

# Unidad 5: Integración de ecuaciones de movimiento

Métodos:

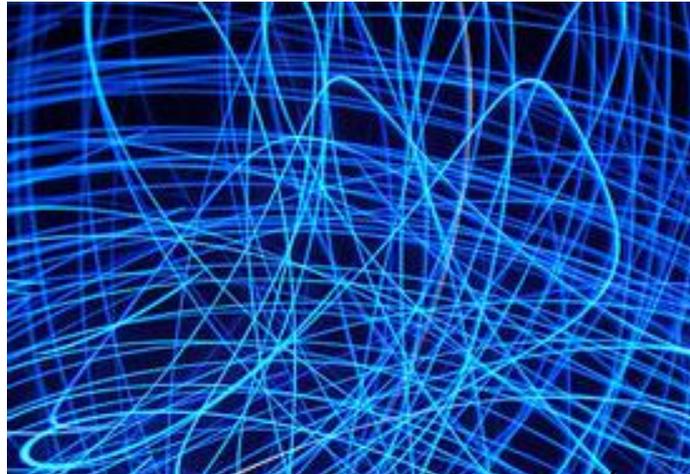
- Euler
- Verlet
- Verlet de velocidades
- Runge-Kutta

Aplicación a integración de ecuaciones de movimiento de Newton.

Órbitas.

Sistemas de partículas.

Sistemas mecánicos.



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden.

Sea la EDO de primer orden, con condición inicial:

$$dx/dt=f(x) \text{ con condición inicial } x(t_0)=x_0$$

Se conoce  $f(x)$  y se pretende obtener  $x(t)$ .

La serie de Taylor de  $x(t)$  (hasta orden uno)

$$x(t)=x(t_0)+(dx/dt)_{t=t_0}(t-t_0)+...$$

que tomando

$$\Delta t=(t-t_0) \text{ y } f(x_0)=(dx/dt)_{t=t_0}$$

se tiene

$$x(t)=x_0+f(x_0) \Delta t$$

El **método de Euler** se basa en utilizar recursivamente (iterativamente) la expresión anterior para encontrar una secuencia de soluciones  $x$  en valores sucesivos de  $t$ :

$$x_1=x_0+f(x_0) \Delta t$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$x_{n+1}=x_n+f(x_n) \Delta t$$

## Ejemplo:

Considérese la EDO:

$$dx/dt=a*(x-f) \quad \text{con } a=1, f=20, x_0=x(t=0)=100.$$

La solución analítica es conocida:

$$x(t)=f+e^{at} (x_0-f)$$

Escribir un script que obtenga  $x(t)$  en el intervalo  $[0,5]$  mediante el método de Euler, y comparar gráficamente con la solución analítica para diversos valores de  $\Delta t$ .

```
a=1 ; f=20 ; x0=100 ;  
Dt=0.1 ; t_ini=0 ; t_fin=5 ;  
n=(t_fin-t_ini)/Dt ; % número de iteraciones de Euler  
x=zeros(1,n) ;  
t=zeros(1,n) ;  
t(1)=t_ini ; x(1)=x0 ;  
for i=2:n  
    t(i)=t(i-1)+Dt ;  
    x(i)=x(i-1)+a*(x(i-1)-f)*Dt ;  
end
```

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Método de Euler aplicado a las ecuaciones de movimiento de Newton

En coordenadas cartesianas (para  $x$ ), para una fuerza conocida  $F(x,v,t)$  sobre una partícula de masa  $m$ , con aceleración  $a(x)=F(x,v,t)/m$  se tiene una EDO de segundo orden que puede reducirse a un sistema de dos EDO de primer orden:

$$dv/dt=a(x,v,t)$$

$$dx/dt=v \quad \text{donde } v \text{ se obtiene de la ecuación anterior.}$$

Con condiciones iniciales  $x_0$  y  $v_0$ .

Se aplica el método de Euler de forma iterativa, escogiendo un intervalo  $\Delta t$  *suficientemente* pequeño:

$$v_{n+1}=v_n+a_n \Delta t$$

$$x_{n+1}=x_n+v_n \Delta t$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Método de Verlet

Este método se basa en desarrollar en serie de Taylor hasta orden 3, hacia delante y hacia atrás en el tiempo:

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t v(t_i) + \frac{1}{2} \Delta t^2 a(t_i) + \frac{1}{6} \Delta t^3 b(t_i) + O(\Delta t^4)$$

$$x(t_i - \Delta t) = x(t_i) - \Delta t v(t_i) + \frac{1}{2} \Delta t^2 a(t_i) - \frac{1}{6} \Delta t^3 b(t_i) + O(\Delta t^4)$$

Operando llegamos a:

$$x(t_i + \Delta t) = 2x(t_i) - x(t_i - \Delta t) + \Delta t^2 a(t_i) + O(\Delta t^4)$$

Puesto de forma recursiva tenemos que

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + \Delta t^2 a_n;$$

$$a_{n+1} = F(x_{n+1}) / m;$$

### NOTAS:

Es más exacto que Euler, ya que desarrolla Taylor hasta orden 3.

No calcula la velocidad, aunque puede calcularse *a posteriori*:

$$\dots \quad x_{i+1} - x_{i-1}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

t+1

$\Delta t$

## Método Verlet de velocidades

Es adecuado cuando hace falta calcular la velocidad o la energía cinética durante el movimiento. Véase [https://en.wikipedia.org/wiki/Verlet\\_integration#Velocity\\_Verlet](https://en.wikipedia.org/wiki/Verlet_integration#Velocity_Verlet)

Las ecuaciones recursivas son:

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t + \frac{1}{2} a_n \Delta t^2;$$

$$a_{n+1} = F(x_{n+1}) / m;$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \Delta t;$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejercicios

Ejercicio: Para poner a prueba los métodos anteriores, puede integrarse el movimiento de un oscilador armónico de masa 0.1 kg y constante elástica 1.2 N/m durante un intervalo de tiempo de 10 s, con posición inicial 0.2 m y velocidad inicial -0.3 m/s.

Deben compararse gráficamente las soluciones que se obtienen con los métodos de Euler, Verlet, Verlet de velocidades y analítico. Comprobar la conservación de la energía. Añadir rozamiento para generar el movimiento de un oscilador amortiguado.

Ejercicio: Resolver el problema de la órbita de la Luna o de un planeta (con datos reales) seleccionando la posición y velocidad iniciales y obteniendo en periodo de revolución y los semiejes de la órbita (encontrando los ceros de la distancia radial y sus máximos y mínimos).

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

OSCILACION.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Métodos Runge-Kutta

Se trata de métodos avanzados que proporciona MATLAB, cuyo funcionamiento interno se estudiará en Computación II. Aquí podrá emplearse como *caja negra*.

Sirven para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Veamos un ejemplo para resolver el tiro parabólico.

Sintaxis básica:

`[t, y]=ode45 (odefun, tspan, y0)`

`odefun` define el sistema de ecuaciones que se pretende resolver.

`tspan` es el intervalo (de tiempo, por ejemplo) en el que se quiere la solución.

`y0` son las condiciones iniciales.

`t` es un vector con los instantes de tiempo en los que se ha obtenido la solución.

`y` son las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Runge-Kutta: un ejemplo sencillo

Se pretende obtener la solución  $z(t)$  de un tiro parabólico, con posición inicial  $z_0=100$  m, velocidad inicial  $v_{z0}=30$  m/s y aceleración  $a_z=-10$  m/s<sup>2</sup> en el intervalo de tiempo de 0 a 10 s.

El sistema de ecuaciones es:

$$v_z = dz/dt$$

$$a_z = -10$$

con condiciones iniciales  $z_0=100$ ,  $v_{z0}=30$ .

Tomando  $y(1)=z$ ,  $y(2)=v_z$  se tiene:

$$dy(1)/dt = y(2)$$

$$dy(2)/dt = -10$$

con condiciones iniciales  $y_0(1)=100$ ,  $y_0(2)=30$ .

```
fun=@(t,y) [y(2);-10] ; % función sistema ODE
[t,y]=ode45(fun,[0 10],[100 30]) ;
plot(t,y(:,1)) ; xlabel('tiempo (s)') ; ylabel('altura (m)') ;
```

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Ejercicio:** Integrar el movimiento de un oscilador armónico de masa 0.1 kg y constante elástica 1.2 N/m durante un intervalo de tiempo de 10 s, con posición inicial 0.2 m y velocidad inicial -0.3 m/s. Comprobar la conservación de la energía.

```
fun=@(t,y) [y(2);-1.2*y(1)/0.1] ; % función sistema ODE
[t,y]=ode45(fun,[0 10],[0.2 -0.3]) ;
plot(t,y(:,1)) ; xlabel('tiempo (s)') ; ylabel('posición (m)') ;
```

**Ejercicio:** Añadir al ejercicio anterior una fuerza de fricción proporcional a la velocidad de -0.1 N/(m/s).

```
fun=@(t,y) [y(2);(-1.2*y(1)-0.1*y(2))/0.1] ; % función sistema ODE
[t,y]=ode45(fun,[0 10],[0.2 -0.3]) ;
plot(t,y(:,1)) ; xlabel('tiempo (s)') ; ylabel('posición (m)') ;
```

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, bold font. The 'C' is large and blue, while the rest of the text is green. Below the text is a horizontal bar with a blue-to-orange gradient.

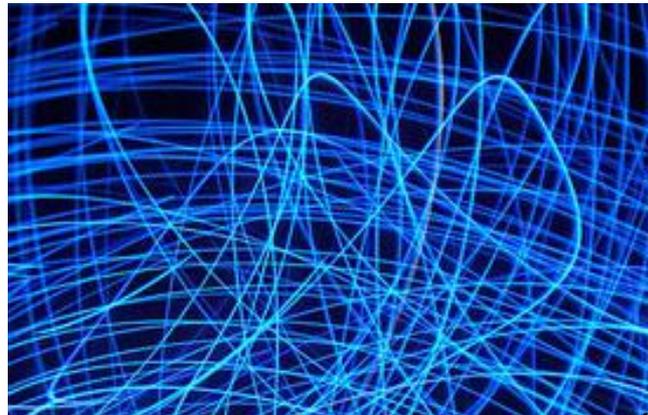
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sistemas de partículas.

Puede resolverse el movimiento combinado de un sistema de muchas partículas sometidas a interacciones mutuas. Para ello hay que integrar iterativamente la ecuación de movimiento de cada partícula, que en cada momento está sujeta a la fuerza que ejercen sobre ella todas las demás partículas. Este tipo de cálculos se llama Dinámica Molecular. Hay varias propuestas de proyectos de la asignatura basados en éste tipo de cálculos.



CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## UNIDAD 5. Destrezas

Resolución de EDO de primer orden por método de Euler

Reducción de EDO de segundo orden a sistema de EDOs de primer orden

Resolución de sistemas de EDOs de segundo orden mediante: Euler, Verlet, Verlet velocidades y Runge-Kutta.

Resolución de sistemas mecánicos newtonianos, en varias dimensiones, con fuerzas que dependan de la posición y/o la velocidad.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## EJEMPLO: Órbita Lunar SIMPLIFICADA (NO está optimizado NI vectorizado)

```
%% datos y constantes
clear all ;
MT=5.97219E24 ; % kg
ML=7.34767309E22 ; % kg
G=6.673E-11 ; % N*(m/kg)^2

%% valores iniciales
x0=384E6 ; y0=0 ; % m
vx0=0 ; % m/s (empezamos en perigeo o apogeo)
vy0=1.3E3 ; % La verdadera es vy0=1.023E6 ; % m/s

%% funciones anónimas, calculan las componentes x e y de la Fuerza
Rfun=@(x,y) sqrt(x.^2+y.^2) ;
Ffun=@(x,y) -G*MT*ML./(Rfun(x,y).^2) ;
Fxfun=@(x,y) Ffun(x,y).*x./Rfun(x,y) ;
Fyfun=@(x,y) Ffun(x,y).*y./Rfun(x,y) ;

%% inicializa vectores de variables
n=500 ; % n puntos que se integran (deberían ser más)
t_min=0 ; t_max=4*1E7 ; % intervalo de tiempo (s)
```

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Continuación órbita lunar

```
%% cálculo x(t) y(t) por Verlet velocidades
t=zeros(1,n) ; Dt=(t_max-t_min)/n ; t(1)=t_min ;

for i=1:n-1
    ax(i)=Fxfun(x(i),y(i))/ML ;
    x(i+1)=x(i)+vx(i)*Dt+ax(i)*Dt^2/2 ;
    ay(i)=Fyfun(x(i),y(i))/ML ;
    y(i+1)=y(i)+vy(i)*Dt+ay(i)*Dt^2/2 ;

    ax(i+1)=Fxfun(x(i+1),y(i+1))/ML ;
    ay(i+1)=Fyfun(x(i+1),y(i+1))/ML ;

    vx(i+1)=vx(i)+(ax(i)+ax(i+1))*Dt/2 ;
    vy(i+1)=vy(i)+(ay(i)+ay(i+1))*Dt/2 ;

    t(i+1)=t(i)+Dt ; % vector tiempos
end
```

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, green, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the "Cartagena" part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave or cloud-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70