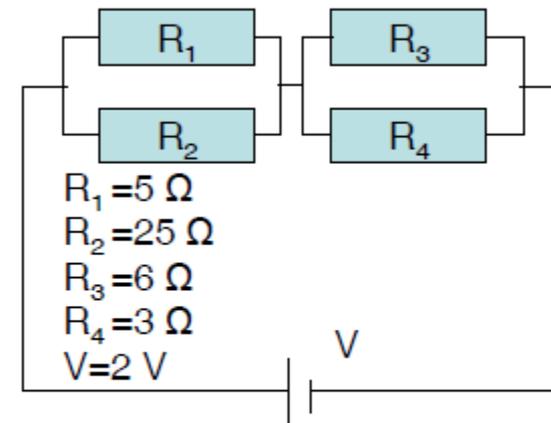
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de circuito eléctrico

1^{er} Ejemplo a resolver :



2^o Ejemplo a resolver :



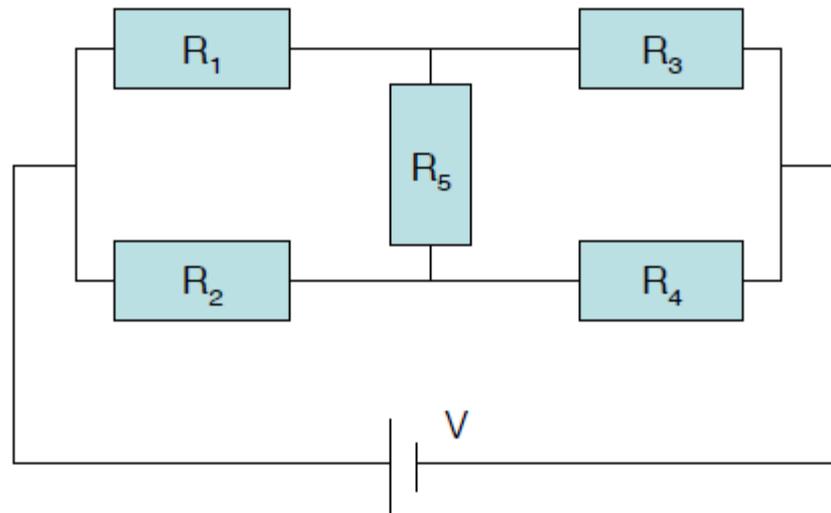
$$\begin{array}{l}
 R_1 I_1 + R_2 I_2 = V \\
 R_1 I_1 + R_3 I_3 = V \\
 I_1 - I_2 - I_3 = 0
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 R_1 & R_2 & 0 \\
 R_1 & 0 & R_3 \\
 1 & -1 & -1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 I_1 \\
 I_2 \\
 I_3
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 V \\
 V \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Circuito eléctrico 'Puente de Wheatstone'



Resolver para estos valores (Ejercicio 3.3):

$$R_1 = 10 \, \Omega, R_2 = 5 \, \Omega, R_3 = 15 \, \Omega$$

$$R_4 = 20 \, \Omega, R_5 = 3 \, \Omega, V = 5 \, \text{V}$$

Obtener y representar las intensidades que circulan por cada

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Sistemas lineales sobre-determinados. El operador `\` `help mldivide`

En estos sistemas hay más ecuaciones independientes que incógnitas.

Con el operador `\` ($x=A \setminus b$) se obtiene una solución x ($A*x=b$) que respeta lo máximo posible el sistema de ecuaciones, esto es, MATLAB da una solución que minimiza la desviación en cada una de las ecuaciones.

NOTA: cuando el sistema lineal tiene inversa (A^{-1}) la operación $x=inv(A)*b$ da el mismo resultado que $x=A \setminus b$

Una utilidad de esta operación es la de ajustar datos experimentales a una función. Por ejemplo, se ha medido la elongación (x_i) de un muelle (de cte. elástica k DESCONOCIDA) para 5 fuerzas diferentes (F_i) y se quiere encontrar el valor de k . Se tienen las siguientes 5 ecuaciones con una única incógnita k :

$$k*x_i = F_i \quad 0.110*k=10.1 \quad \text{Se establecen los valores de A (una}$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Utilidad de A\X en sistemas sobre-determinados (ajuste a datos experimentales)

Escribir un programa springConstant1.m que obtenga la constante elastica k de un muelle (ley de Hooke: $|F|=kx$), dados los datos experimentales de la fuerza y elongacion de un muelle (la fuerza se da en valor absoluto):

F[N]	x[cm]
5	0.001
50	0.011
500	0.13
1000	0.3
2000	0.75

Dibujar la grafica de $F(x)$ y de su ajuste $k*x$

Escribir un programa springConstant2.m que calcule las dos constantes elasticas k_1 y k_2 para una ley de Hooke modificada de la forma

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de ajuste a datos experimentales: linealización de la ecuación.

En un experimento se ha medido $N=150$ veces la posición x de una partícula en función de su velocidad v . Se ha encontrado que $x(v)$ depende de dos parámetros A y B de la forma:

$$x(v)=A*\exp(-B*v).$$

Encontrar, a partir de los datos experimentales el valor de A y B . Empezar por linealizar la ecuación aplicando el logaritmo.

$$\log(x)=\log(A)-B*v$$

```
% simular datos experimentales con un poco de ruido
```

```
N=150 ; v=0.8*(rand(1,N)+0.1) ;
```

```
x=13*exp(-2.1*v)+0.5*randn(1,N) ;
```

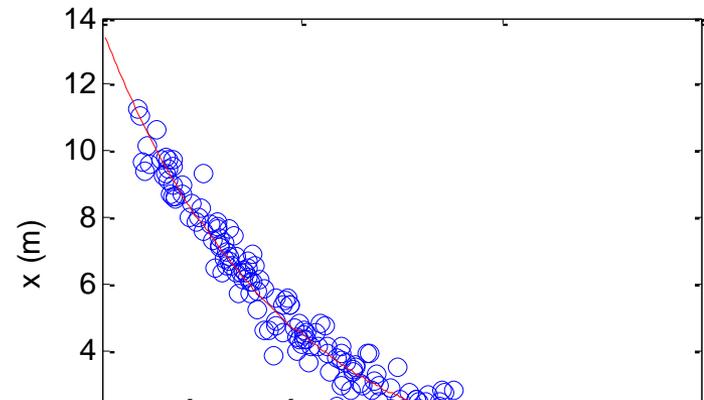
```
% linealizar la ecuación
```

```
A=[ones(1,N)' v'] ; c=log(x) ' ;
```

```
b=A\c ;
```

```
% des-linealizar
```

```
B=-b(2) ; A=exp(b(1)) ;
```



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo de ajuste a datos experimentales: linealización de la ecuación.

En un experimento se ha medido $N=100$ veces la posición x de una partícula en función de su velocidad v . Se ha encontrado que $x(v)$ depende de tres parámetros A , B y V_0 de la forma:

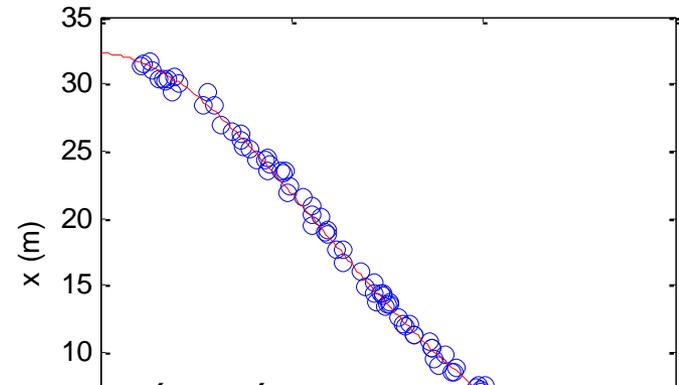
$$x(v)=A*\exp(-B*(v-V_0)^2).$$

Encontrar, a partir de los datos experimentales el valor de A , B y V_0 . Empezar por linealizar la ecuación aplicando el logaritmo.

```
% simular datos experimentales con un poco de ruido  
N=100 ; v=1.2*(rand(1,N)+0.5) ;  
x=32*exp(-1.5*(v-0.5).^2)+0.5*randn(1,N) ;
```

```
% linealizar la ecuación  
A=[ones(1,N) ' v' v.^2'] ; c=log(x) ' ;  
b=A\c ;
```

```
% des-linealizar  
B=-b(3) ; Vo=b(2)/(2*B) ;  
A=exp(b(1)+B*Vo^2) ;
```



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicio de electrostática.

El potencial electrostático en tres posiciones del eje X (4.0, 6.0 y 8.0 cm) es 0.5, -0.8 y 1.3 Voltios. Este potencial es resultado del que producen tres cargas (de valor desconocido) situadas en las posiciones siguientes en el eje X : 0.2, 5.0 y 6.9 cm).

Obtener el valor de las tres cargas resolviendo el sistema de ecuaciones

$$V(x) = (1/(4 * \pi * \epsilon_0)) * \text{SUMATORIO} \{q/abs(x-xq)\}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejercicio (avanzado) de electrostática.

Se considera un conductor lineal como un conjunto de esferas, de radio R con carga q uniformemente distribuida en su interior, en el que la carga no es fija, sino que depende del potencial electrostático en el centro de la esfera, que es una condición que se establece externamente.

Considerar un sistema formado por un total de 5 esferas (en posiciones elegidas por el usuario), a un voltaje de 1 V .Determinar la carga de cada una de las esferas.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

UNIDAD 3. Sistemas de ecuaciones lineales y raíces de una función.

Encontrar ceros de una función de una variable mediante inspección visual, búsqueda automatizada, método de la bisección y método de Newton-Raphson.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales, con inv y con \backslash

Resolver colisiones elásticas entre dos partículas en 1D

Resolver redes de resistencias

Ajustar datos experimentales por minimización con \backslash

Resolver un sistema (pequeño) de cargas.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70