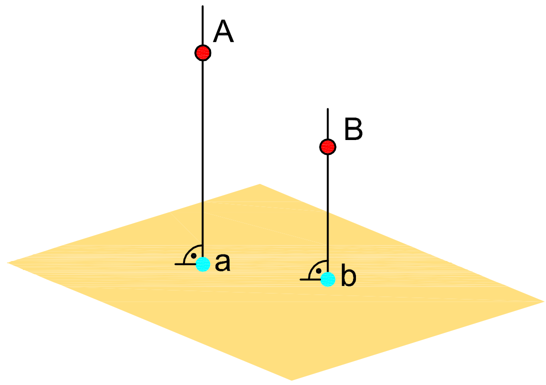
Sistema Diédrico Directo. PUNTO, RECTA Y PLANO

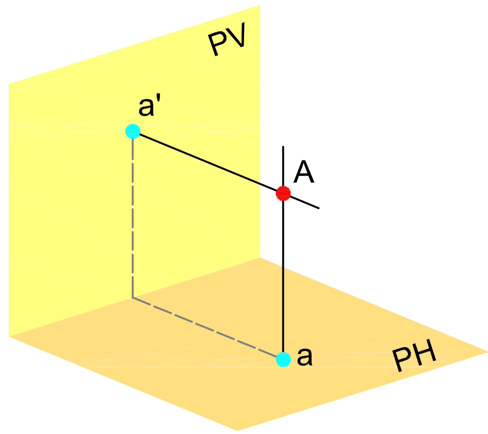
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***FUNDAMENTOS DEL SISTEMA DIÉDRICO DIRECTO*** :

El Sistema Diédrico Directo es un sistema de representación en el que el tipo de proyección es la **cilindrico ortogonal** (rayos paralelos y perpendiculares al plano de proyección) y el sistema de referencia son **dos planos perpendiculares** entre si (Plano Horizontal y Plano Vertical de proyección).



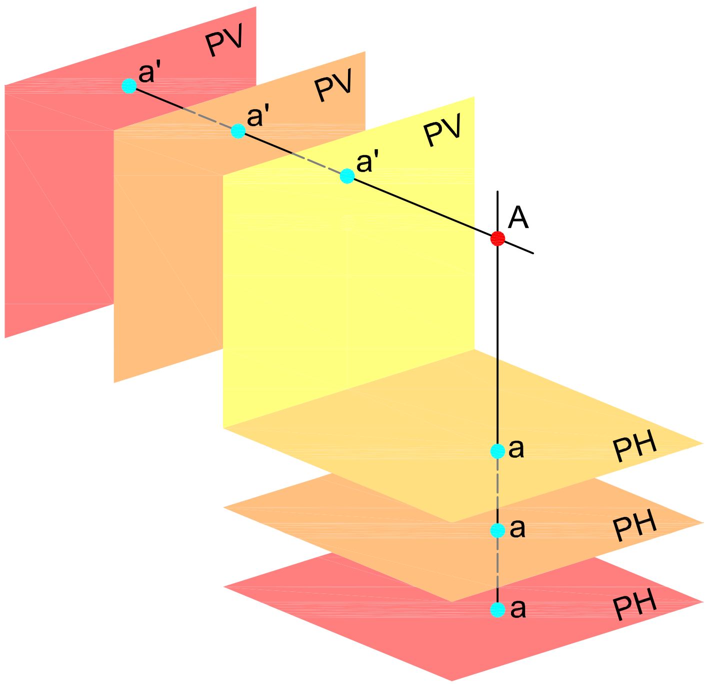
PROYECCIÓN CILINDRICO ORTOGONAL

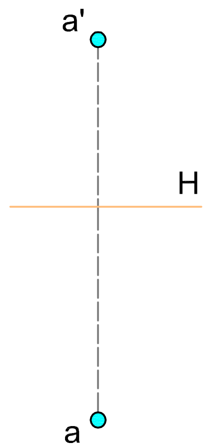


SITEMA DE REFERENCIA

A diferencia del Sistema Diédrico de Monge que coloca en una **posición fija** los Planos de Proyección, en el **Sistema Diédrico Directo** solo nos interesa la dirección del Diédro, ya que las proyecciones de los objetos es **independiente** de la posición de este siempre que proyectemos sobre Diédros Paralelos.

No obstante aunque no sea necesaria la posición de la Línea de Tierra (intersección de los Planos de Proyección), en estos apuntes colocaremos sobre todo para facilitar la resolución de algunas operaciones, una **Línea de Tierra Auxiliar H**.





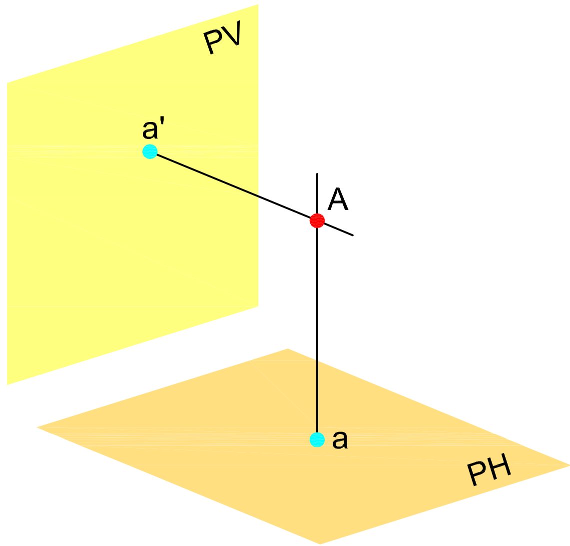
Sistema Diédrico Directo. PUNTO, RECTA Y PLANO

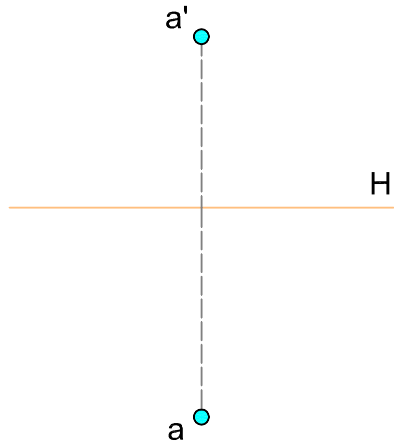
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PUNTO***:

Un punto queda representado por sus **proyecciones diédricas**, siendo estas las intersecciones de los rayos que pasan por el punto **A** del espacio y son perpendiculares a los planos de proyección.

- **a** = Proyección Horizontal o planta.
- **a'** = Proyección Vertical o alzado.



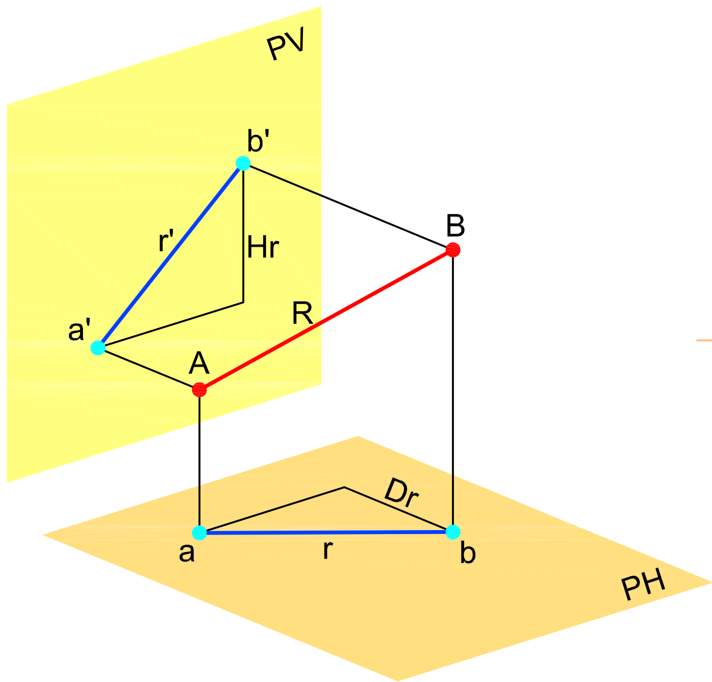


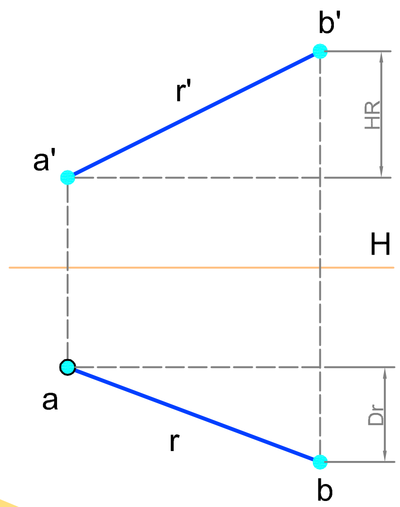
- ***RECTA***:

Una recta queda definida por dos de sus puntos, por tanto la representación de la misma será la resultante de la unión de las **proyecciones diédricas** de los mismos.

En el Sistema Diédrico Directo al no estar fijadas las posiciones de los planos de proyección, las proyecciones de los elementos están relacionados por sus cotas (**Hr**) y alejamientos (**Dr**) relativos.

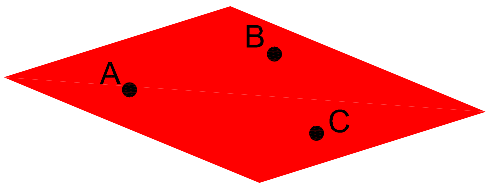
- **r** = Proyección Horizontal o planta.
- **r'** = Proyección Vertical o alzado.



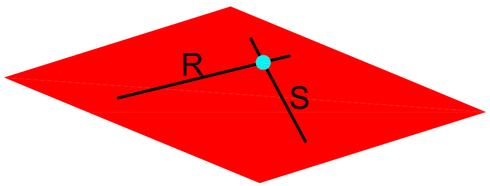


- ***PLANO***:

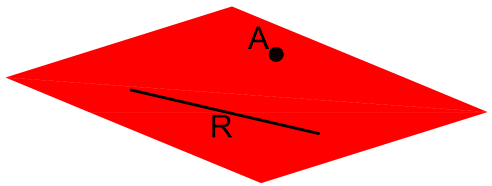
Espacialmente un plano está definido si se conocen los siguientes elementos del mismo:



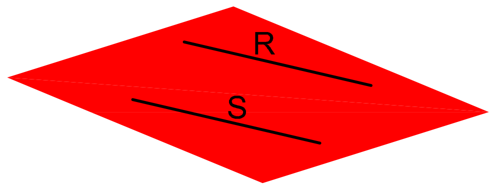
TRES PUNTOS NO ALINEADOS



DOS RECTAS QUE SE CORTAN



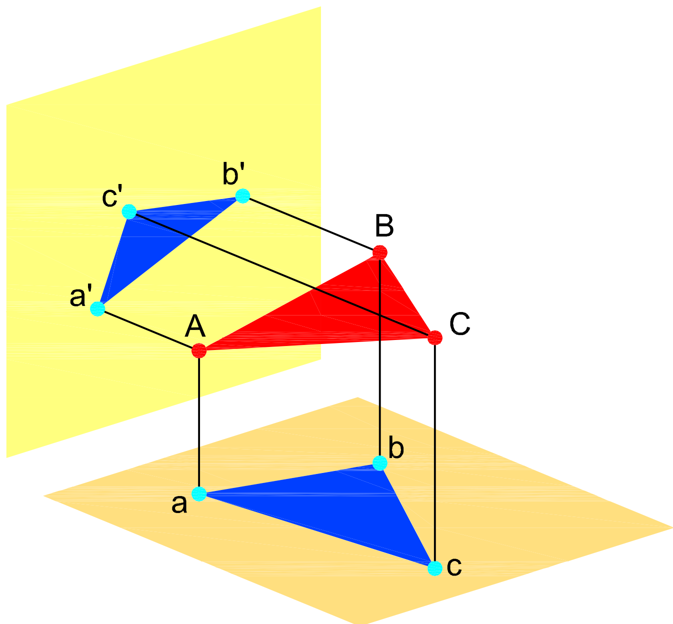
RECTA Y PUNTO EXTERIOR

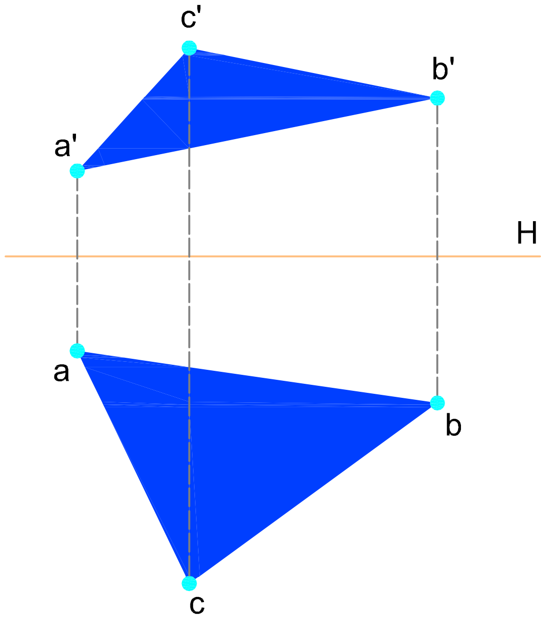


DOS RECTAS PARALELAS

En el Sistema Diédrico Directo la forma más general de representar un plano es por una **figura plana** comprendida en el mismo, siendo posible representarlo de las otras tres formas indicadas en la definiciòn de un plano.

- **Triángulo abc** = Proyección Horizontal o planta.
- **Triángulo a'b'c'** = Proyección Vertical o alzado.



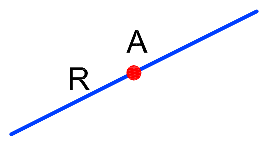


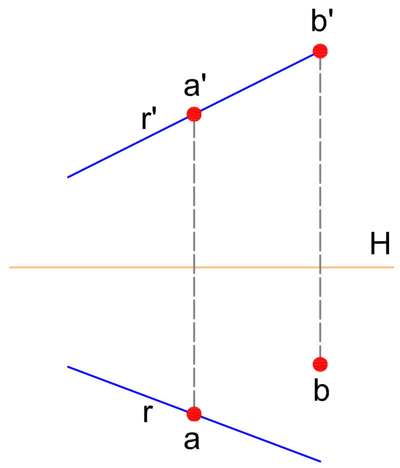
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PERTENENCIA DE PUNTO A RECTA*:**

Un punto pertenece a una recta si está situado sobre ella, de lo que deducimos que en el Sistema Diédrico un punto pertenece a una recta si las proyecciones del punto se encuentran sobre las proyecciones de la recta.

- Punto **A** **pertenece** a la recta R.
- Punto **B** **no pertenece** a la recta R.

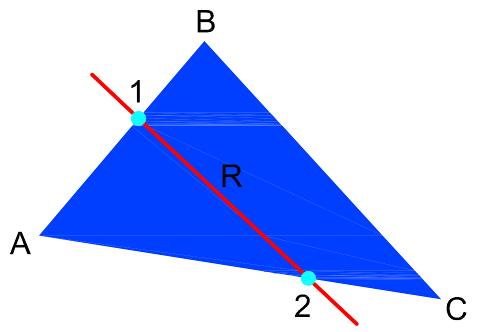


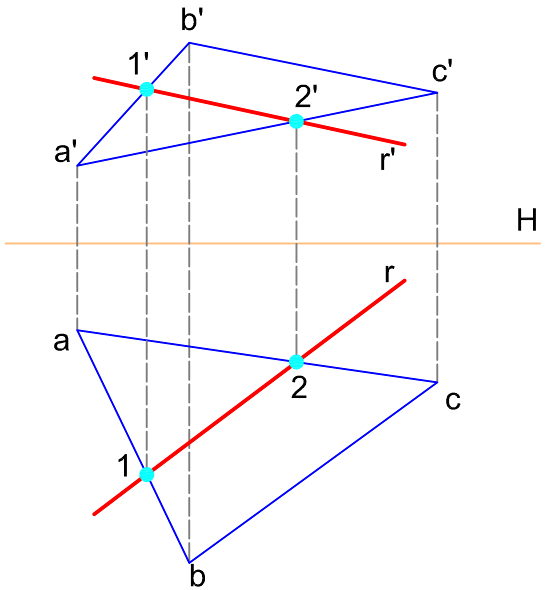


- ***PERTENENCIA DE RECTA A PLANO*:**

Una recta pertenece a un plano si dos puntos de la misma están situados sobre el plano. Si esto sucede, podemos asegurar que todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

- La recta **R** **pertenece** al plano **ABC** ya que los puntos **1** y **2** pertenecen al plano por pertenecer estos a las rectas **AB** y **AC** del plano.



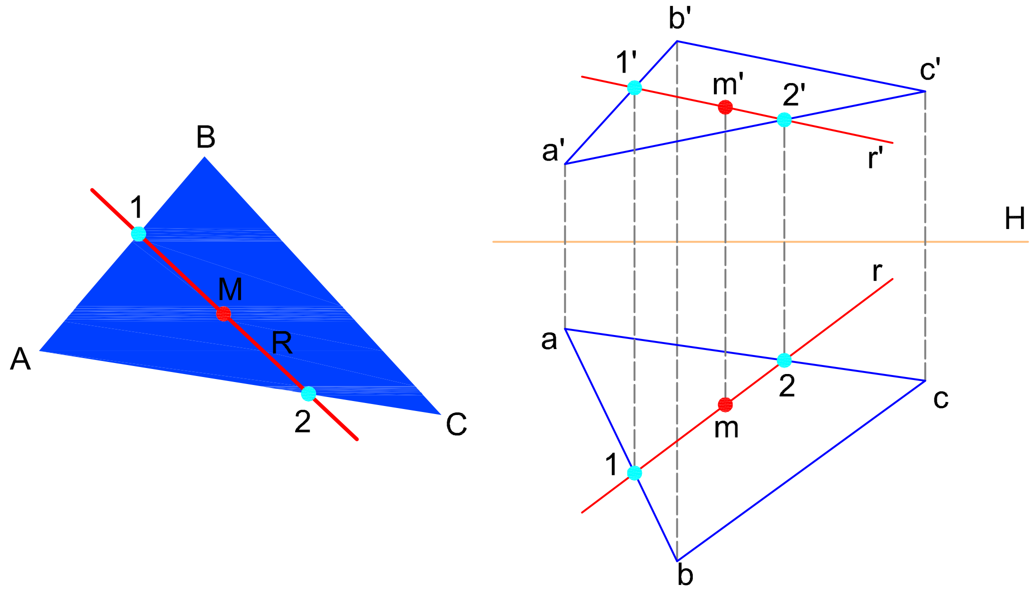


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PERTENENCIA DE PUNTO A PLANO*:**

Un punto pertenece a un plano si se encuentra sobre una recta del plano.

- El punto **M** **pertenece** al plano **ABC** por pertenecer a la recta **R** del plano.



Sistema Diédrico Directo. POSICIONES DEL PLANO

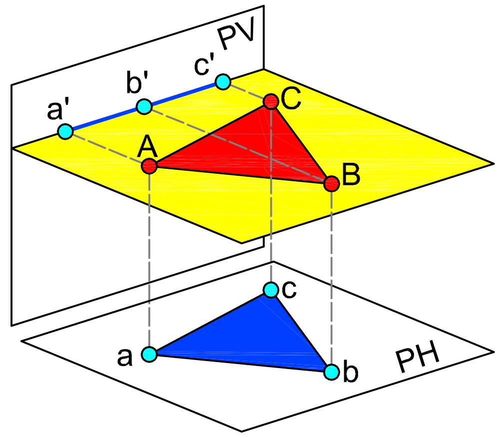
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

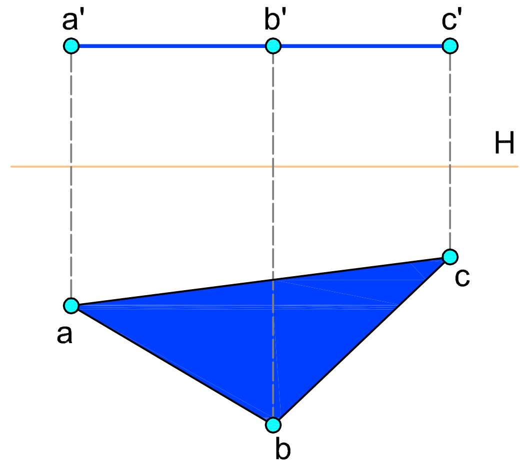
- ***PLANOS HORIZONTALES***:

Son **paralelos** al **P.H.** de Proyección.

Todos los elementos pertenecientes a Planos Horizontales se proyectan **verticalmente** como una **recta** paralela a **H**.

Las proyecciones **horizontales** de los elementos de estos planos están en **verdadera magnitud**.



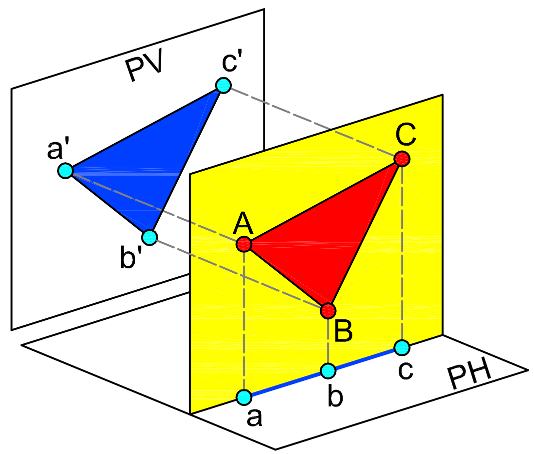


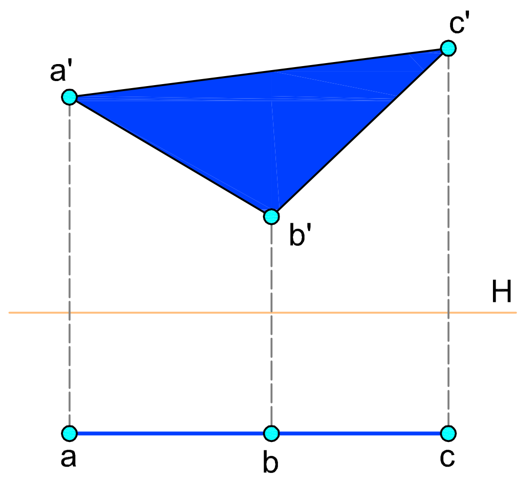
- ***PLANOS FRONTALES***:

Son **paralelos** al **P.V.** de Proyección.

Todos los elementos pertenecientes a Planos Frontales se proyectan **horizontalmente** como una **recta** paralela a **H**.

Las proyecciones **verticales** de los elementos de estos planos están en **verdadera magnitud**.





Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PLANOS VERTICALES***:

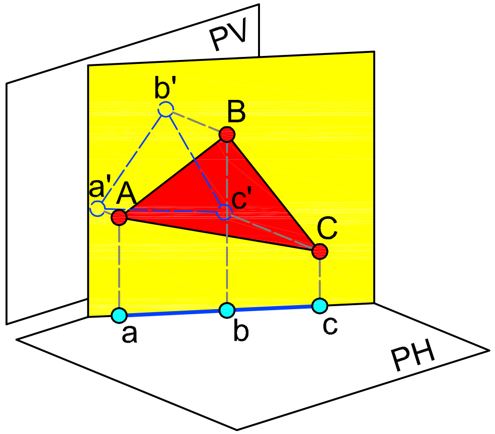
También conocidos cómo ***PROYECTANTE HORIZONTAL***.

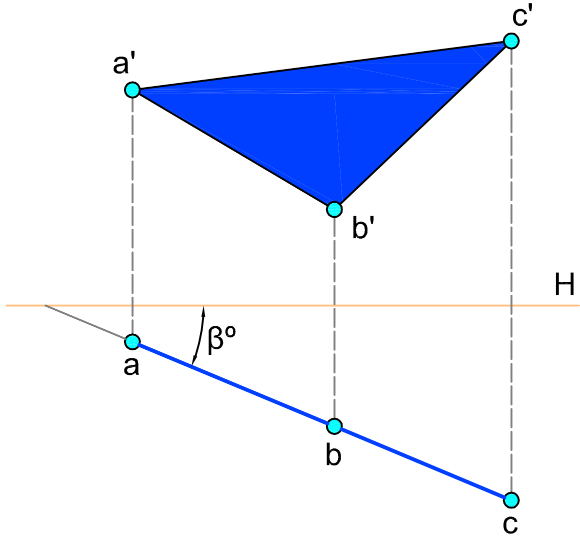
Son **perpendiculares** al **P.H.** de Proyección.

Todos los elementos pertenecientes a Planos Verticales se proyectan **horizontalmente** como una **recta**.

Este plano es oblicuo con respecto al **P.V.** por lo que las proyecciones verticales no indican ninguna caracteristica particular.

La **verdadera magnitud** del ángulo **β** que forman estos planos con el **P.V.**, se ven en **proyección horizontal**.





- ***PLANOS DE CANTO***:

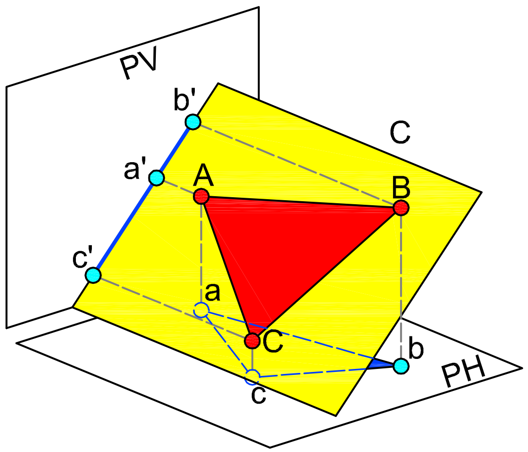
También conocidos cómo ***PROYECTANTE VERTICAL***.

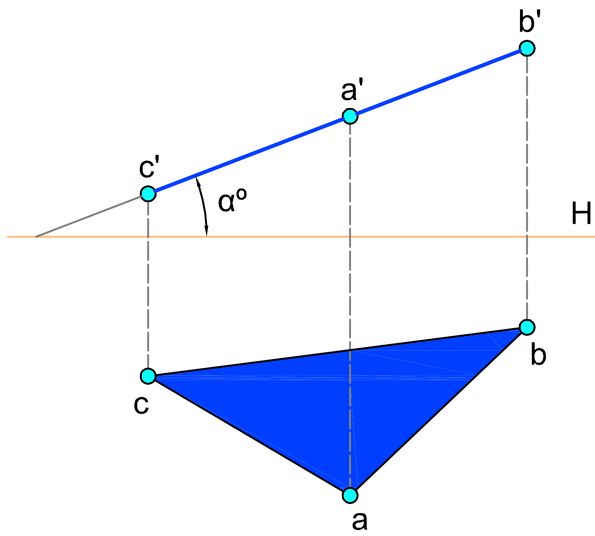
Son **perpendiculares** al **P.V.** de Proyección.

Todos los elementos pertenecientes a Planos de Canto se proyectan **verticalmente** como una **recta**.

Este plano es oblicuo con respecto al **P.H.** por lo que las proyecciones horizontales no indican ninguna caracteristica particular.

La **verdadera magnitud** del ángulo **α** que forman estos planos con el **P.H.**, se ven en **proyección VERTICAL**.





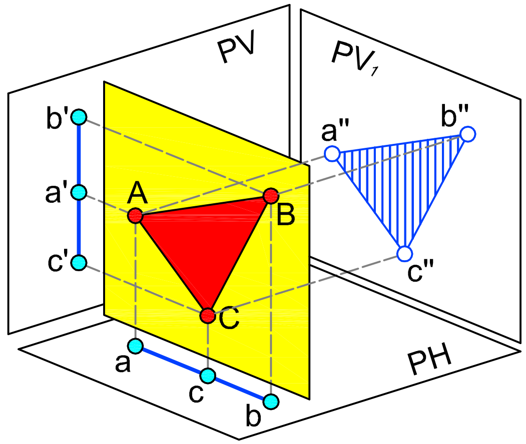
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

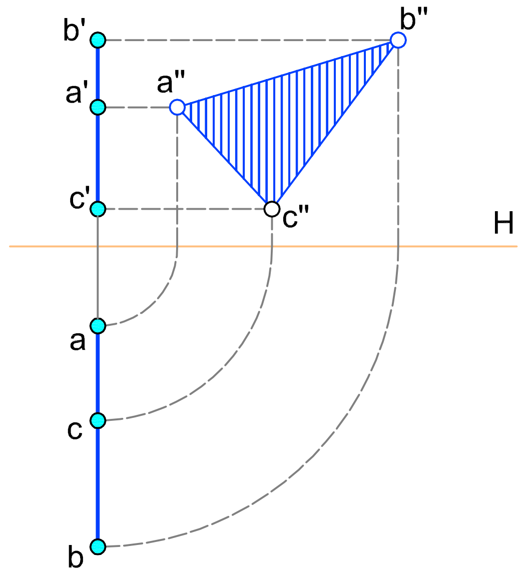
- ***PLANOS DE PERFIL*:**

Son Planos **perpendiculares** al **P.H.** y al **P.V.** de Proyección.

Todos los elementos pertenecientes a Planos de Perfil se proyectan tanto **horizontal** cómo **verticalmente** como **rectas** perpendiculares a **H**.

Las **verdaderas magnitudes** de elementos contenidos en estos planos se encuentran en la **Tercera Proyección**.





Sistema Diédrico Directo. POSICIONES DE LA RECTA

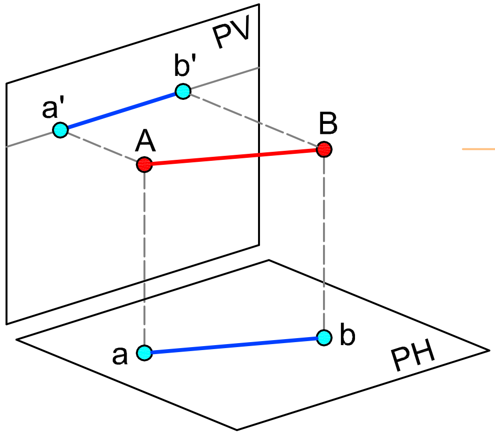
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

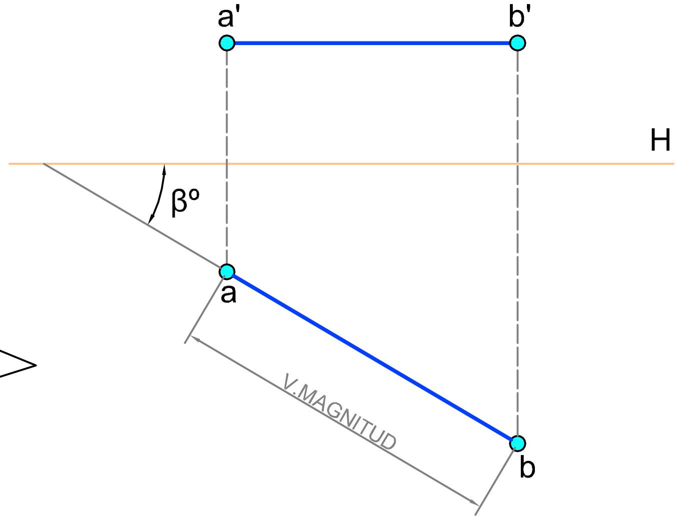
- ***RECTAS HORIZONTALES***:

Son **paralelas** al **P.H.** de Proyección.

Todos los puntos pertenecientes a Rectas Horizontales se proyectan **verticalmente** sobre una **recta** paralela a **H**.

Las proyecciones **horizontales** de estas rectas son paralelas a la recta en el espacio y por lo tanto **verdadera magnitud**.



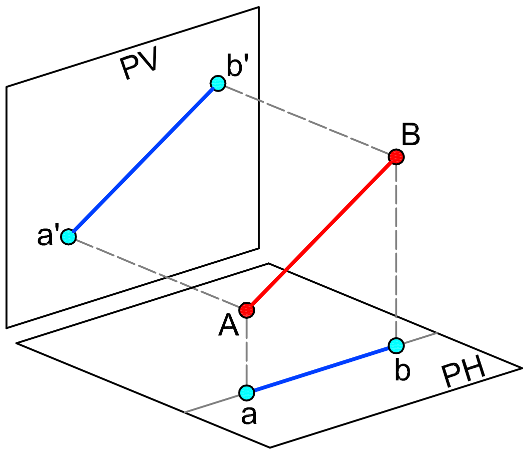


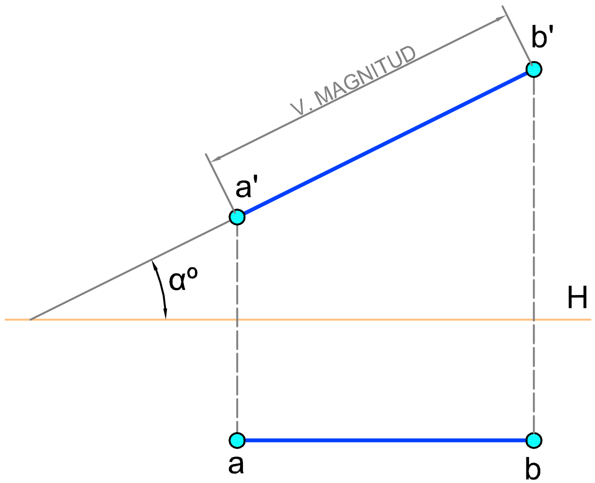
- ***RECTAS FRONTALES***:

Son **paralelas** al **P.V.** de Proyección.

Todos los puntos pertenecientes a Rectas Frontales se proyectan **horizontalmente** sobre una **recta** paralela a **H**.

Las proyecciones **verticales** de estas rectas son paralelas a la recta en el espacio siendo **verdaderas magnitudes**.





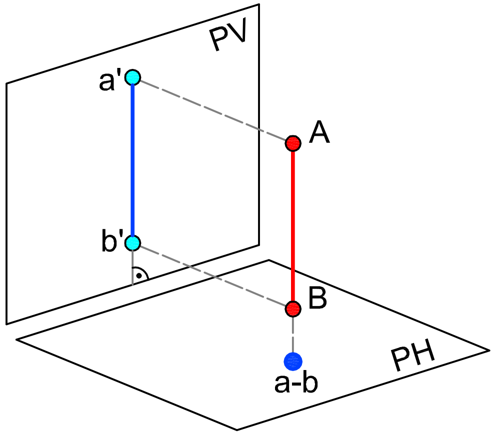
- ***RECTAS VERTICALES***:

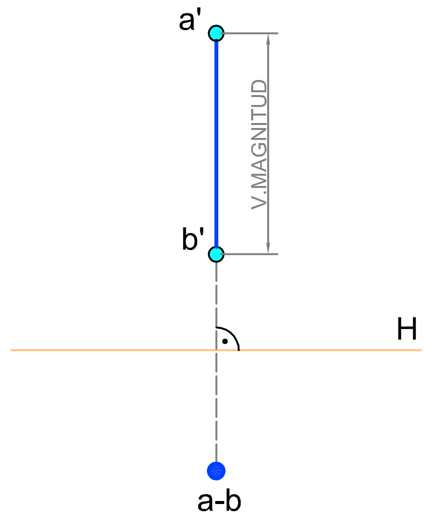
Son rectas **perpendiculares** al **P.H.** de Proyección.

Todos los puntos pertenecientes a Rectas Verticales se proyectan **horizontalmente** como una **punto**.

Verticalmente, este tipo de rectas se proyectan según una línea perpendicular a **H**.

Por ser verticales, son paralelas al **P.V**. de proyección y por consiguiente sus proyecciones verticales son **verdadera magnitud** .





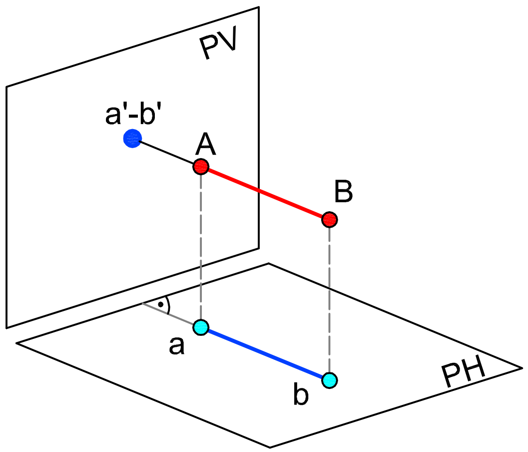
- ***RECTAS DE PUNTA***:

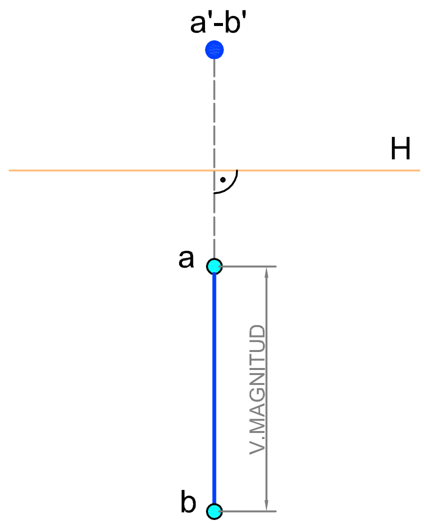
Son **perpendiculares** al **P.V.** de Proyección.

Todos los puntos pertenecientes a Rectas de Canto se proyectan **verticalmente** como una **punto**.

Las proyecciones horizontales de este tipo de rectas son líneas perpendiculares a **H**.

Son rectas patalelas al **P.H.** de proyección y por lo tanto sus proyecciones horizontales son **verdaderas magnitudes**.





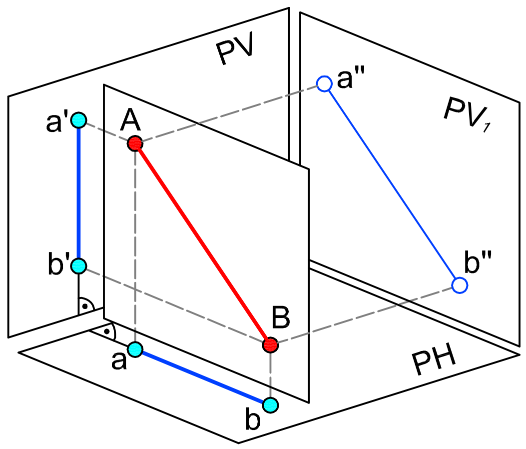
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

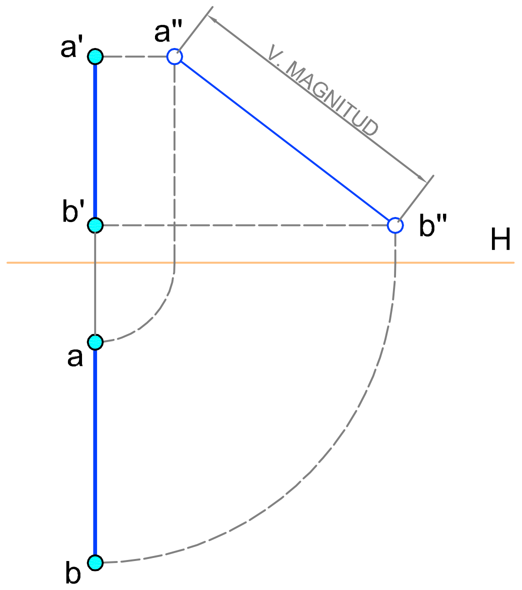
- ***RECTAS DE PERFIL*:**

Son rectas contenidas en Planos de Perfil.

Todos los puntos pertenecientes a Rectas de Perfil se proyectan tanto **horizontal** cómo **verticalmente** como **rectas** perpendiculares a **H**.

Las **verdaderas magnitudes** de este tipo de Rectas se observan en la **Tercera Proyección**.



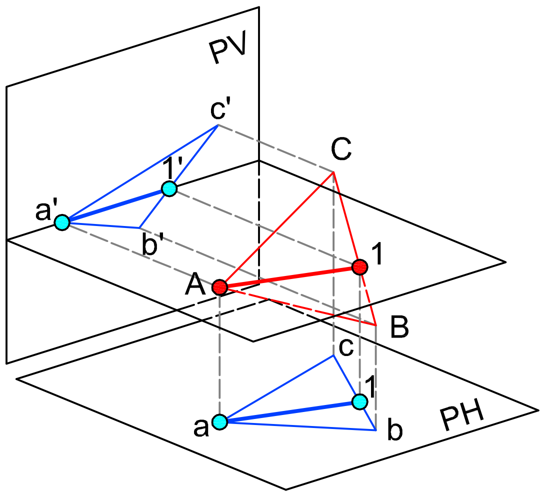


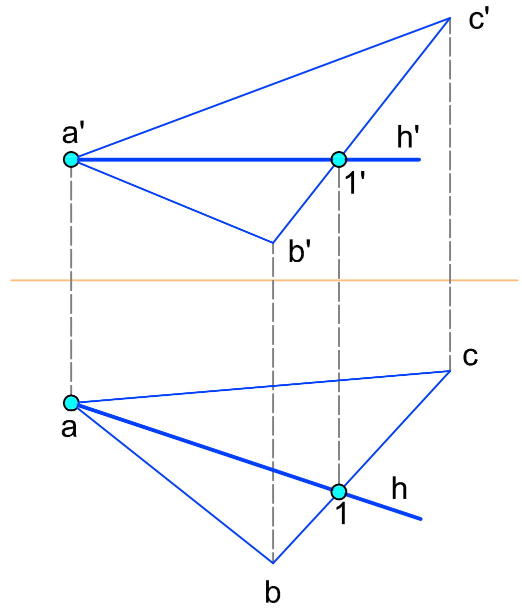
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RECTAS HORIZONTALES***:

Se pueden considerar cómo la intersección del Plano con un plano horizontal.

- La proyección vertical es **paralela** a la línea de tierra.
- La proyección horizontal se deduce por pertenencia de recta a plano.

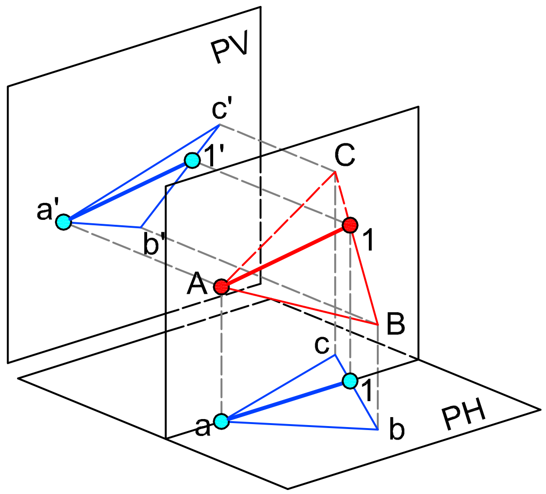


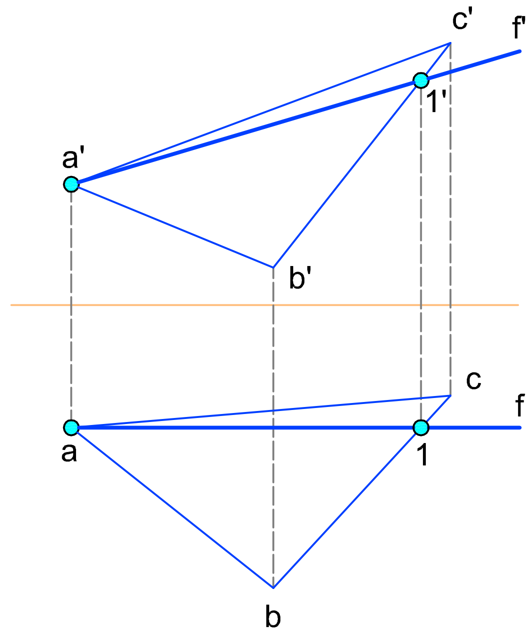


- ***RECTAS FRONTALES***:

Se pueden considerar cómo la intersección del Plano con un plano frontal.

- La proyección horizontal es **paralela** a la línea de tierra.
- La proyección vertical se calcula por pertenencia de recta a plano.





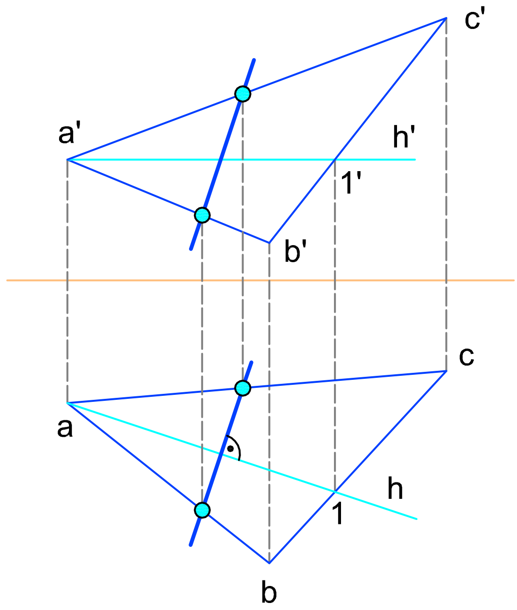
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***LÍNEA DE MÁXIMA PENDIENTE*:**

Son aquellas rectas del Plano cuyo **ángulo** con planos horizontales son el **mayor posible**.

Este tipo de rectas, son **perpendiculares** a las rectas horizontales del Plano y por tanto la **proyección horizontal** de las mismas, son **perpendiculares** a las **proyecciones horizontales** de las rectas horizontales del Plano.

El ángulo que forman estas rectas con planos horizontales, es el **ángulo de pendiente** del Plano.

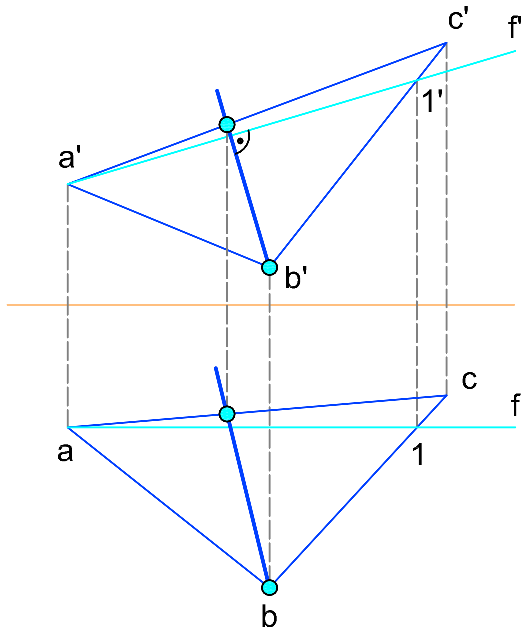


- ***LÍNEA DE MÁXIMA INCLINACIÓN*:**

Son aquellas rectas del Plano cuyo **ángulo** con planos frontales son el **mayor posible**.

Este tipo de rectas, son **perpendiculares** a las rectas frontales del Plano y por tanto la **proyección vertical** de las mismas, son **perpendiculares** a las **proyecciones verticales** de las rectas frontales del Plano.

El ángulo que forman estas rectas con planos frontales, es el **ángulo de inclinación** del Plano.

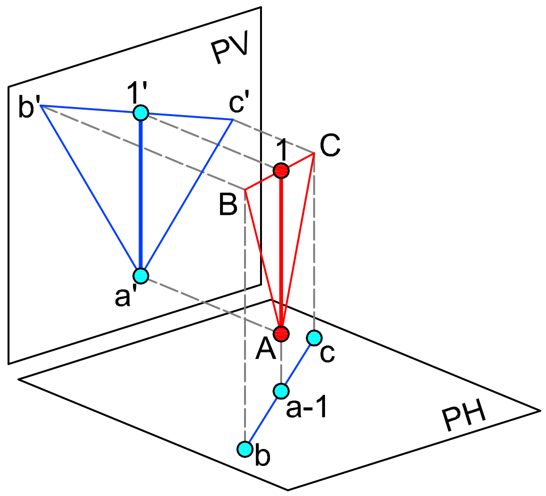


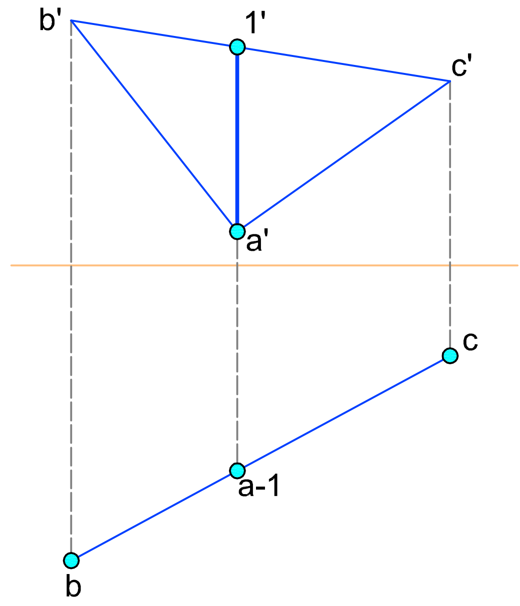
Sistema Diédrico Directo. RECTAS PARTICULARES DE UN PLANO

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RECTAS VERTICALES***:

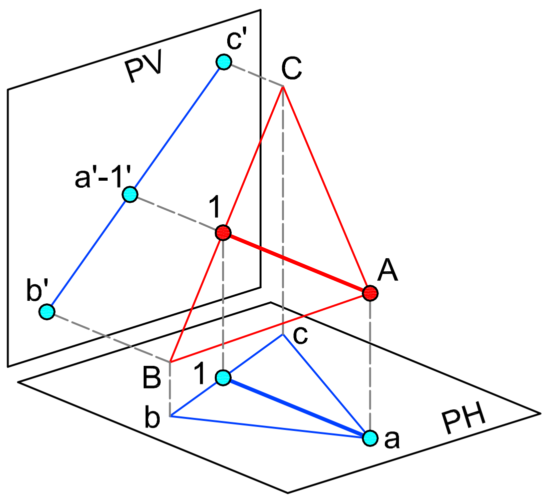
Este tipo de rectas, sólo se encuentran en **planos verticales** (Proyectantes Horizontales).

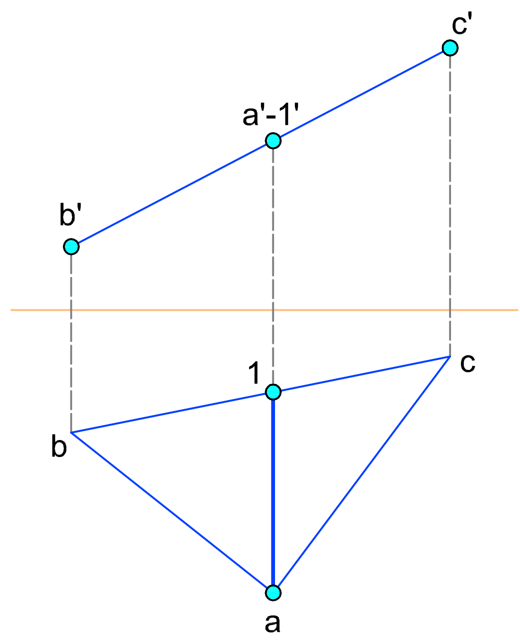




- ***RECTAS DE PUNTA***:

Las rectas de punta, solo se encuentran en **planos de punta** (Proyectantes Verticales).





Sistema Diédrico Directo. **VISTAS AUXILIARES**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

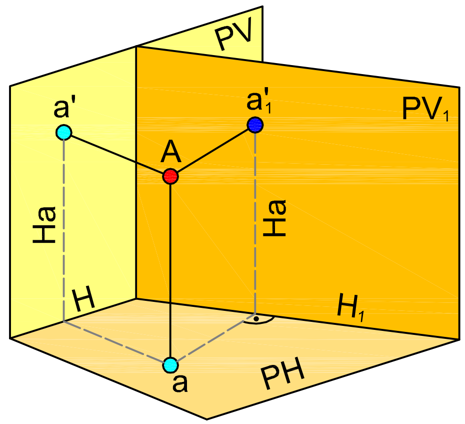
En ocasiones nos encontramos que la dificultad de operar en los sistemas de representación viene derivada por la posición del objeto con respecto a los planos de referencia o por falta de más información del objeto. Esto lo podemos subsanar mediante **Vistas Auxiliares** o **Cambios de Planos de Proyección**.

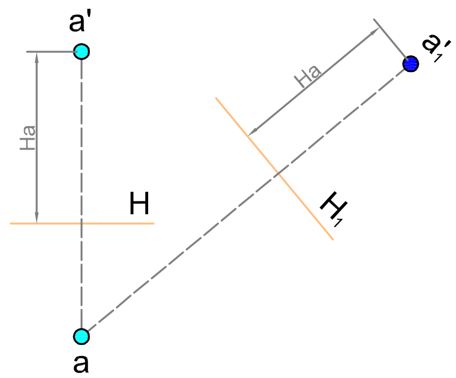
• *CAMBIO DEL PLANO VERTICAL:*

Consiste en **girar el Plano Vertical (PV)** mediante una recta del mismo y perpendicular al Plano Horizontal de Proyección (**PH**).

Se define un **nuevo diédro** formado por el Plano Horizontal inicial (**PH**) y un nuevo Plano Vertical (**PV_1**) y por lo tanto una **nueva proyección vertical** del punto **A**. La dirección del nuevo diédro viene indicado por (**H_1**).

Sobre el nuevo diédro, las proyecciones verticales mantienen las **mismas cotas** absolutas y/o relativas que en el diédro inicial.



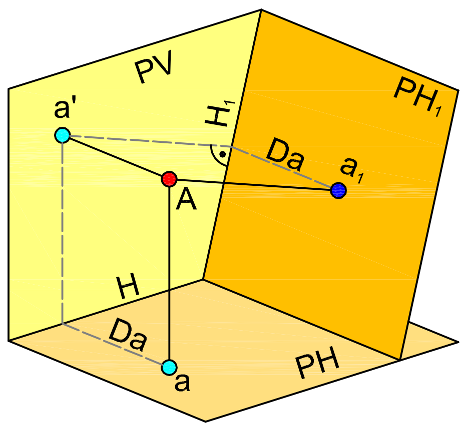


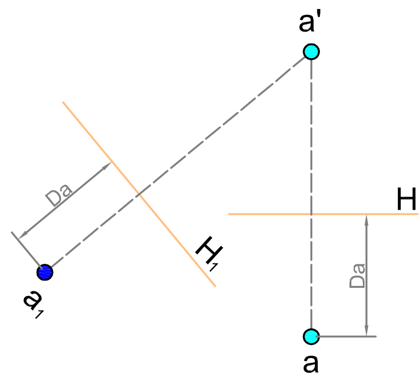
• *CAMBIO DEL PLANO HORIZONTAL:*

Consiste en **girar** el **Plano Horizontal (PH)** mediante una recta del mismo y perpendicular al Plano Vertical de Proyección (**PV**).

Se define un **nuevo diédro** formado por el Plano Vertical inicial (**PV**) y el nuevo Plano Horizontal (**PH_1**) y por lo tanto una **nueva proyección horizontal** del punto **A**. La dirección del nuevo diédro vendrá indicado por (**H_1**).

Sobre este nuevo diédro, las proyecciones horizontales mantienen los **mismos alejamientos** absolutos y/o relativos que en el diédro inicial.





Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

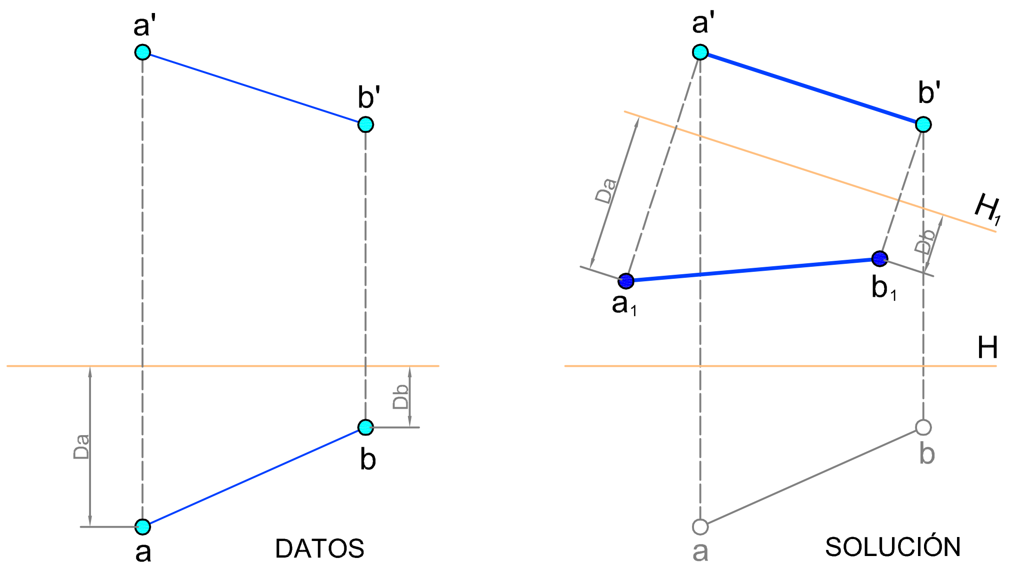
• *RECTA HORIZONTAL:*

La transformación de una recta oblicua en una **Recta Horizontal** se realiza mediante un **Cambio de Plano Horizontal**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser perpendiculares a la proyección vertical inicial de la recta, por lo que la dirección de (**H_1**) debe ser **paralela** a esta proyección

Se mantienen los **alejamientos**.

La proyección horizontal del segmento (**a_1-b_1**) es la **verdadera magnitud** de **AB**.



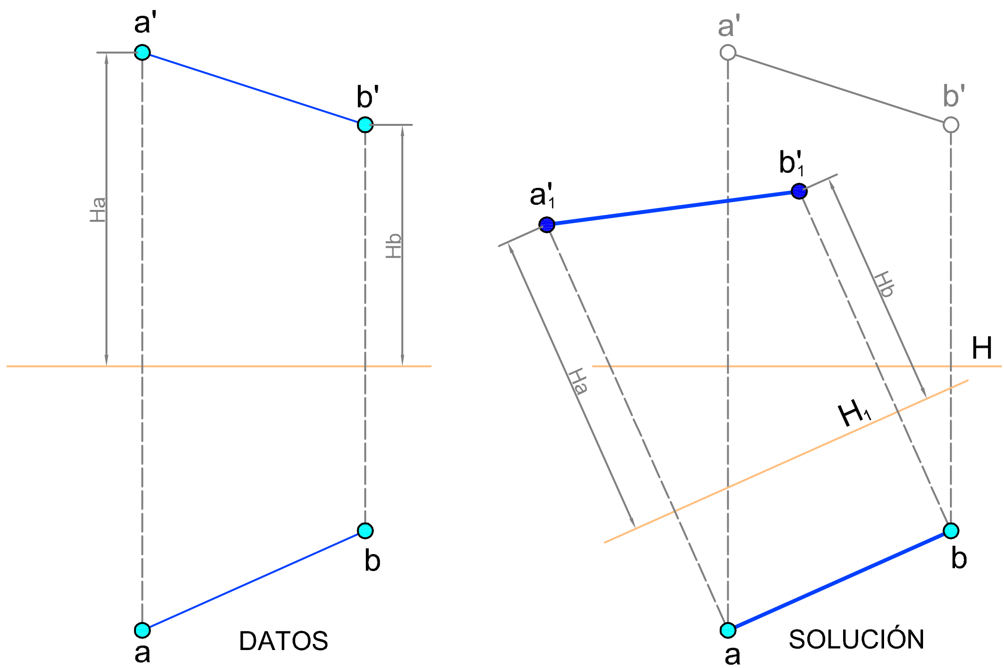
• *RECTA FRONTAL:*

La transformación de una recta oblicua en una **Recta Frontal** se realiza mediante un **Cambio de Plano Vertical**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser perpendiculares a la proyección horizontal inicial de la recta, por lo que la dirección de (**H_1**) debe ser **paralela** a esta.

Se mantienen las **cotas**.

La proyección vertical del segmento (**a'_1-b'_1**) es **verdadera magnitud** de (**A-B**).



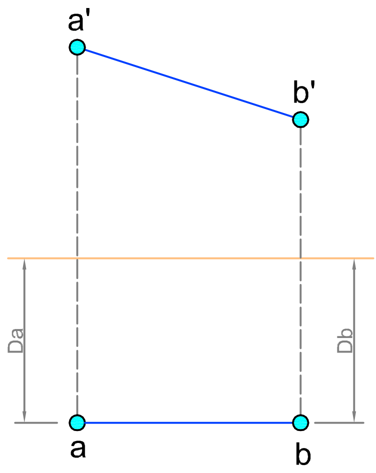
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *RECTA FRONTAL EN RECTA VERTICAL:*

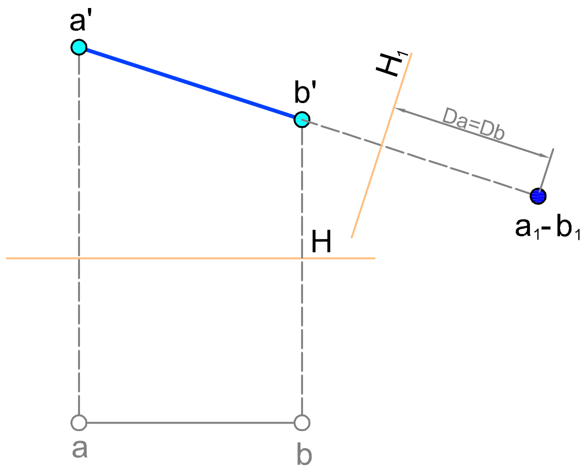
La transformación de una recta horizontal en una **Recta de Vertical** se realiza mediante un **Cambio de Plano Horizontal**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser paralelas a la proyección vertical inicial de la recta, y como consecuencia (**H_1**) **perpendicular** a esta.

Se mantienen los **alejamientos** que al ser iguales para (**A**) y (**B**), sobre el nuevo diédro coinciden sus proyecciones horizontales,



DATOS



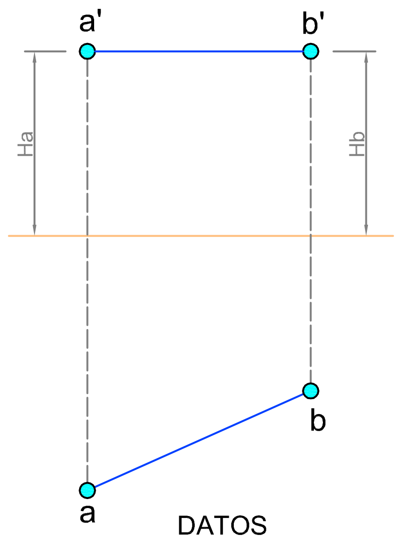
SOLUCIÓN

• *RECTA HORIZONTAL EN RECTA DE PUNTA:*

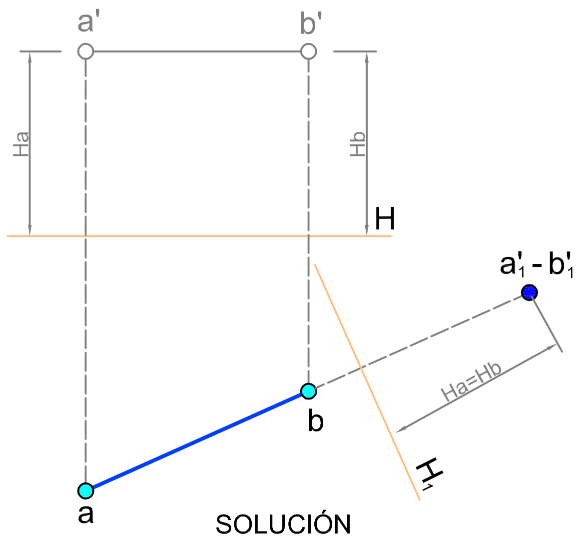
La transformación de una recta horizontal en una **Recta de Punta** se realiza mediante un **Cambio de Plano Vertical**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser paralelas a la proyección horizontal inicial de la recta y por tanto (**H_1**) debe ser **perpendicular** a la misma.

Se mantienen las **cotas** que al ser las mismas para (**A**) y (**B**), sobre el nuevo diédro coinciden sus proyecciones verticales.



DATOS



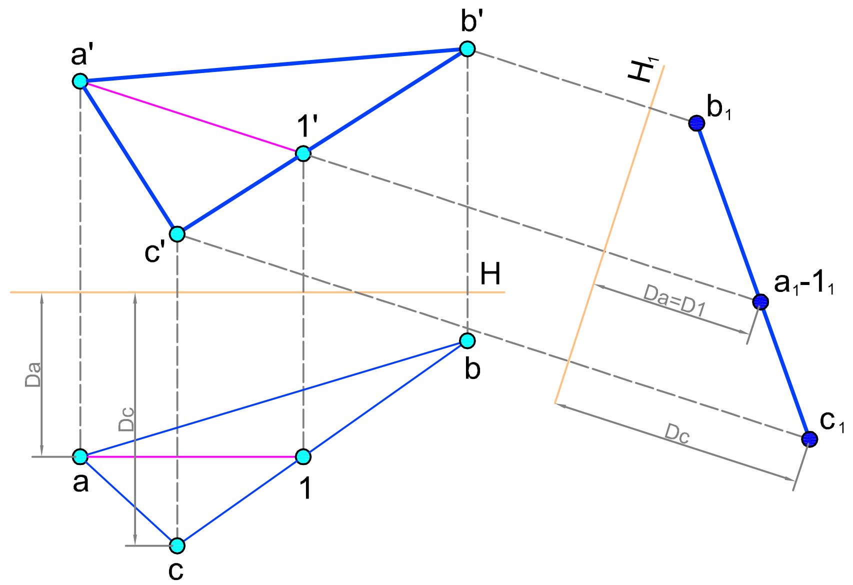
SOLUCIÓN

• *PLANO OBLICUO EN VERTICAL (PROY. HORIZONTAL):*

Un plano es vertical si contiene a una **Recta Vertical** (perpendicular al **PH**)

Si transformamos una recta del plano oblicuo en Recta Vertical, la nueva vista del plano será en posición vertical o proyectante horizontal.

El cambio de plano o vista auxiliar nos viene definido por la **transformación de una Recta Frontal (A_1) del plano en una Recta Vertical** desarrollado en el paso de Recta Frontal a Vertical.

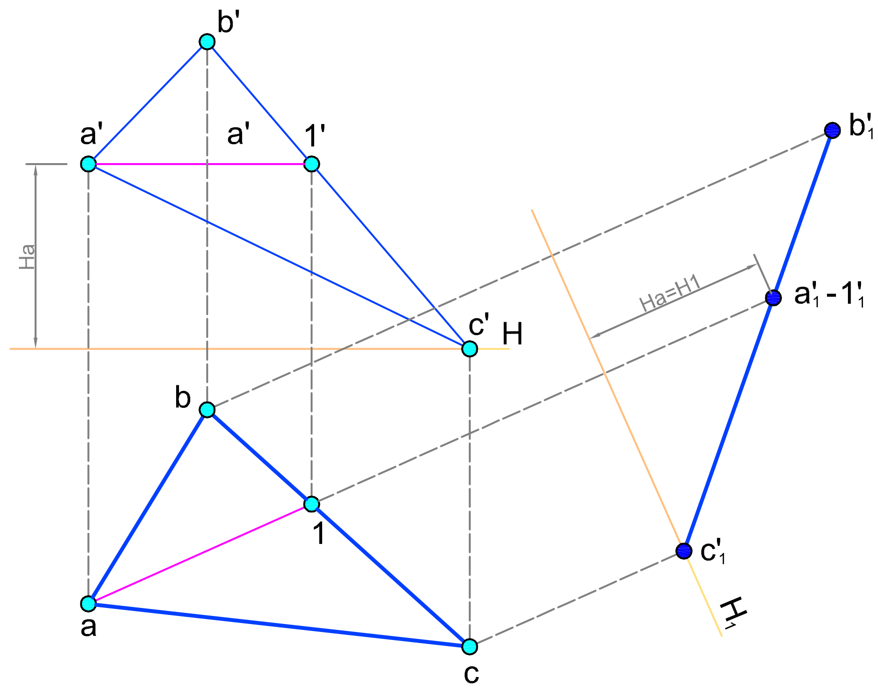


• *PLANO OBLICUO EN PLANO DE CANTO (PROY. VERTICAL):*

Un plano es de canto si contiene a una **Recta de Punta** (perpendicular al **PV**)

Si transformamos una recta del plano oblicuo en Recta de Punta, la nueva vista del plano será en posición de canto o proyectante vertical.

El cambio de plano o vista auxiliar nos viene definido por la **transformación de una Recta Horizontal (A_1) del plano en una Recta de Punta** desarrollado en el paso de Recta Horizontal a Recta de Punta.



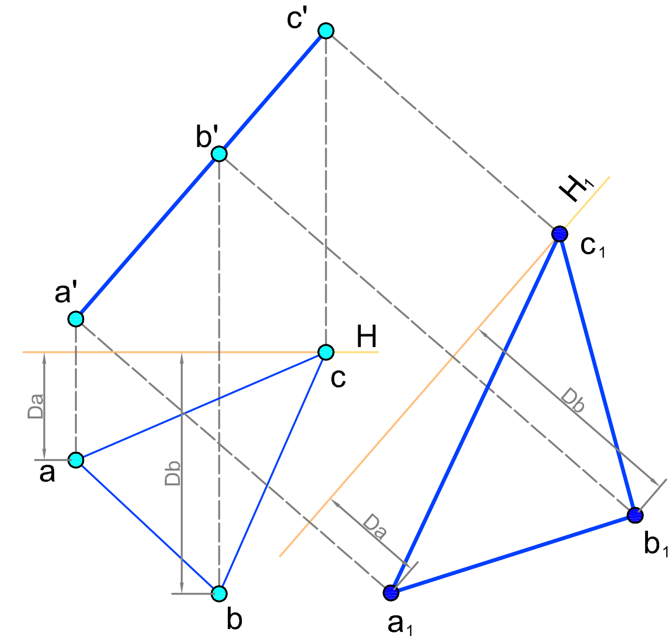
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PLANO DE CANTO EN PLANO HORIZONTAL:***

La transformación de un plano de canto en **Plano Horizontal** se obtiene mediante un **Cambio de Plano Horizontal**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser perpendiculares a la proyección vertical inicial del plano y por lo tanto la dirección (**H1**) será **paralela** a esta.

Se mantienen los **alejamientos** de los puntos **A**, **B** y **C**.

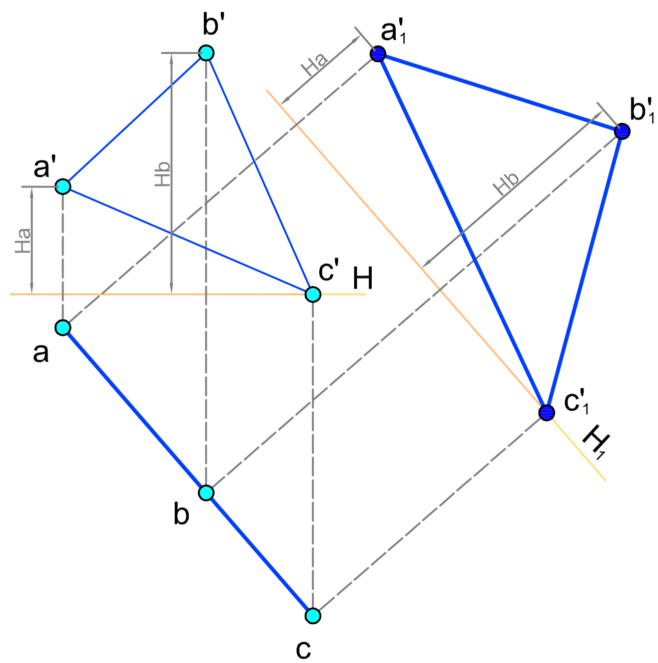


- ***PLANO VERTICAL EN PLANO FRONTAL:***

La transformación de un plano vertical en Plano Frontal se obtiene mediante un **Cambio de Plano Vertical.**

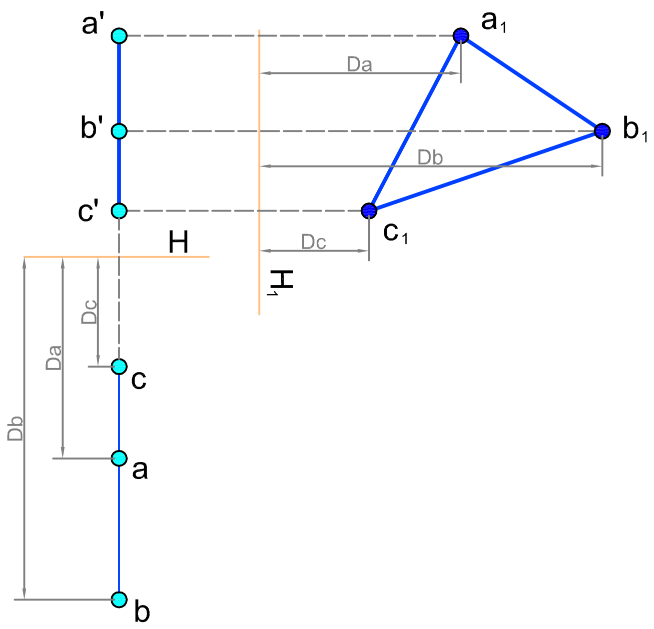
Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser perpendiculares a la proyección horizontal inicial del plano y por tanto la dirección (**H1**) tiene que ser paralela a esta.

Se mantienen las **cotas** de los puntos **A**, **B** y **C**.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

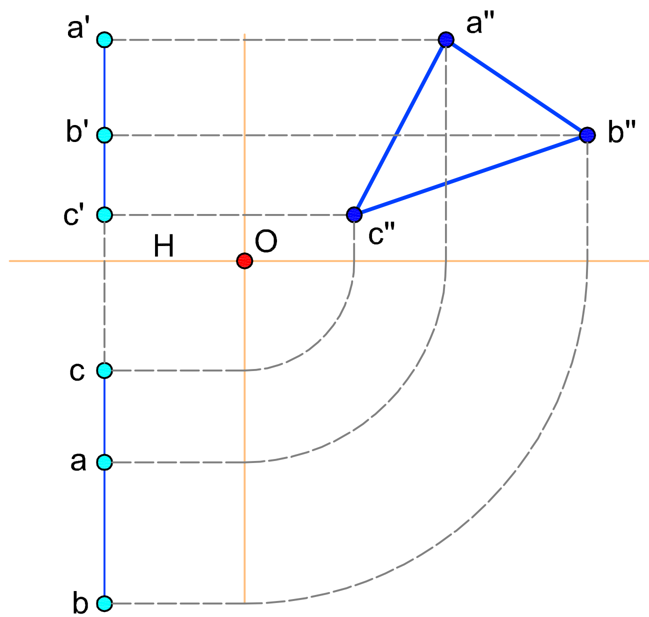
- ***PLANO DE PERFIL EN PLANO HORIZONTAL:***



Se obtiene mediante un **Cambio de Plano Horizontal**.

Las líneas de referencias del nuevo diédro deben ser perpendiculares a la proyección vertical inicial del plano y por lo tanto la dirección (H_1) será **paralela** a esta.

Se mantienen los **alejamientos** de los puntos **A**, **B** y **C**.



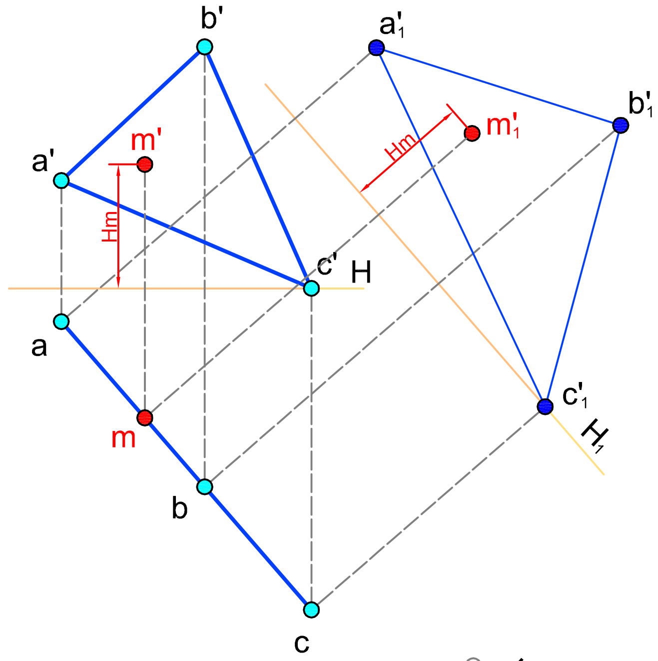
Comunmente esta operación se equipara a lo que se conoce como **Tercera Proyección** o Alzados Laterales.

- Se traza una línea auxiliar paralela al Plano de Perfil.
- Se trasladan perpendicularmente sobre ella las proyecciones horizontales de los puntos.
- Con centro en el punto (**O**) de intersección de la línea auxiliar con (**H**) y radios hasta los puntos proyectados, se trazan arcos de circunferencias hasta (**H**).
- Se suben perpendicularmente a (**H**) y se mantienen las cotas de los puntos, considerandose esta vista auxiliar como un **Alzado Lateral**.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RESTAURACIÓN DE ELEMENTOS AL DIÉDRO INICIAL:***

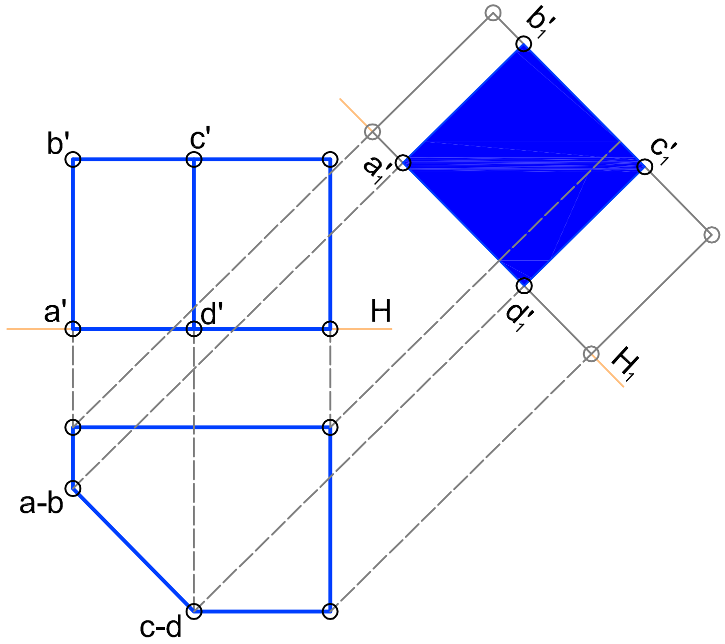
Al ser las Vistas Auxiliares como ya se indicó al inicio de este tema una operación para facilitar la resolución del ejercicio y no parte de la solución del mismo, vamos a continuación a restaurar al diédro inicial un punto (**M**) desde diédro auxiliar. Teniendo presente que:



- Todo elemento que pertenece a un plano, **pertenece en ambos Diédros**.
- En cambios de planos verticales, las **Cotas** se mantienen en los diferentes Diédros.
- En cambios de planos horizontales, los **Alejamientos** se mantienen en los diferentes Diédros.

Los Cambios de Planos o Vistas Auxiliares, además de para faclitar la posición del objeto, nos permite obtener más información del mismo.

- En el dibujo adjunto, se ha obtenido la **Verdadera Magnitud** de la cara (**A,B,C,D**) de una Forma Poliédrica, mediante un Cambio de Plano Vertical o nueva Vista Auxiliar.

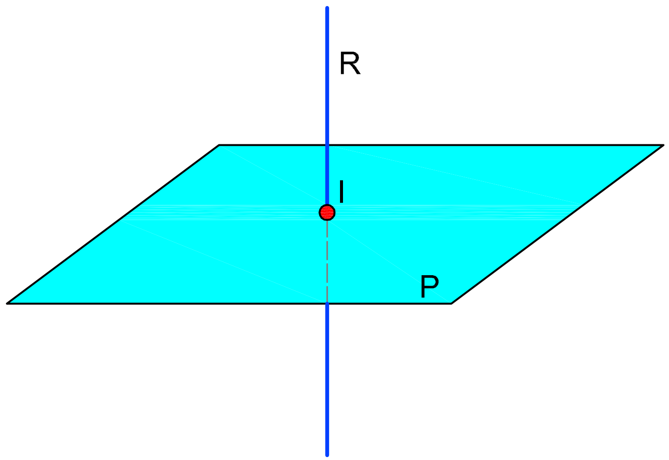


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

La **intersección** de una Recta (**R**) con un Plano (**P**) es un Punto (**I**).

El Punto (**I**) de intersección es **común** a los dos elementos a los que pertenece, Recta y Plano.

Basandonos en esto vamos a continuación a la resolución de los **Casos Particulares** de la intersección de una recta y un plano o figura plana.



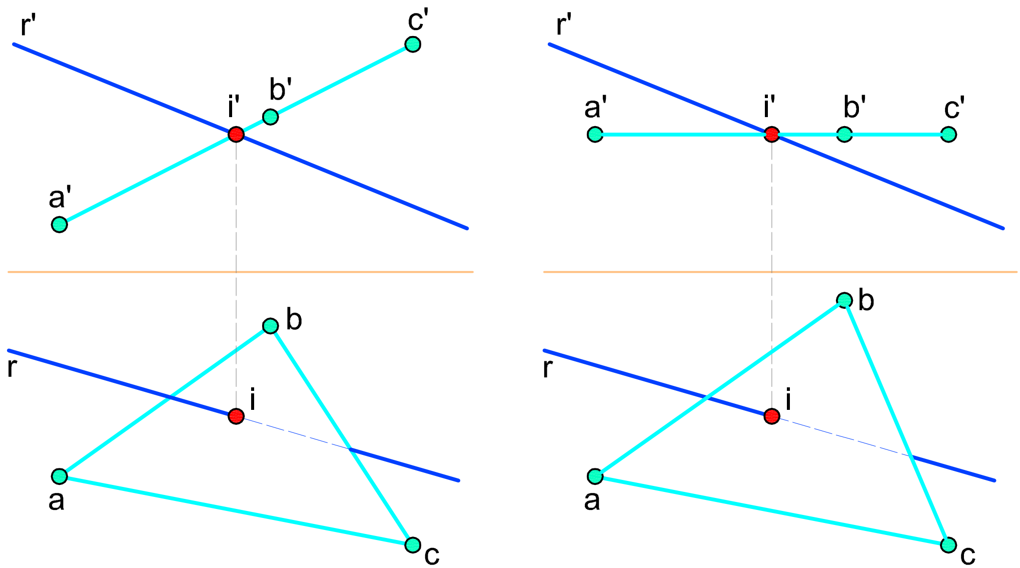
- ***RECTA OBLICUA CON PLANO DE CANTO:***

Al ser el Plano de Canto, las proyecciones verticales de todos los elementos comprendidos en él, están en la recta proyección vertical del plano.

La proyección vertical (**i'**) se encuentra en la intersección de las proyecciones verticales de la recta y del plano.

La proyección horizontal (**i**) del punto de intersección estará en la proyección horizontal de la recta (**R**).

Para la intersección de Recta Oblicua con **Plano Horionztal** se opera de la misma forma ya que este es una posición particular de Plano de Canto.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

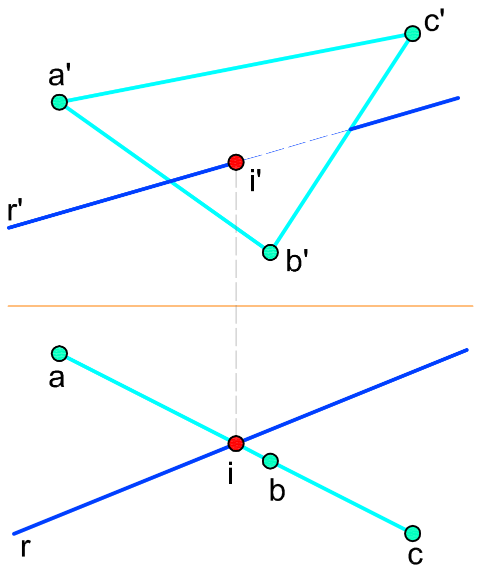
- ***RECTA OBLICUA CON PLANO VERTICAL:***

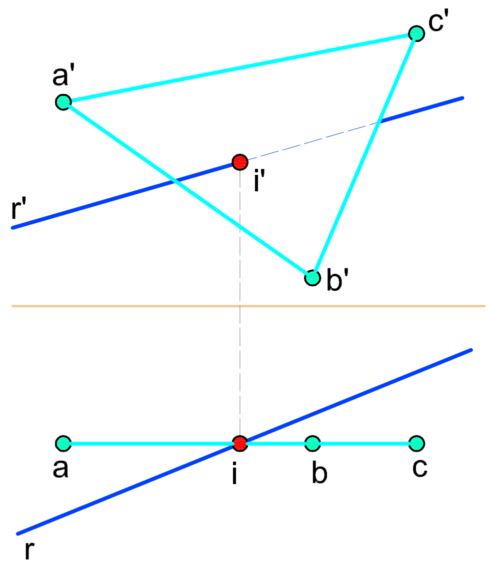
Al ser el Plano Vertical, las proyecciones horizontales de todos los elementos comprendidos en él, están en la recta proyección horizontal del plano.

La proyección horizontal (**i**) se encuentra en la intersección de las proyecciones horizontales de la recta y del plano.

La proyección vertical (**i'**) estará en la proyección vertical de la recta (**R**).

Para la intersección de Recta Oblicua con **Plano Frontal** se opera de la misma forma ya que este es una posición particular de Plano Vertical.





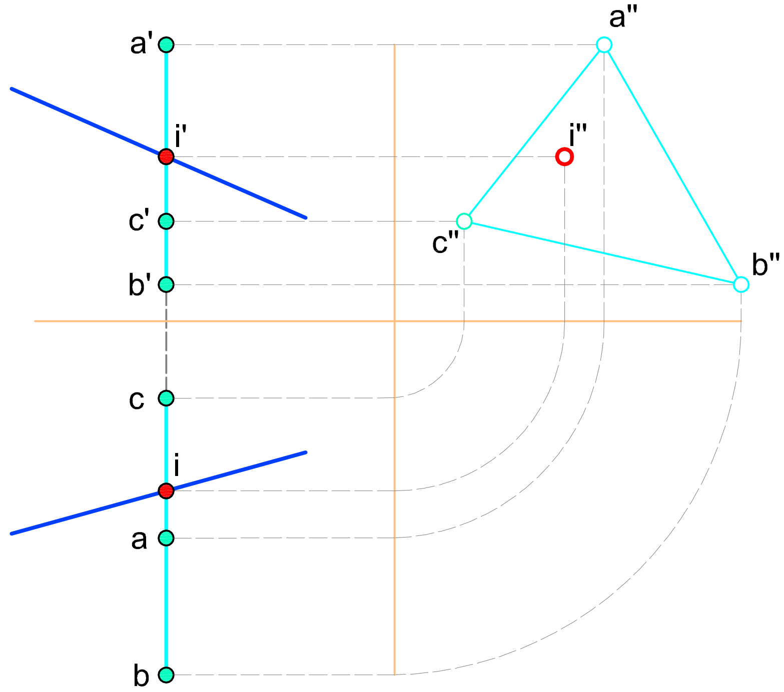
- ***RECTA OBLICUA CON PLANO DE PERFIL:***

El Plano de Perfil es a su vez Vertical y de Canto, por lo que las proyecciones horizontales y verticales de todos los elementos comprendidos en él, están en las rectas proyección horizontal y vertical del plano.

La proyección horizontal (**i**) se encuentra en la intersección de las proyecciones horizontales de la recta y del plano.

La proyección vertical (**i'**) estará en la intersección de las proyecciónes verticales de la recta y del plano.

Para ver la situación real del punto en el plano, recurrimos a la **Tercera Proyección**.

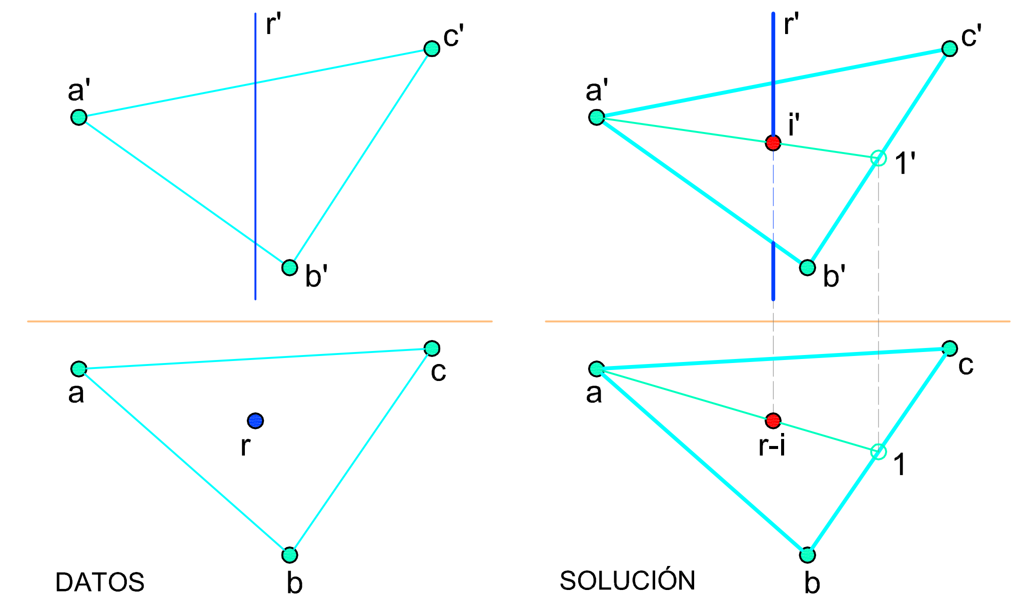


• *PLANO OBLICUO CON RECTA VERTICAL:*

Al ser la Recta Vertical, las proyecciones horizontales de todos los puntos pertenecientes a esta, están sobre el punto proyección horizontal de la recta.

La proyección horizontal (**i**) se encuentra en la proyección horizontal de la recta.

La proyección vertical (**i'**) se calcula por **pertenencia** de punto a plano. En nuestro caso mediante una recta auxiliar (**A-1**).

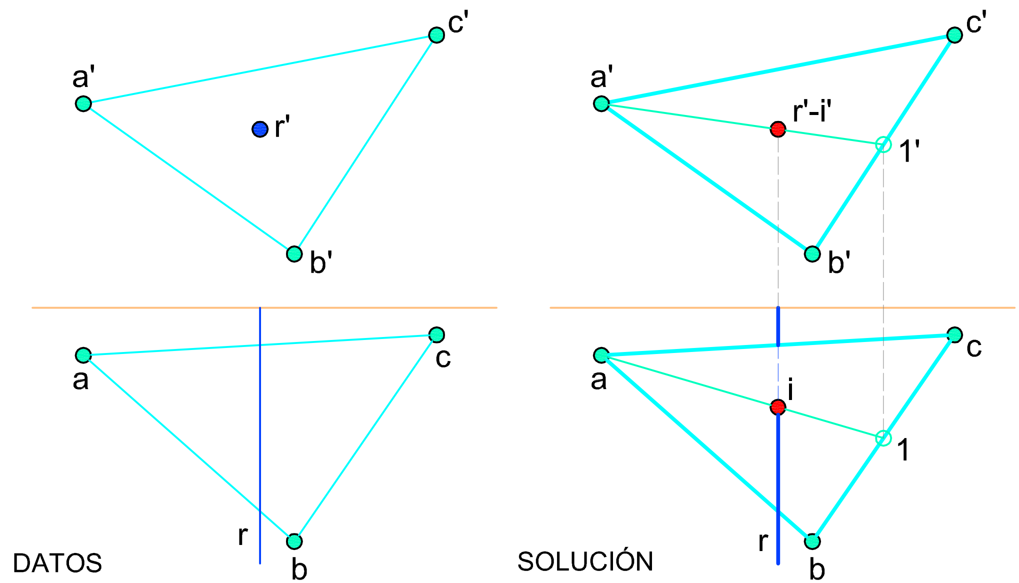


• *PLANO OBLICUO CON RECTA DE PUNTA:*

Por ser la recta de punta, las proyecciones verticales de todos los puntos pertenecientes a esta están, sobre el punto proyección vertical de la recta.

La proyección vertical (**i'**) del punto se encuentra sobre la proyeccione vertical de la recta.

La proyección horizontal (**i**) del punto se ha calculado por **pertenencia** de punto a plano con una recta auxiliar (**A-1**).

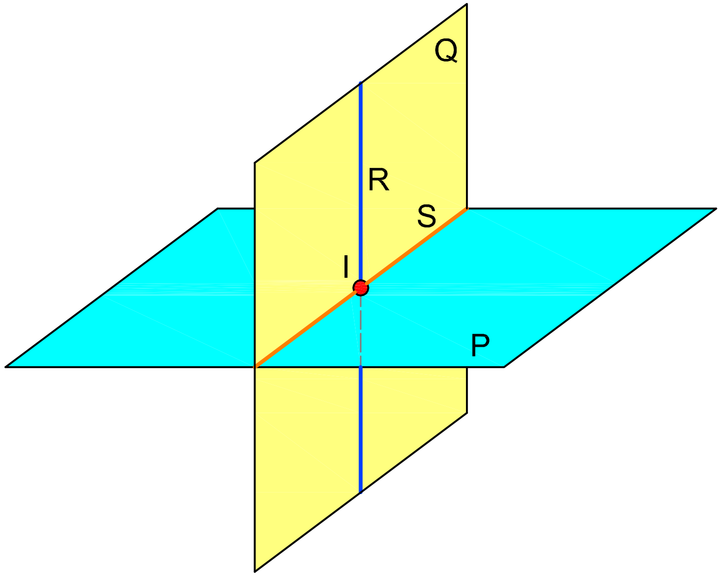


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *INTERSECCIÓN RECTA PLANO (METODO GENERAL):*

Si bien todos los casos de intersecciones los podemos traducir a casos particulares mediante vistas auxiliares, en ocasiones nos interesara aplicar el Metodo General. Para lo que:

- Hacemos pasar por la recta (**R**) un **Plano Auxiliar (Q)**.
- Se halla la intersección del Plano Auxiliar (**Q**) con el Plano (**P**) y cuyo resultado será una Recta (**S**).
- Al ser las Rectas (**R**) y (**S**) **pertenecientes** a un mismo Plano (**Q**) se cortan en el **Punto (I)**. (Si no son paralelas).



• *RECTA OBLICUA CON PLANO OBLICUO:*

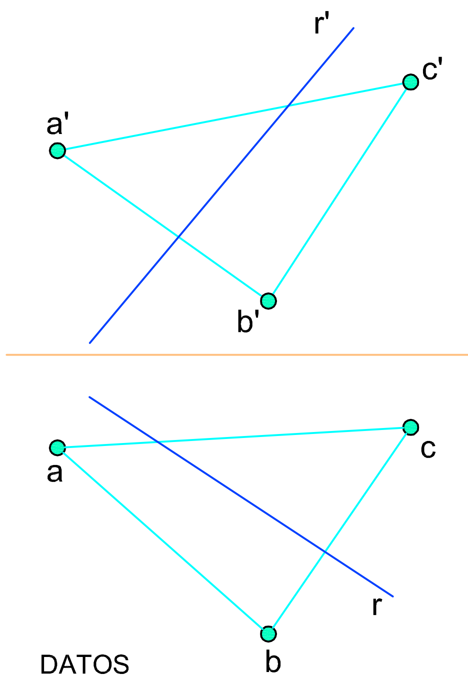
Al ser, tanto el Plano (**ABC**) como la Recta (**R**) **oblicuos**, para hallar el Punto (**I**) de intersección tenemos que aplicar el **Metodo General**.

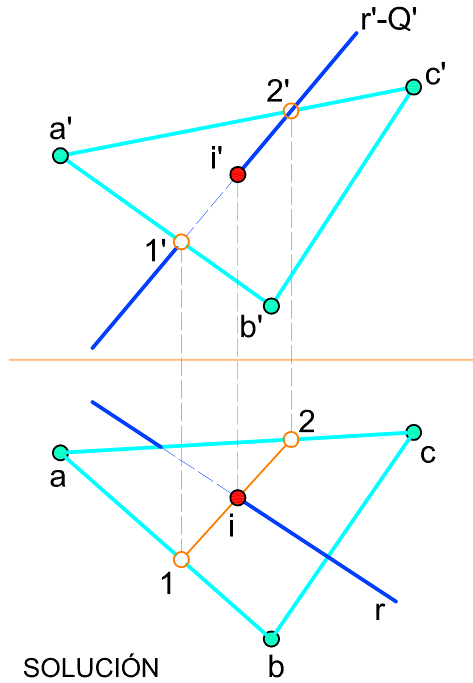
Hacemos pasar por la Recta un **Plano Auxiliar (Q)** de Canto.

Se halla la Recta (**1-2**) de intersección de los planos (**P**) y (**Q**) cuya proyección vertical es directa por ser (**Q**) **Proyectante Vertical**.

La proyección horizontal (**i**) del punto común de las proyecciones horizontales de las rectas (**R**) y (**1-2**), será la solución.

Subiendo este punto a la proyección vertical de la Recta (**R**), tendremos completadas las proyecciones.





Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ESTUDIO DE LA VISIBILIDAD EN PROYECCIÓN VERTICAL:***

- Se traza una **Recta de Punta** definida por los puntos (**1**) de la recta y (**2**) del plano.

- Se comparan los **alejamientos** de estos puntos.

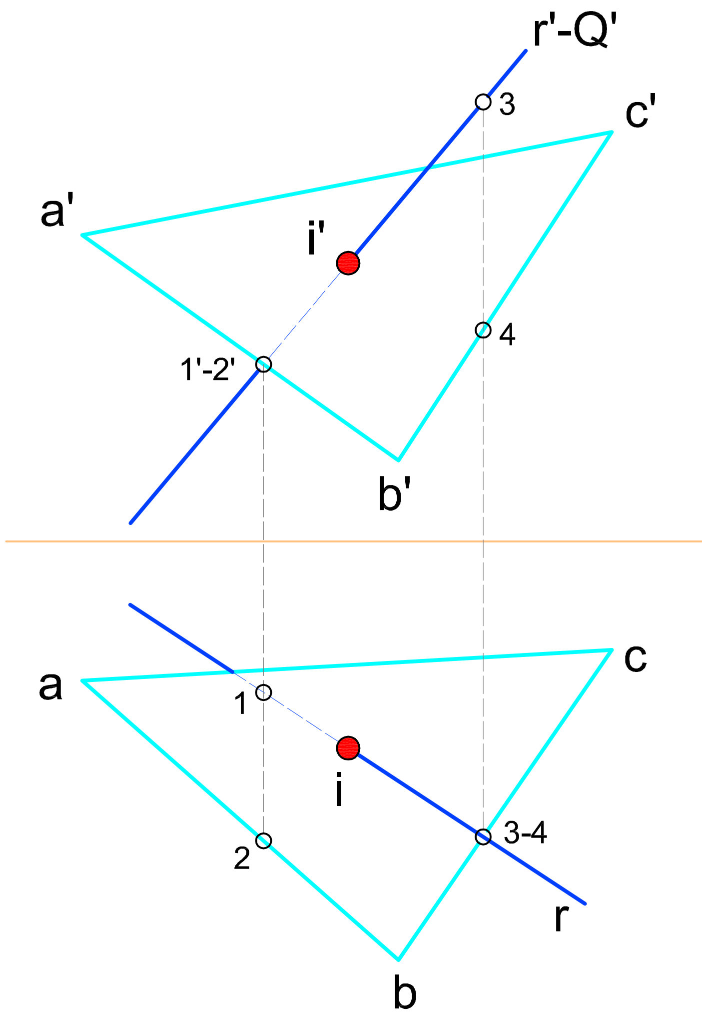
- El elemento (Recta o Plano) de **mayor alejamiento** será **visto** en **Proyección Vertical**.

- ***ESTUDIO DE LA VISIBILIDAD EN PROYECCIÓN HORIZONTAL:***

- Se traza una **Recta Vertical** definida por los puntos (**3**) de la recta y (**4**) del plano.

- Se comparan las **cotas** de estos puntos.

- El elemento (Recta o Plano) de **mayor cota** será **visto** en **Proyección Horizontal**.

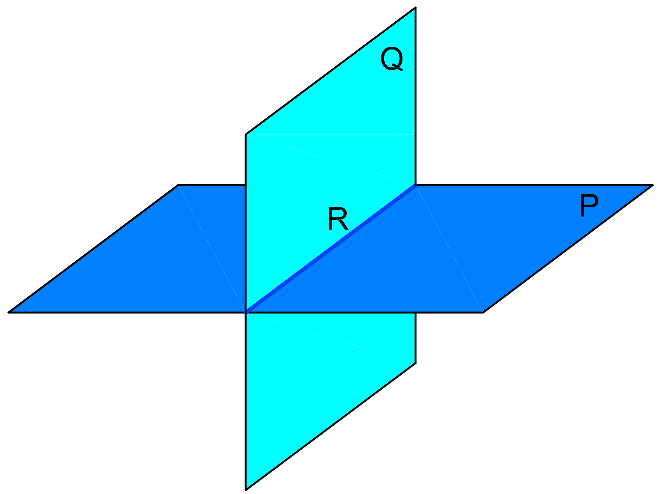


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

La **intersección** de un Plano (**P**) con un Plano (**Q**) es una **Recta (R)**.

La Recta (**R**) de intersección es **común** a los dos planos a los que pertenece.

Basandonos en esto vamos a continuación a la resolución de los **Casos Particulares** de la intersección de dos planos o figuras planas.



- ***PLANO OBLICUO CON PLANO DE CANTO:***

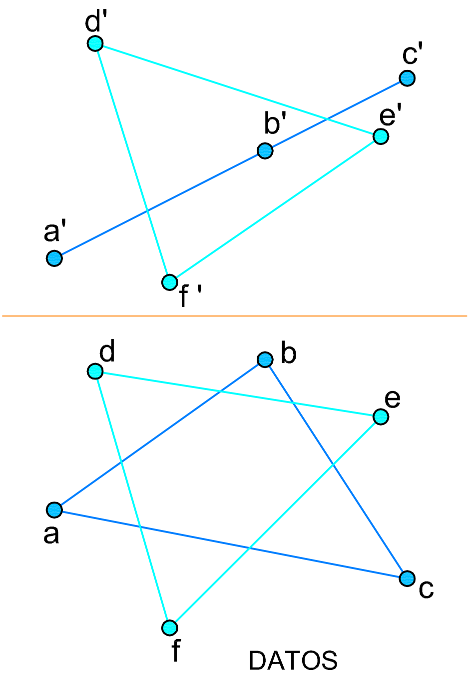
Al ser uno de los Planos de **Canto**, las proyecciones verticales de todos los elementos comprendidos en él, están en la recta proyección vertical del este.

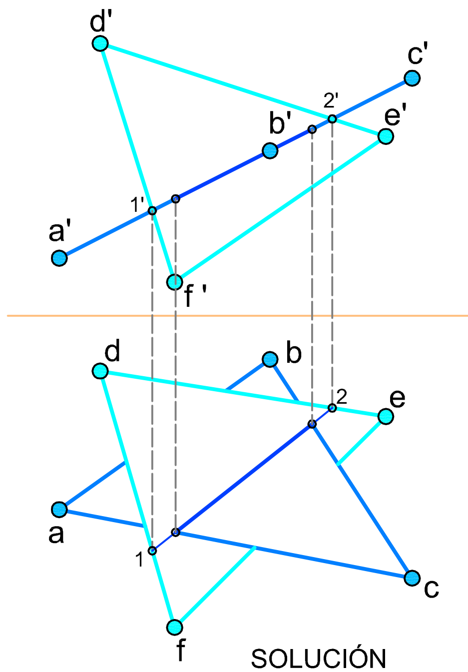
La proyección vertical (**1'-2'**) de la recta intersección se encuentra en la intersección de las proyecciones verticales de los dos planos.

La proyección horizontal (**1-2**) de la recta intersección se proyecta horizontalmente por pertenencia al Plano (**DEF**).

La Recta Intersección queda **limitada** por la parte **común** a las dos Figuras Planas

Para la intersección de Plano Oblicuo con **Plano Horizontal** se opera de la misma forma ya que este es una posición particular de Plano de Canto.





Sistema Diédrico Directo. INTERSECCIÓN **PLANOS**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *PLANO OBLICUO CON PLANO VERTICAL:*

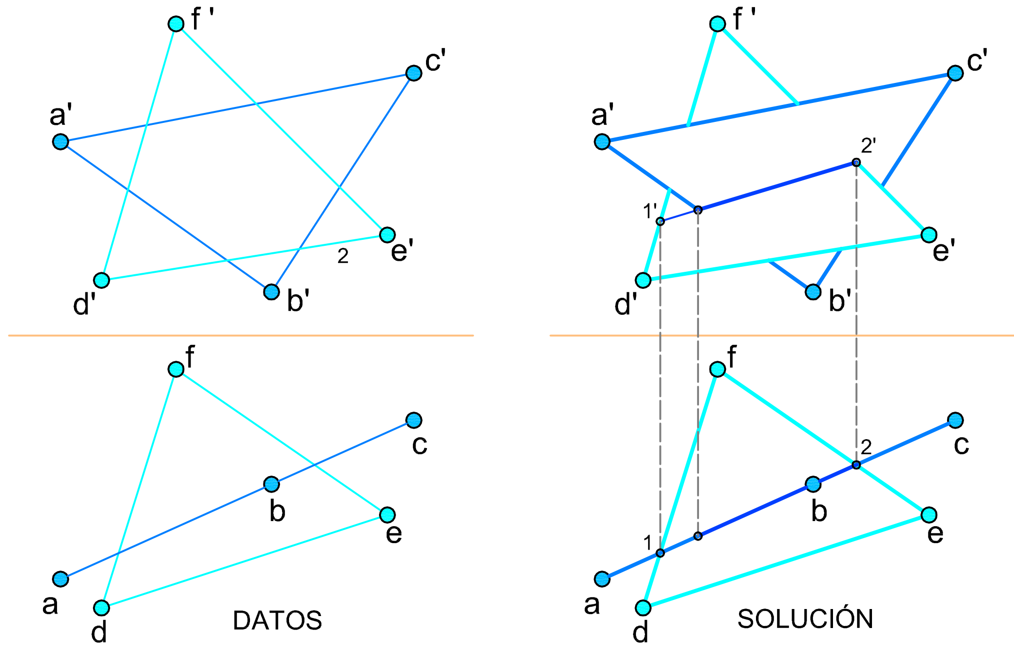
Al ser uno de los **Planos Vertical**, las proyecciones horizontales de todos los elementos comprendidos en él, están en la recta proyección horizontal del plano.

La proyección horizontal (**1-2**) de la recta intersección, se encuentra en la intersección de las proyecciones horizontales de los dos planos.

La proyección vertical (**1'-2'**) de la recta, se representa por pertenencia al Plano (**DEF**).

La recta intersección, queda limitada el **segmento común** a las dos figuras planas.

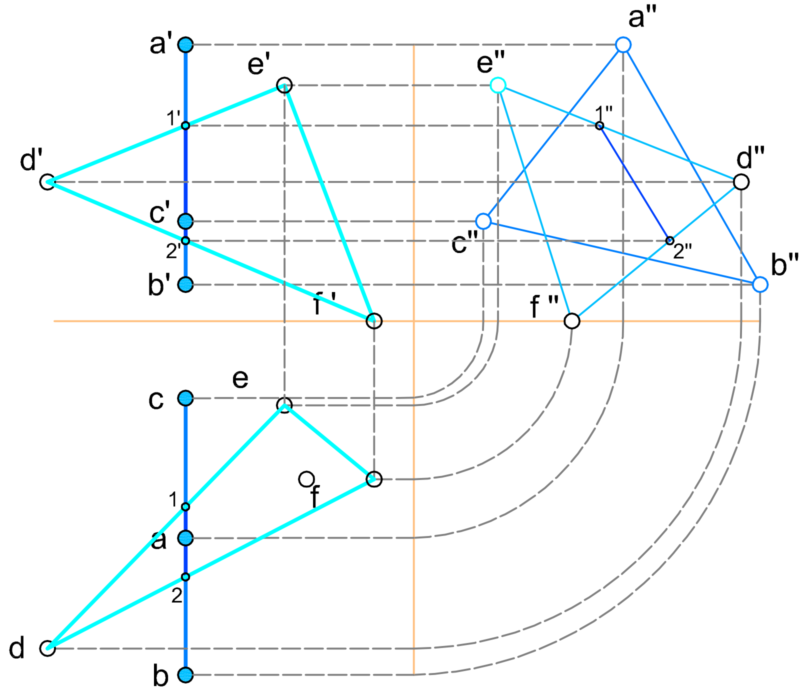
Para la intersección de Plano Oblicuo con **Plano Frontal** se opera de la misma forma ya que este es una posición particular de Plano Vertical.



• *PLANO OBLICUO CON PLANO DE PERFIL:*

Por pertenecer la Recta Intersección al **Plano de Perfil** tanto las proyecciones horizontales y verticales de la misma están en las rectas proyección horizontal y vertical de este plano.

Para ver la situación real del segmento en el plano, recurrimos a la **Tercera Proyección**.



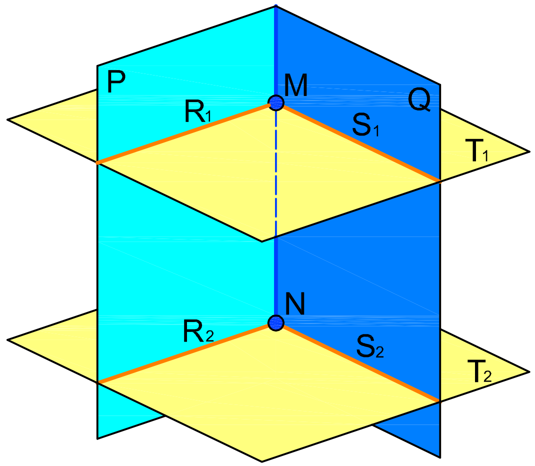
- ***INTERSECCIÓN DE PLANOS (MÉTODO GENERAL):***

Se traza un **Plano Auxiliar (T_1)** y se hallan las intersecciones (**R_1**) y (**S_1**) de este con los Planos (**P**) y (**Q**).

Por se las rectas (**R_1**) y (**S_1**) pertenecientes a un mismo plano (**T_1**), se cortan en un **Punto (M)** común a los tres planos.

Repitiendo esta operación con otro Plano **Auxiliar (T_2)**, hallaremos el **Punto (N)**.

La **Recta (M-N)** será la solución buscada.



- ***INTERSECCIÓN DE PLANOS OBLICUOS:***

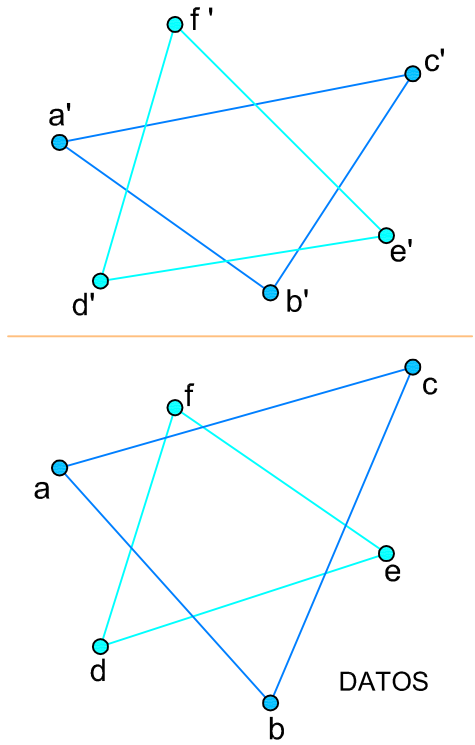
Por el Punto (**A**), trazamos un Plano Auxiliar **Horizontal** que corta a las Figuras Planas según las Rectas (**A-1**) y (**2-3**).

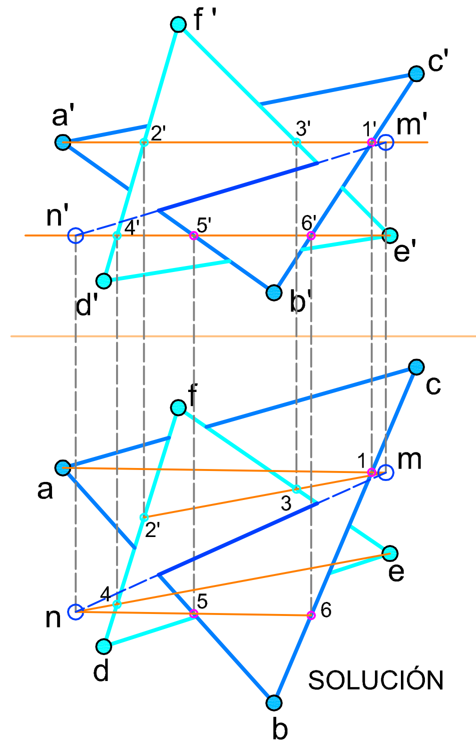
Se halla la intersección de estas dos Rectas (**Punto M**).

Repitiendo esta operación con otro Plano Auxiliar **Horizontal** por el Punto (**E**), encontramos las Rectas (**E-4**) y (**5-6**) y como punto común el **Punto (N)**.

La **Recta (M-N)** será la solución buscada, quedando limitada al segmento común a las dos figuras planas.

Para la visibilidad del conjunto se comparan las cotas para la proyección horizontal y los alejamientos para la proyección vertical.





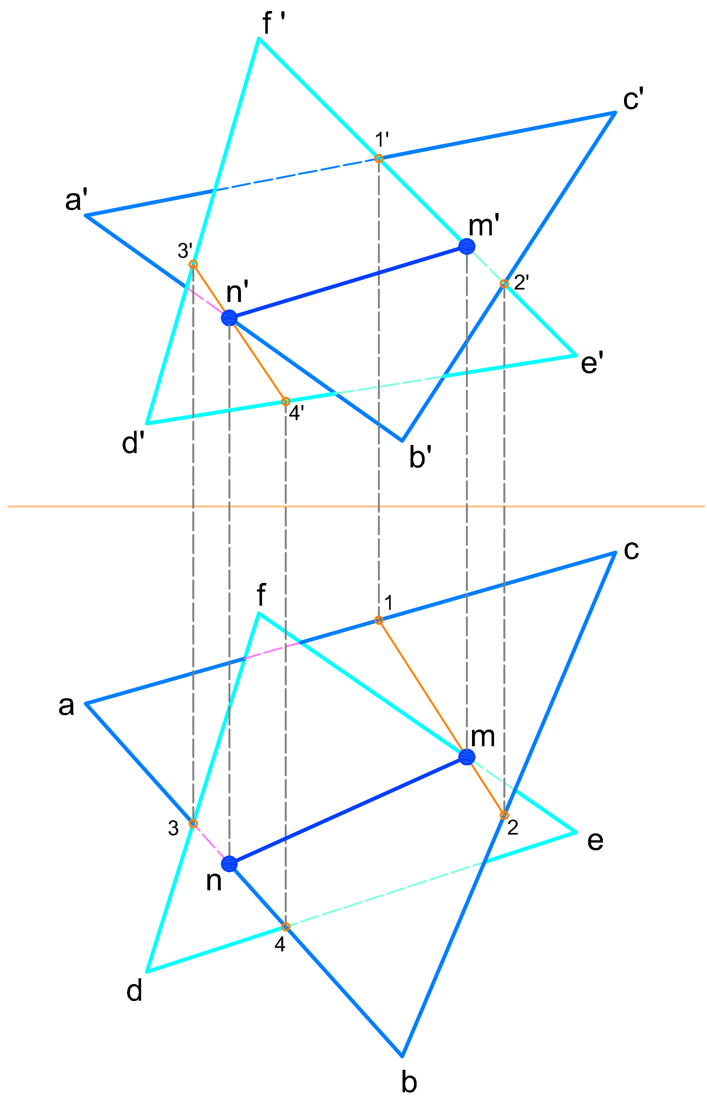
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***INTERSECCIÓN DE PLANOS***
  (MÉTODO INTERSECCIÓN RECTA PLANO):

Este metodo consiste en encontrar la Recta Intersección de los Planos, hallando los **Puntos** que la definen por el Metodo de Intersección de Rectas de uno de los planos con el otro.

En la figura adjunta, el **Punto** (**M**) se ha calculado por la intersección del Lado (**E-F**) con el Plano (**A,B,C**) tomando como Plano Auxiliar un **Plano de Canto**.

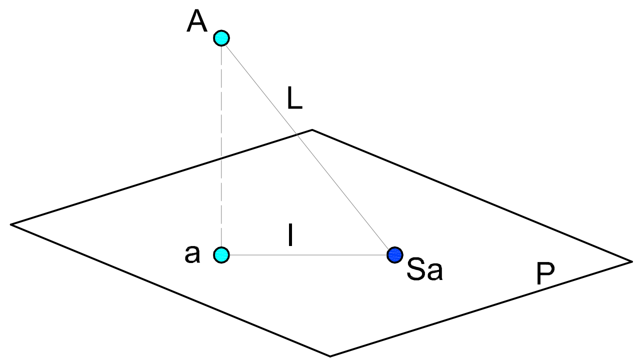
El **Punto (N)**, se halla por la intersección del Lado (**A-B**) con el Plano (**D,E,F**) tomando como Plano Auxiliar un **Plano Vertical**.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

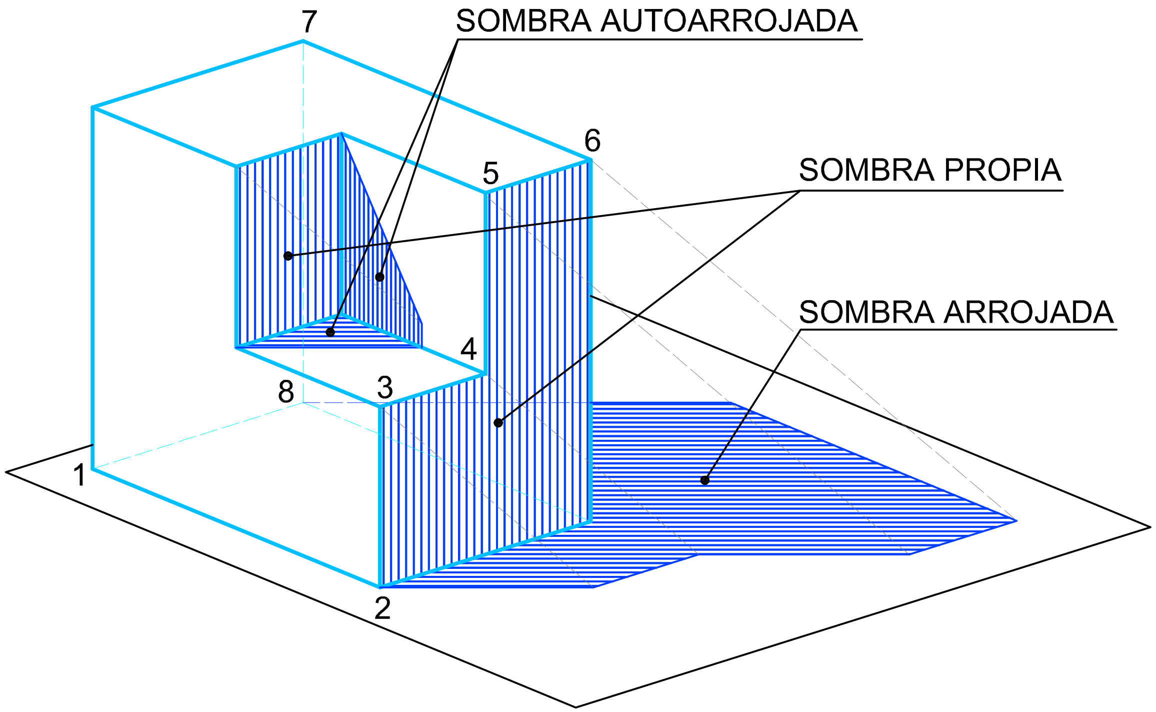
El ***Estudio de Sombras*** de cuerpos no deja de ser un ejercicio de **intersecciones**, y por tanto es de aplicación todos los conceptos de estas.

El concepto básico es hallar la **intersección** (**Sa**) con un plano (**P**), del **rayo de luz** que con una determinada dirección (**L**) pasa por el punto (**A**).



Dentro del estudio de sombras nos encontramos con una serie de conceptos básicos y que pasamos a enunciar:

- **Rayo de Luz**: Es la dirección del haz de rayos que inciden sobre el objeto.
- **Luz Propia**: Zona del objeto que queda iluminada.
- **Línea Separatriz**: Es la línea que separa la zona de luz de la zona en sombra del objeto. Las sombras arrojadas de estas líneas, son los contornos de las sombras arrojadas.
- **Sombra Propia**: Zona del objeto que queda en sombra.
- **Sombra Arrojada**: Es la sombra que arroja el objeto sobre un plano. Su contorno es la sombra arrojada de la línea separatriz.
- **Sombra Autoarrojda**: Zona en sombra de parte del objeto sobre sí mismo.

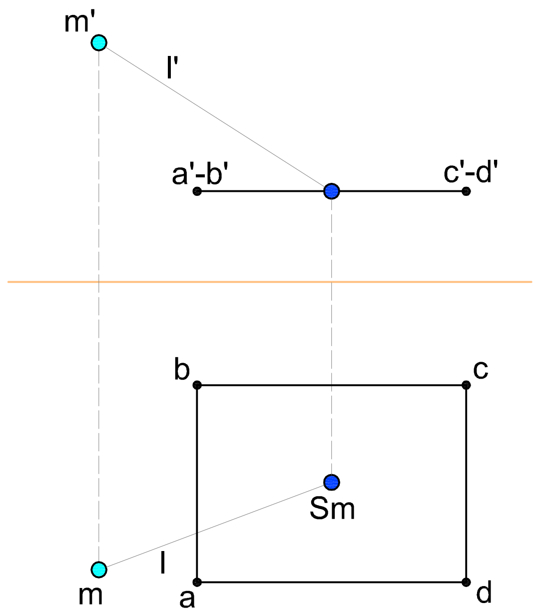


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *SOMBRA DE PUNTO SOBRE PLANO HORIZONTAL:*

Consiste en hallar la **intersección** (**Sm**) del Rayo de Luz (**L**) que pasa por el Punto (**M**) con el Plano (**A,B,C,D**).

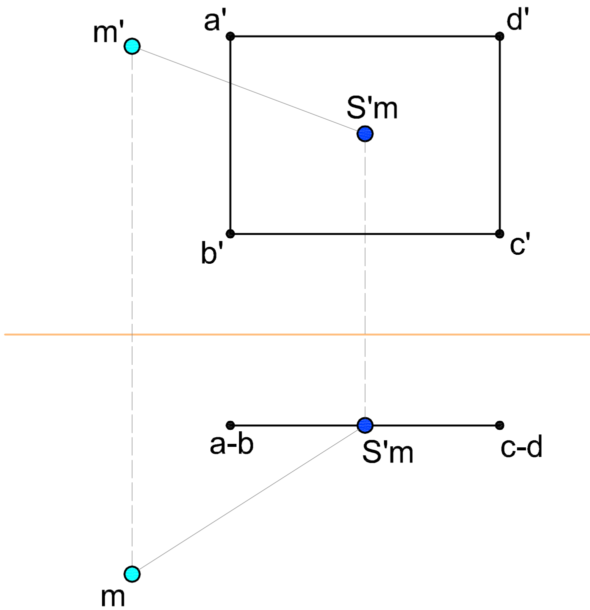
Al ser el plano horizontal un caso particular de **Plano de Canto**, para hallar la sombra de puntos sobre planos de canto o proyectantes verticales, se resuelven de la misma manera que en este caso.



• *SOMBRA DE PUNTO SOBRE PLANO FRONTAL:*

Consiste en hallar la **intersección** (**Sm**) del Rayo de Luz (**L**) que pasa por el Punto (**M**) con el Plano (**A,B,C,D**).

Al ser el plano frontal un caso particular de **Plano Vertical**, para hallar la sombra de puntos sobre planos verticales o proyectantes horizontales, se resuelven de la misma manera que en este caso.

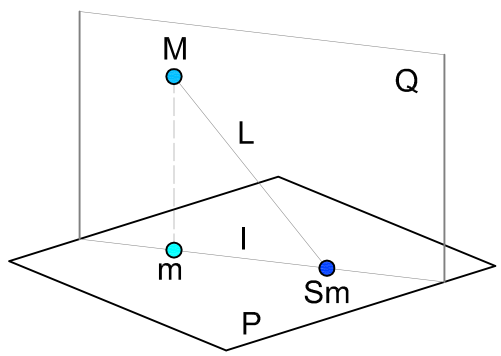


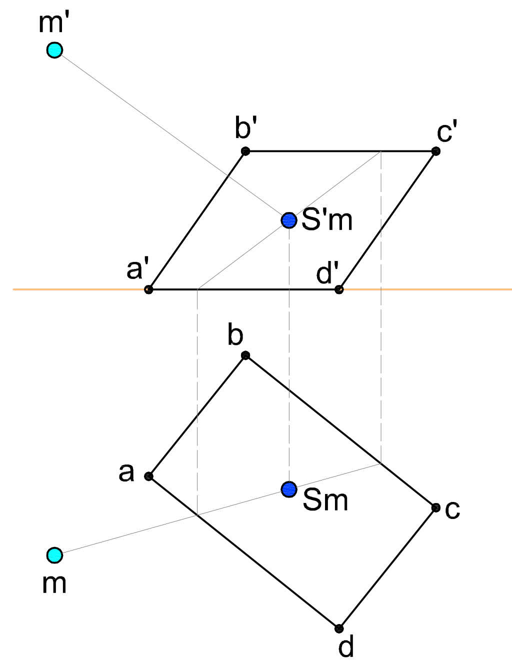
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***SOMBRA DE PUNTO SOBRE PLANO OBLICUO:***

Consiste en hallar la **intersección** (**Sm**) del Rayo de Luz (**L**) que pasa por el Punto (**M**) con el Plano (**A,B,C,D**).

Al ser el **Plano Oblicuo**, se aplican los conceptos estudiados en el método general para hallar la intersección de recta y plano.(Planos Auxiliares)



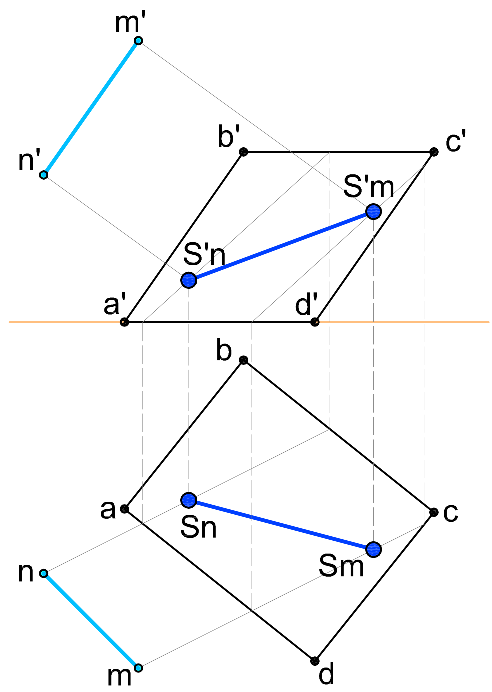


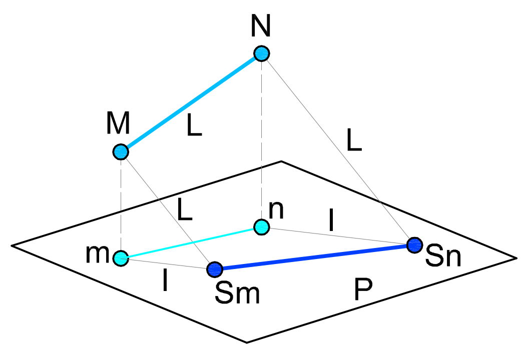
- ***SOMBRA DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO:***

Consiste en hallar la **intersección** del Plano que definen la Recta (**M-N**) y el Rayo de Luz (**L**), con el Plano (**A,B,C,D**).

Para hallar la intersección, lo más común es hacerlo por el **método de intersección Recta/Plano**, tomando como rectas los rayos de luz.

En los casos en los que la Recta sea **paralela** al Plano, la **sombra** sería paralela a la recta.

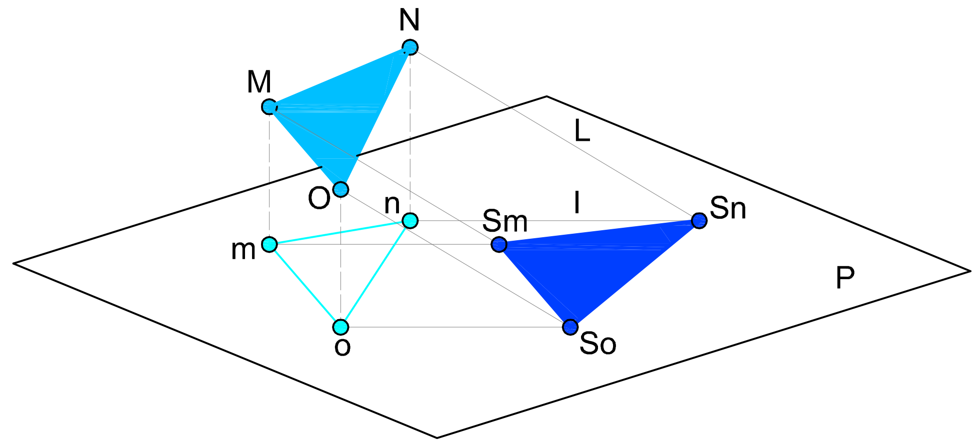




Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***SOMBRA ARROJADA DE UNA FIGURA PLANA:***

Consiste en hallar las sombras arrojadas de **Puntos** (vértices) o **Rectas** (lados) de la figura sobre el plano mediante los pasos ya estudiados.

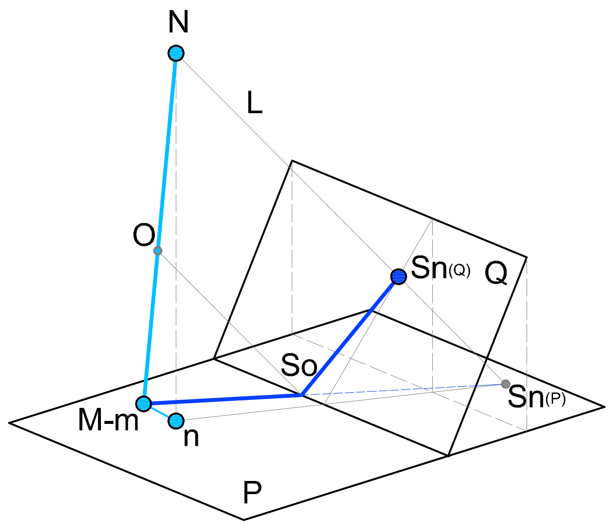


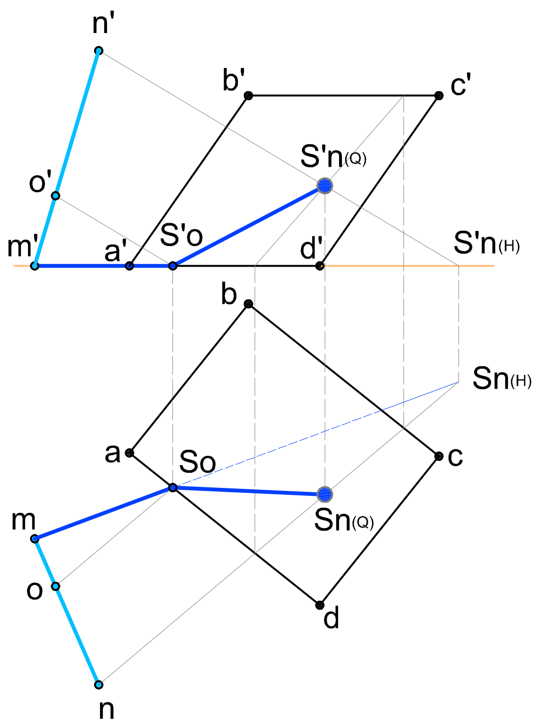
- ***SOMBRA DOBLADA:***

Se denomina **Sombra Doblada** a aquellos casos en que un objeto arroja sombra sobre **diferentes planos o figuras planas**.

Se resuelven arrojando la sombra del objeto sobre cada uno de los planos y limitándola en la parte interior de cada plano.

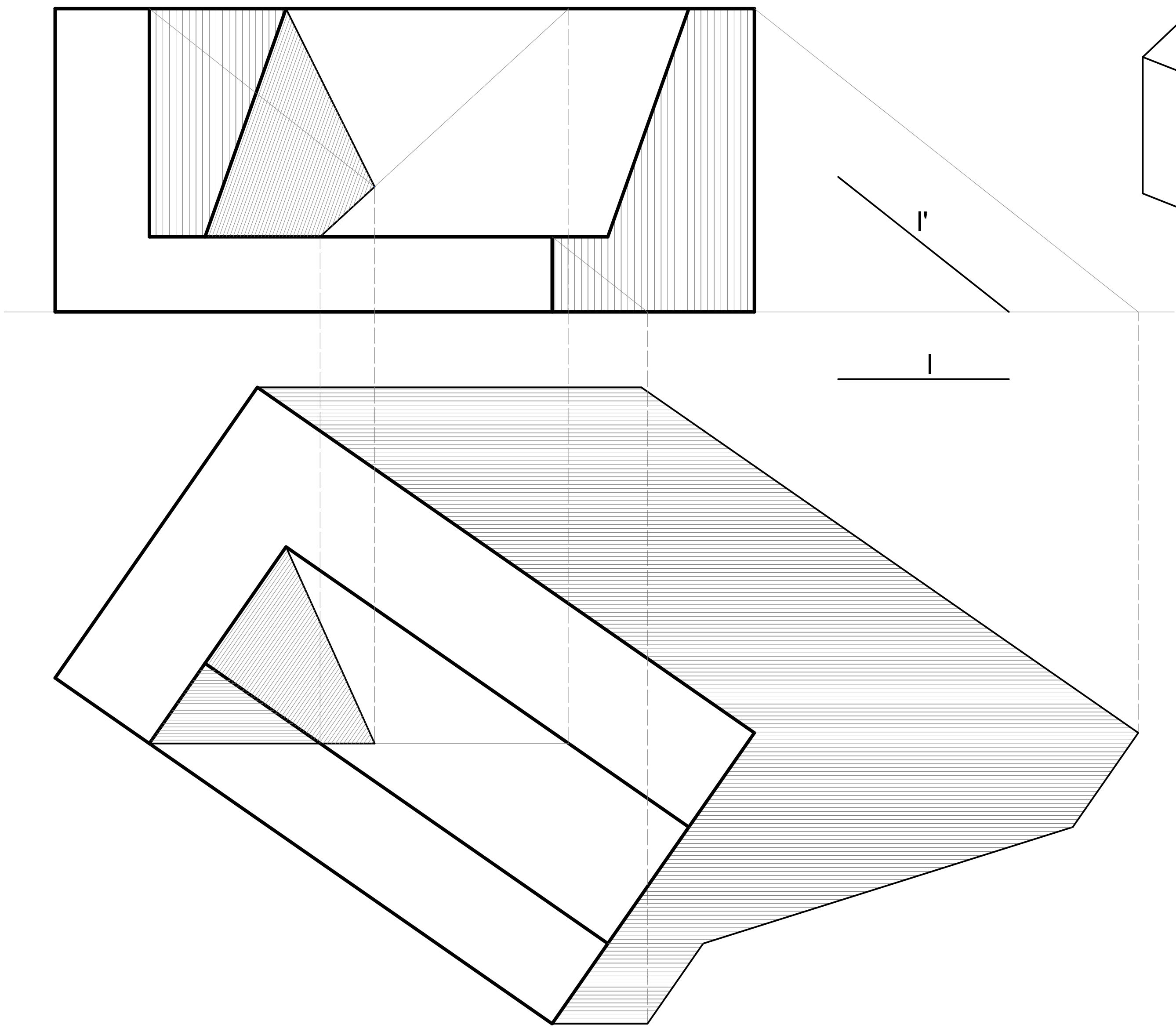
Como los diferentes planos tienen en **común** la recta de intersección de ambos, existe un punto (**O**) o segmento si el objeto que arroja sombra es una figura plana, que arrojará una **sombra común** a los dos planos, siendo este punto o recta el que produce el doblado de la sombra.

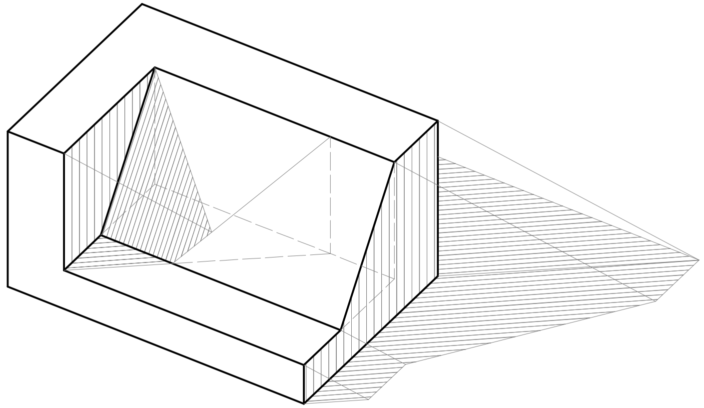




Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***EJEMPLO PRÁCTICO:***



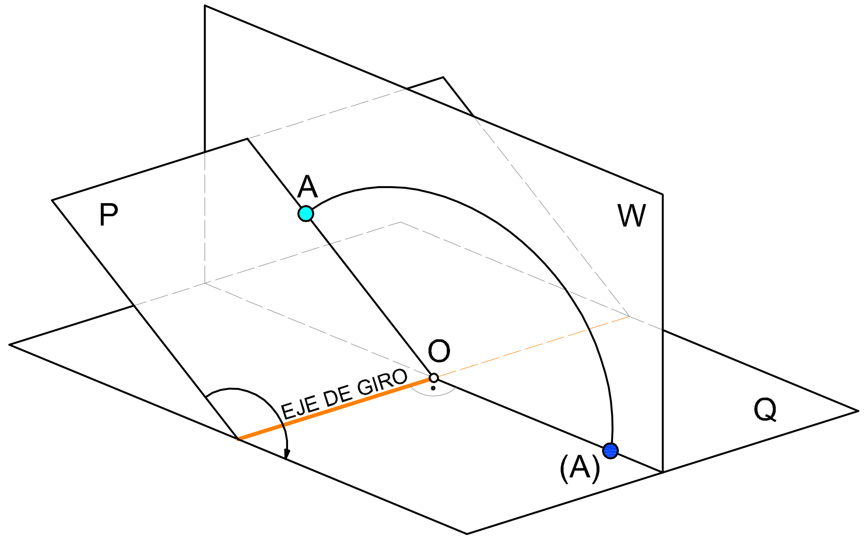


- ***CONCEPTOS BÁSICOS:***

El **abatimiento** de un Plano (**P**) sobre otro Plano (**Q**) consiste en **girar** el plano que se quiere abatir hasta que se superponga con el otro plano.

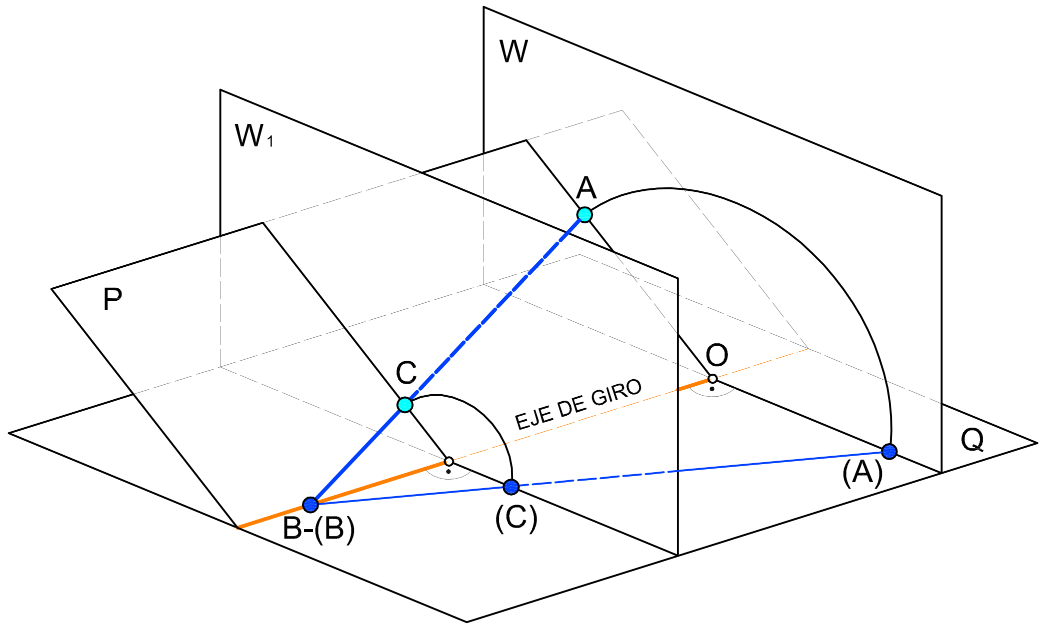
El **eje de giro** o charnela de abatimiento es la recta intersección de los dos planos.

Al abatir un punto (**A**) del plano (**P**), lo que se produce es un **arco de circunferencia** en un plano (**W**) que pasando por el punto es **perpendicular** al eje de giro y por lo tanto al plano (**Q**), siendo el centro (**O**) del arco la intersección de (**W**) con el eje de giro y el radio de este el segmento (**O-A**).



- ***ABATIMIENTO DE UNA RECTA:***

- El abatimiento de una recta, es la resultante de la unión del abatimiento de **dos de sus puntos**.
- El abatido de un punto (**B**) **perteneciente** al eje de giro es él mismo.
- El abatido de un punto de una recta se encuentra sobre la recta abatida, existiendo una **afinidad** entre ambas.

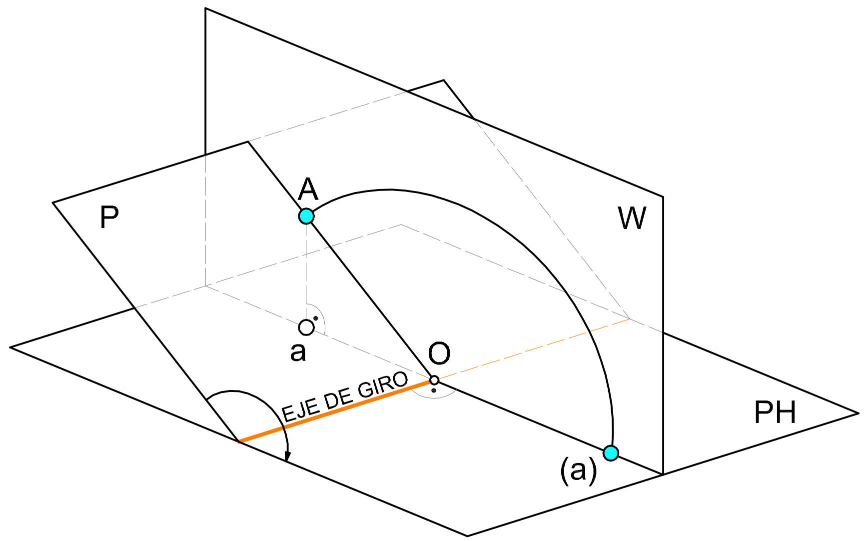


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ABATIMIENTOS SOBRE UN PLANO HORIZONTAL:***

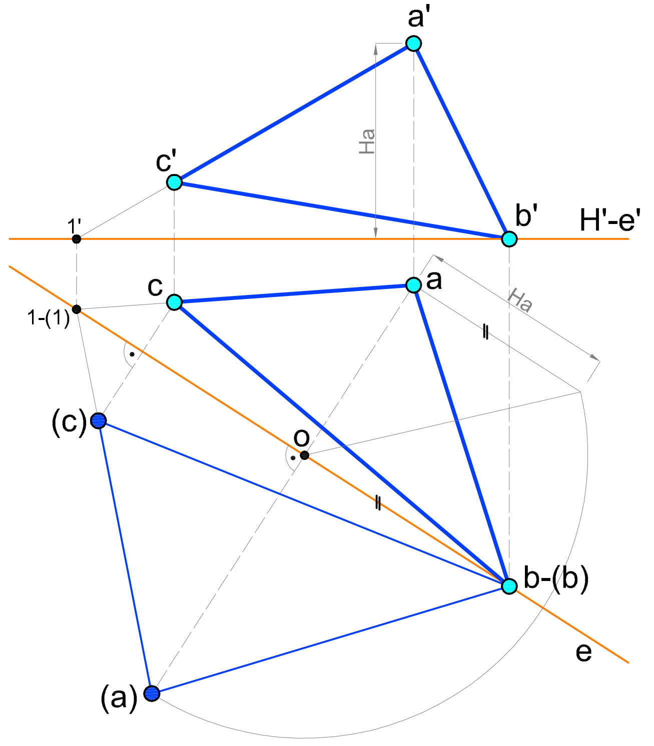
El **abatimiento** de un Plano (**P**) sobre un **Plano Horizontal** (**PH**) consiste en **girar** el plano hasta que se superponga con él, consiguiendo de esta forma **verdaderas magnitudes**, teniendo en cuenta que en estos casos:

- El Eje de Giro es una **Recta Horizontal** del plano.
- El Plano (W) es un **Plano Vertical**.
- El Radio (**O-A**) del arco, es la **hipotenusa** del triángulo rectángulo de catetos, (**O-a**) distancia desde la proyección horizontal del punto al centro de giro y (**A-a**) diferencia de cota del punto al plano horizontal.



Los pasos a seguir en el Sistema son los siguientes:

1. Definir el Plano Horizontal sobre el que se abate:
2. Hallar el eje de giro (**E**) intersección del plano con el plano horizontal.
3. Desde la proyección horizontal (**a**) se traza perpendicular y paralela a la proyección horizontal (**e**) del eje de giro, llevando sobre la paralela la cota del punto al plano horizontal elegido.
4. Con centro (o) donde la perpendicular desde (a) corta al eje de giro se traza un arco de circunferencia hasta que corte a la perpendicular (**(a)**), siendo esta la posición del punto abatido.
5. El punto (**(b)**) abatido coincide con su proyección horizontal por pertenecer al eje y el punto (**(c)**) abatido lo encontramos por afinidad.



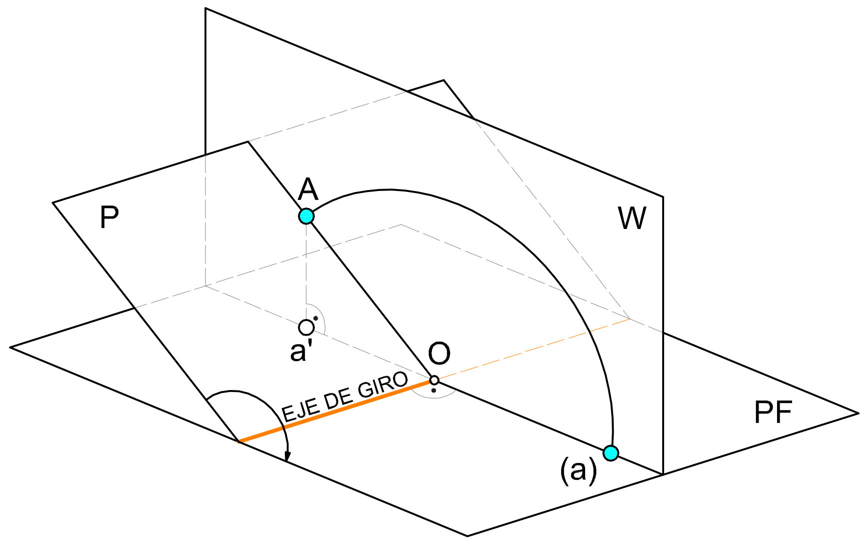
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

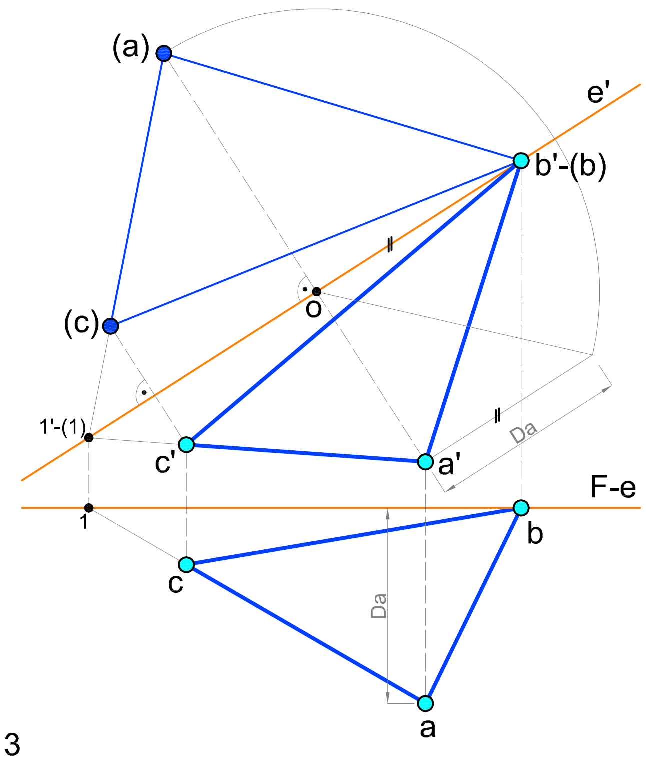
• *ABATIMIENTOS SOBRE UN PLANO FRONTAL:*

El **abatimiento** de un Plano (**P**) sobre un **Plano Frontal** (**PF**) consiste en **girar** el plano hasta que se superponga con él, consiguiendo de esta forma **verdaderas magnitudes**. Teniendo en cuenta, que este caso es similar al abatimiento sobre un plano horizontal pero con las siguientes particularidades:

- El Eje de Giro es una **Recta Frontal** del plano.
- El Plano (W) es un **Plano de Canto**.
- El Radio (**O-A**) del arco, es la **hipotenusa** del triángulo rectángulo de catetos, (**O-a**) distancia desde la proyección vertical del punto al centro de giro y (**A-a'**) diferencia de alejamiento del punto al plano frontal.

Los pasos a seguir en el Sistema son los mismos que para abatimientos sobre un plano horizontal pero modificando las referencias a proyecciones horizontales por las verticales y las referencias a cotas por alejamientos.





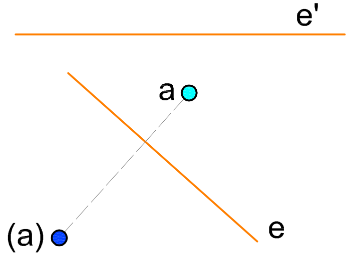
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***DESABATIMIENTO DE PLANOS:***

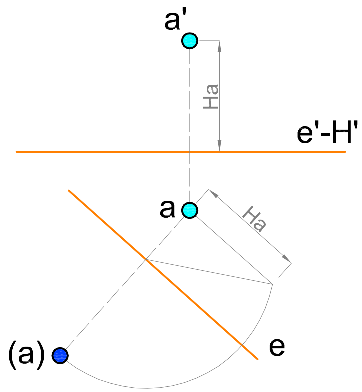
El **desabatimiento** de un Plano consiste en el procedimiento inverso al abatimiento.

Para desabatir un plano definido por un punto (**A**) y una recta horizontal (**E**) (eje de giro), conocidas la proyección horizontal (**a**) del punto y su abatimiento (**(a)**), procederemos de la siguiente manera:

- Desde la proyección horizontal (**a**) del punto se traza una **paralela** a la proyección horizontal (**e**) del eje de giro.
- Con centro en (**o**) y radio desde este hasta el punto (**(a)**) abatido, trazamos un **arco de circunferencia** hasta que corte a la paralela anterior.
- La distancia desde la proyección horizontal del punto hasta el punto de corte del arco con la paralela será la **cota** del punto.

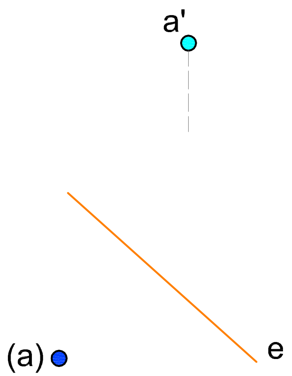


DATOS

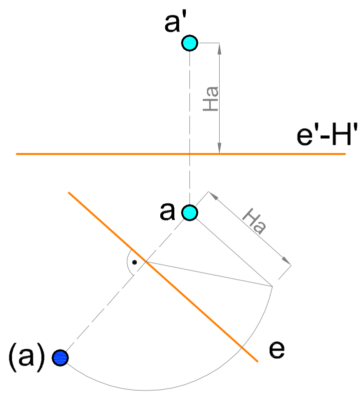


SOLUCIÓN

En este otro caso, se trata de hallar la **proyección vertical** (**e'**) del eje de giro conocidas la proyección vertical (**a'**) del punto, el punto abatido (**(a)**) y la proyección horizontal (**e**) del eje de giro.



DATOS



SOLUCIÓN

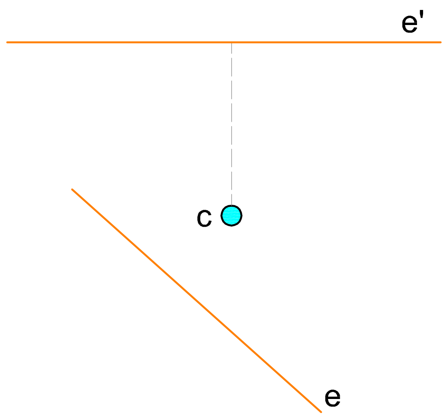
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *PROYECCIONES DE UNA FIGURA PLANA:*

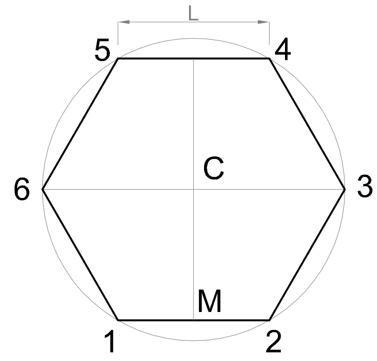
En este caso vamos a representar las proyecciones de un Hexágono Regular de lado (**L**), contenido en el plano definido por un punto (**C**) centro del polígono y la recta horizontal (**E**), sabiendo que el lado de menor cota del hexágono se encuentra sobre la recta horizontal, para lo cual:

- Tomamos como plano sobre el que abatir el plano horizontal que contiene a la recta (**E**) siendo el eje de abatimiento esta recta horizontal.
- Desde la proyección horizontal (**c**) del centro se traza la perpendicular al eje de giro (**e**), estando en la intersección con este el punto medio (**m**) coincidente con (**(m)**) abatido del lado horizontal así cómo los vértices (**1**) y (**2**) del mismo.
- Se representa el hexágono abatido, para lo que nos apoyamos en la construcción auxiliar del mismo.
- Desabatimos el polígono y tendremos sus proyecciones diédricas.

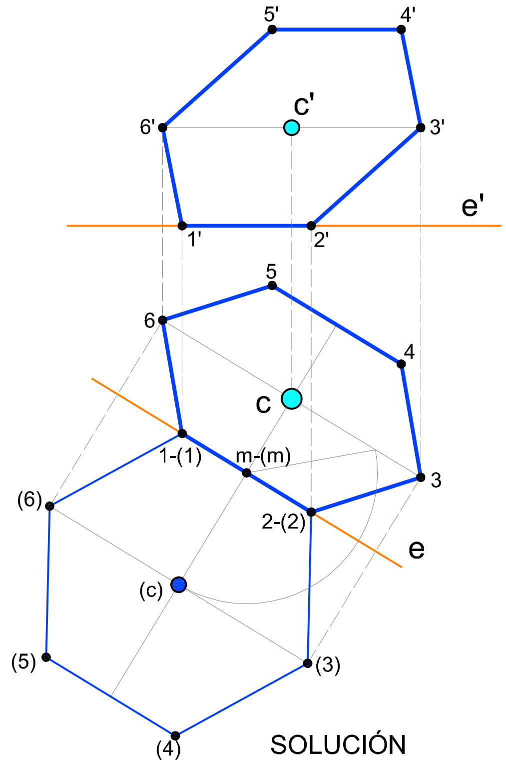
En nuestro caso los lados (**3-4**), (**4-5**) y (**5-6**) se han representado por paralelismo entre lados.



DATOS



CONSTRUCCIÓN AUXILIAR



SOLUCIÓN

- ***PROYECCIONES DE UNA CIRCUNFERENCIA:***

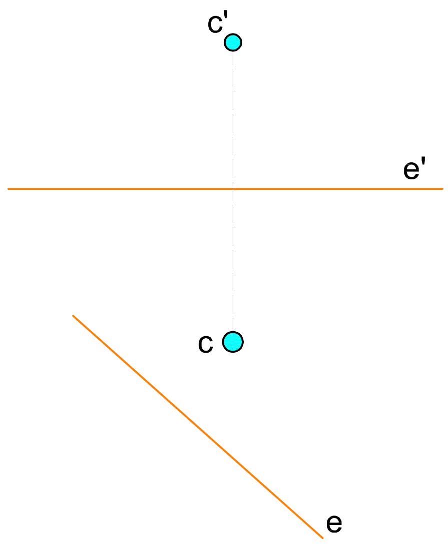
Para hallar las proyecciones de una Circunferencia de radio conocido, perteneciente al plano definido por un punto (**C**) centro de la misma y una recta (**E**) horizontal del plano, procederemos al **abatimiento** del plano que la contiene, consiguiendo así la verdadera magnitud de la misma para a continuación **desabatir** los elementos que la definen.

- Abatimos el punto (**C**), centro de la circunferencia, tomando como eje de giro la horizontal (**e**).

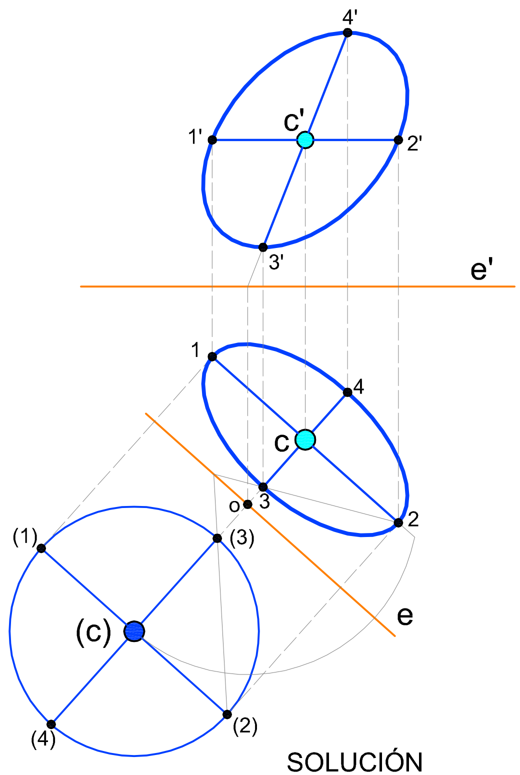
- Dibujamos la circunferencia abatida en verdadera magnitud.

- Se desabaten dos diámetros perpendiculares (**1-2**) y (**3-4**), que nos darán diámetros conjugados de las proyecciones (**elipses**) de la circunferencia, siendo las proyecciones horizontales de estos, **ejes principales** al ser uno de ellos, el (**1-2**) horizontal (**paralelo al eje**).

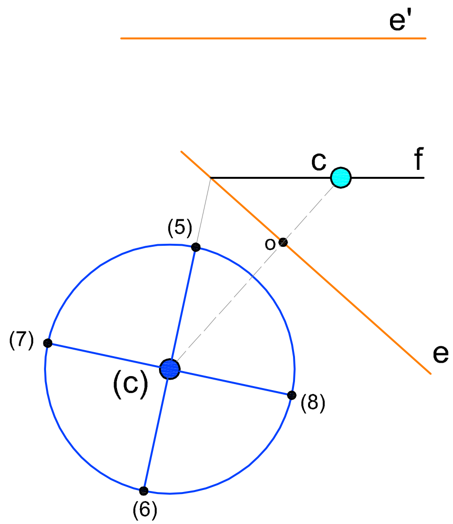
En el caso de querer representar la proyección vertical por ejes principales, tendríamos que desabatir un diámetro frontal (**5-6**) y su perpendicular (**7-8**).



DATOS



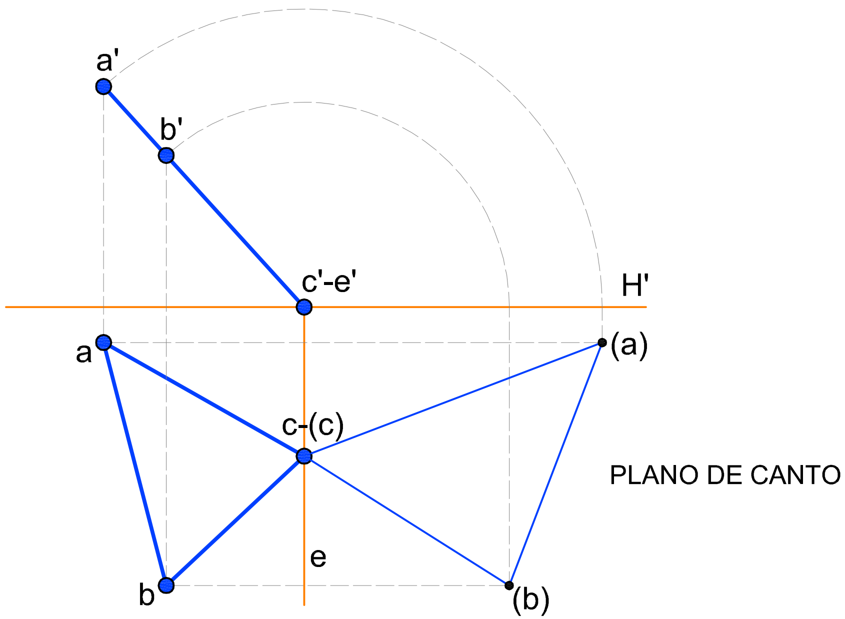
SOLUCIÓN

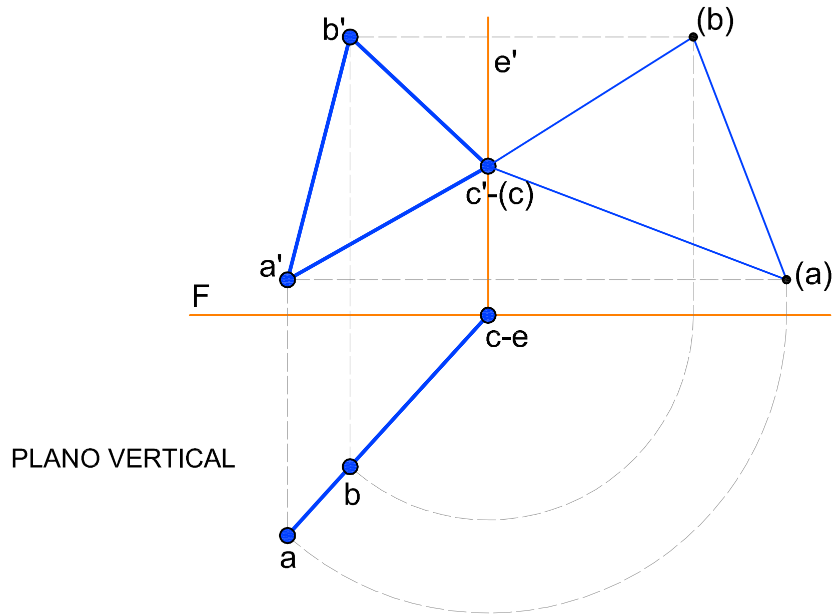


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ABATIMIENTO DE PLANOS PROYECTANTES:***

- **ABATIMIENTO DE PLANO DE CANTO.**
- El eje de giro es una **Recta de Punta**.
- Los planos perpendiculares al eje de giro que contienen a los puntos, son **Frontales**.
- Los arcos de giro se ven en **verdadera magnitud** en proyección vertical.





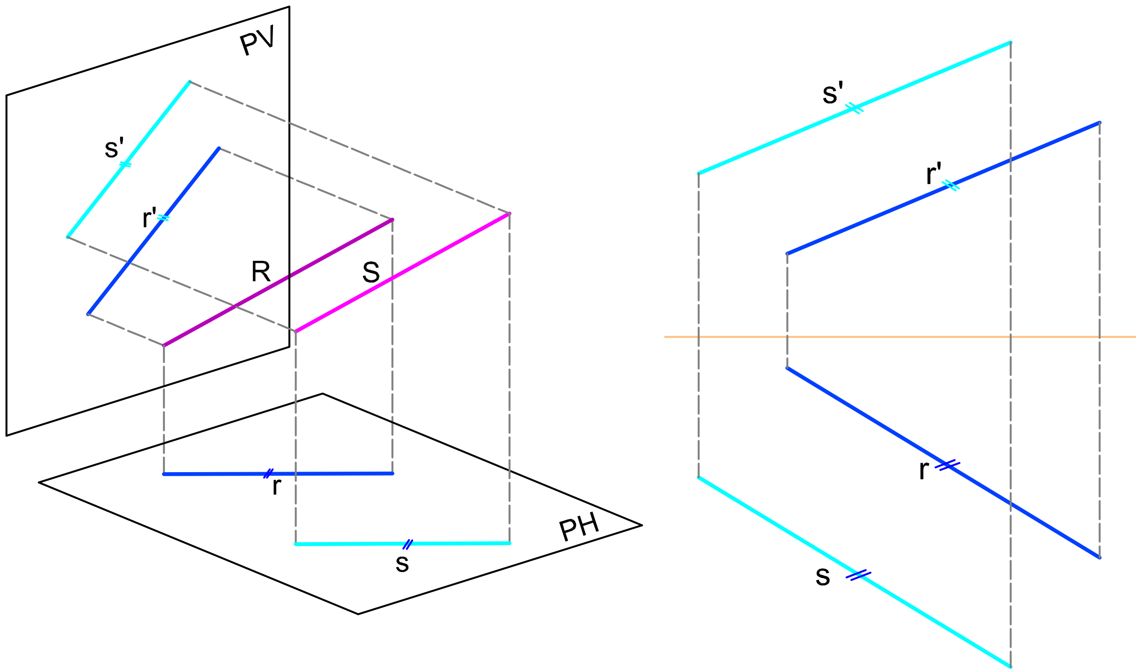
- **ABATIMIENTO DE PLANO VERTICAL.**
- El eje de giro es una **Recta Vertical**.
- Los planos perpendiculares al eje de giro que contienen a los puntos, son **Horizontales**.
- Los arcos de giro se ven en **verdadera magnitud** en proyección horizontal.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

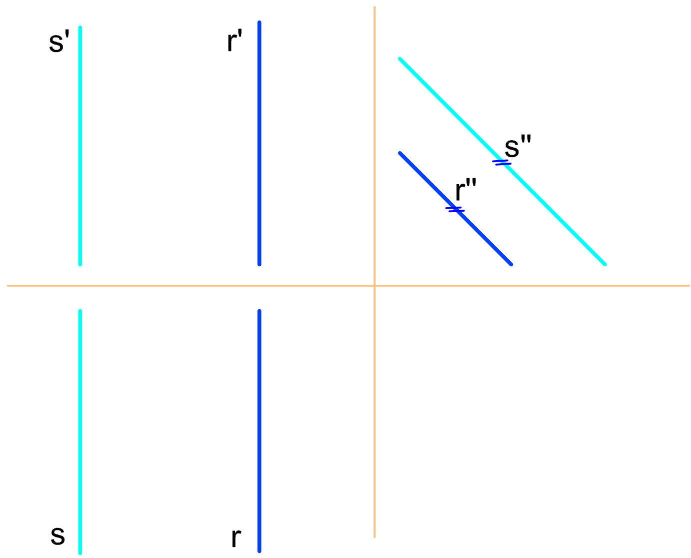
- ***PARALELISMO ENTRE RECTAS:***

Si dos Rectas (**R**) y (**S**) son paralelas en el espacio, sus **proyecciones ortogonales** conservan el **paralelismo**.

Por ser en el Sistema Diédrico el tipo de proyección cilíndrico ortogonal, tanto las **proyecciones verticales** como **horizontales** de dos rectas paralelas, también son **paralelas entre sí**.



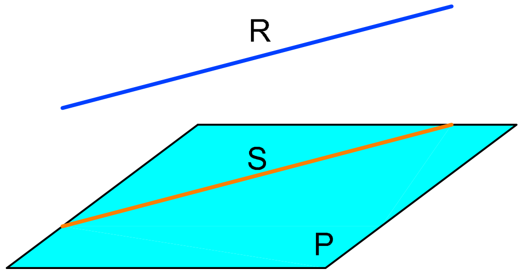
Esta condición que es **necesaria** en todos los casos, no es **suficiente** entre **Rectas de Perfil** ya que deben cumplir que sean paralelas en **tercera proyección**.

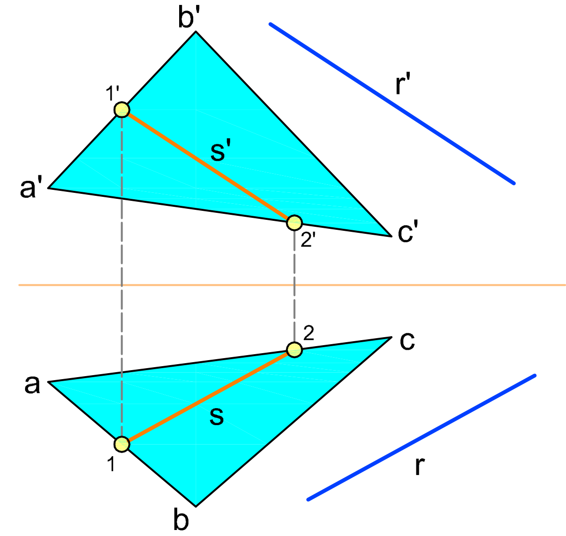


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO:***

Una Recta (**R)** es **paralela** a un Plano (**P**), si en el plano podemos encontrar una Recta (**S**) paralela a la **R**.

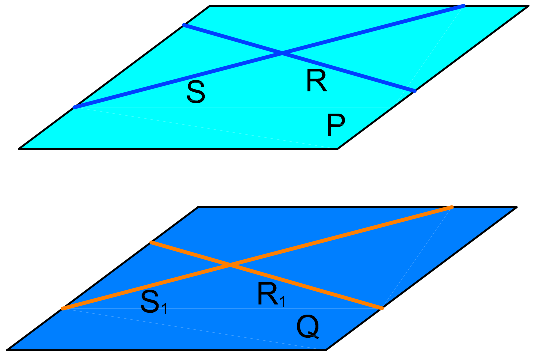


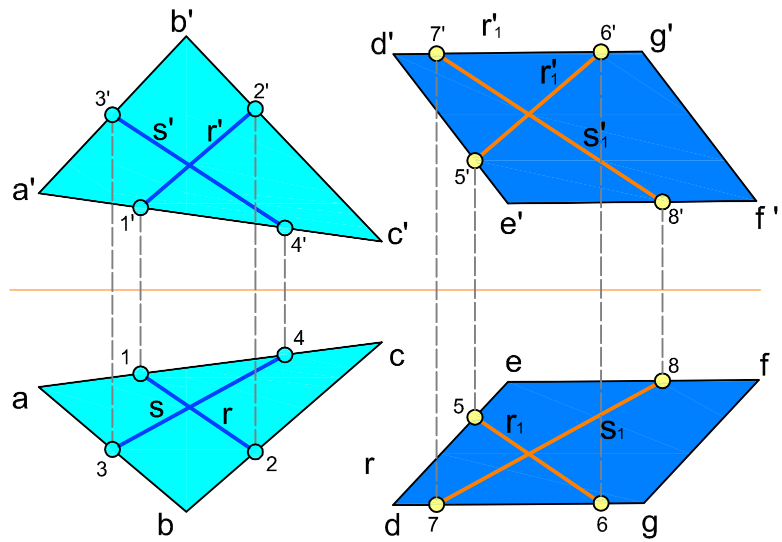


- ***PARALELISMO ENTRE PLANOS:***

Dos Planos (**P**) y (**Q**) son **paralelos** si podemos encontrar de **dos Rectas** (**R** y **S**) que se **cortan** de uno de los planos, sus **respectivas paralelas** (**R_1** y **S_1**) en el otro.

Si esto sucede, podemos asegurar que **todas las rectas** de uno de los planos tiene sus respectivas paralelas en el otro plano.

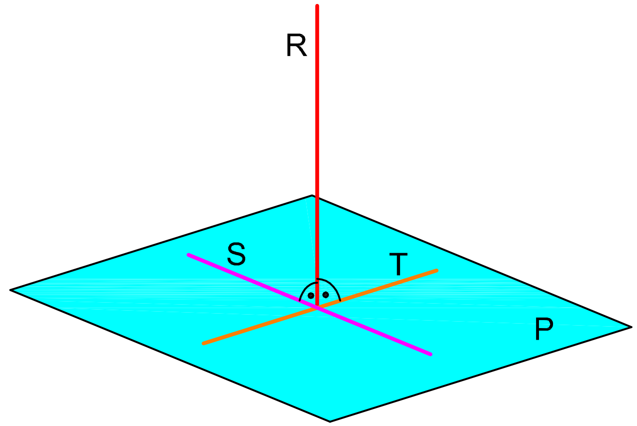




Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PERPENDICULARIDAD RECTA Y PLANO:***

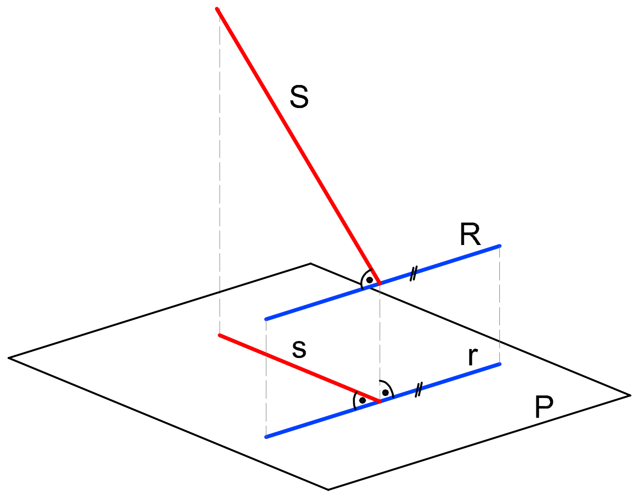
Una Recta (**R**) es **perpendicular** a un Plano (**P**) si esta es perpendicular a **dos Rectas** que se **corten** (**S** y **T**) pertenecientes al plano.



Si esto se cumple, podemos asegurar que **todas** las rectas del plano son perpendiculares a la recta (**R**) y por tanto, lo serán las **Horizontales** y las **Frontales** del plano.

- ***TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES:***

Si dos Rectas (**R**) y (**S**) son perpendiculares en el espacio, y una de ellas (**R**) es paralela a un Plano, sus **proyecciones ortogonales** (**r**) y (**s**) sobre el plano conservan la **perpendicularidad**.



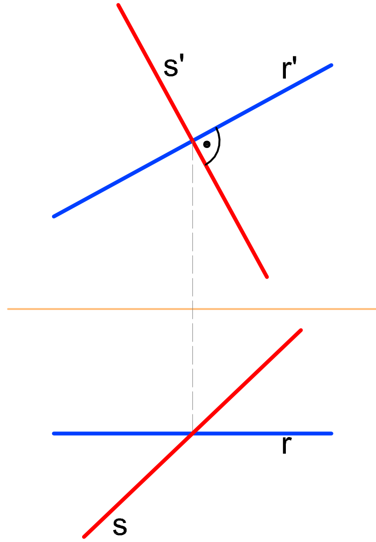
Basándonos en este Teorema vamos a resolver los **Casos Directos** de **RECTAS PERPENDICULARES** y que nos servirán como reterencias para el estudio de **perpendicularidad RECTA/PLANO**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

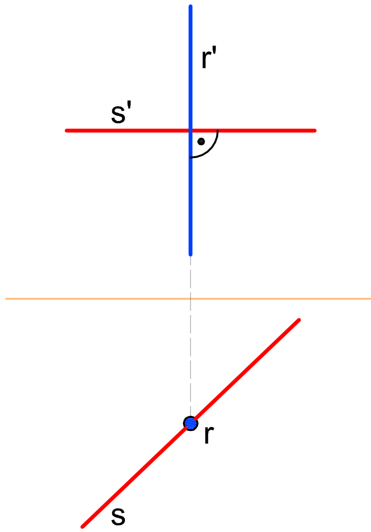
- ***RECTA OBLICUA CON RECTA FRONTAL:***

Por ser una de las Rectas (**R**) **Frontal**, esta es paralela al P.V. de Proyección y según el Teorema de las tres perpendiculares, las **proyecciones verticales** de las rectas son **perpendiculares**.

Esto es aplicable a los casos en que una de las rectas sea **Vertical**, ya que esta es una de las posiciones de Recta Frontal.



Recta (R) FRONTAL



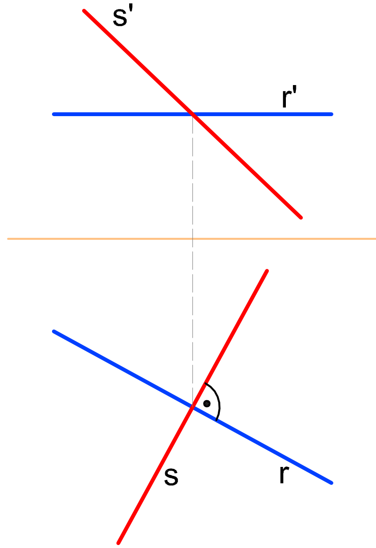
Recta (R) VERTICAL

- ***RECTA OBLICUA CON RECTA HORIZONTAL:***

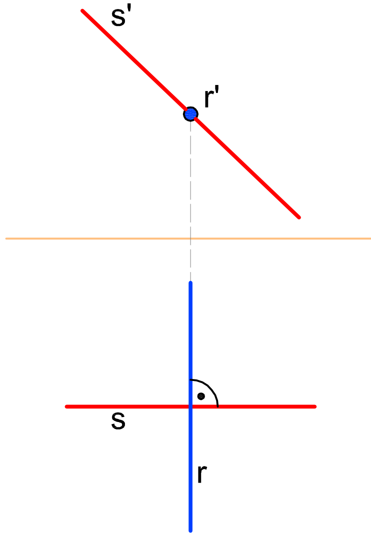
Por ser una de las Rectas (**R**) **Horizontal**, esta es paralela al P.H. de Proyección y según el Teorema de las tres perpendiculares, las **proyecciones horizontales** de las rectas son **perpendiculares**

Esto mismo es aplicable si una de las rectas es de **Punta**, por ser esta una posición particular de Recta Horizontal.

El resto de los casos de perpendicularidad entre rectas, se estudiarán basándonos en los condicionantes de **Perpendicularidad Recta y Plano**.



Recta (R) HORIZONTAL



Recta (R) de PUNTA

Sistema Diédrico Directo. PERPENDICULARIDAD **RECTA/PLANO**

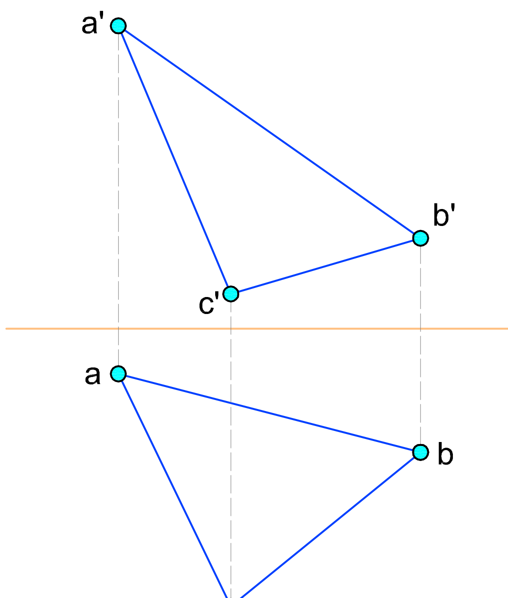
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO OBLICUO:***

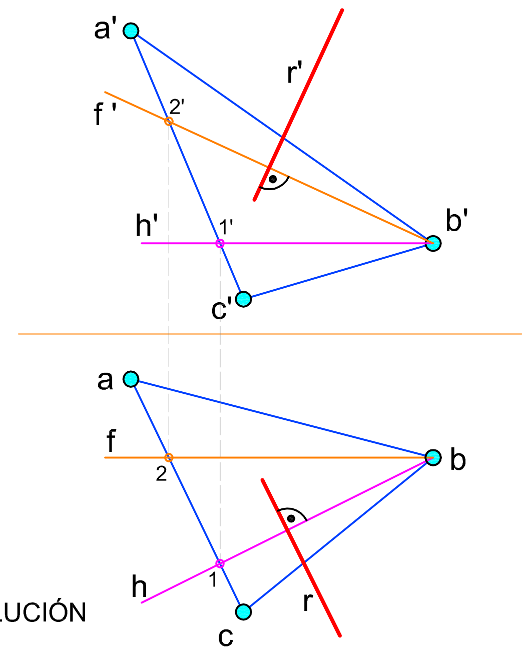
Para que una Recta (**R**) sea perpendicular a un Plano (**A,B,C**), tiene que ser **perpendicular** a **todas las rectas** del plano y por consiguiente a las **Horizontales** y a las **Frontales**.

Si la Recta (**R**) es perpendicular a una Recta **Horizontal** (**H**) del Plano, las **proyecciones horizontales** (**r** y **h**) de ambas son perpendiculares.

Si la Recta (**R**) es perpendicular a una Recta **Frontal** (**F**) del Plano, las **proyecciones verticales** (**r'** y **f '**) de ambas son perpendiculares.



DATOS



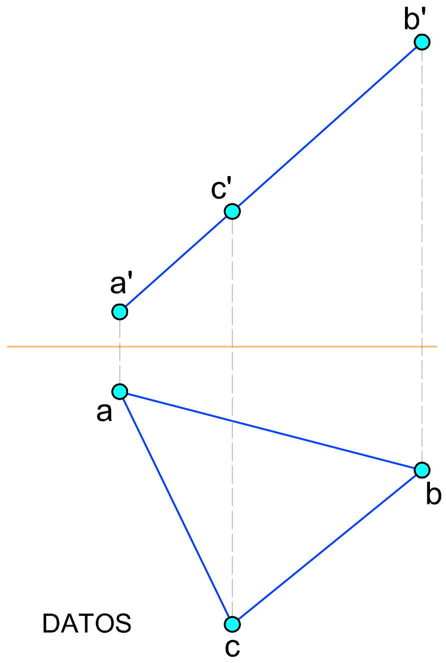
SOLUCIÓN

- ***RECTA PERPENDICULAR A PLANO DE CANTO:***

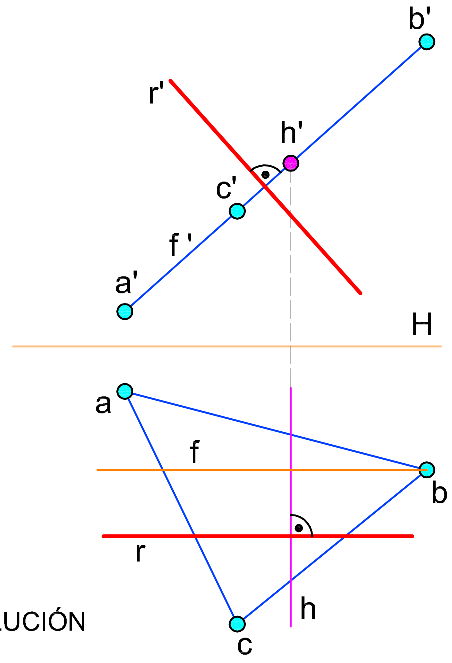
Si la Recta (**R**) es perpendicular a una Recta **Horizontal** (**H**) del Plano, las **proyecciones horizontales** (**r** y **h**) de ambas son perpendiculares.

Si la Recta (**R**) es perpendicular a una Recta **Frontal** (**F**) del Plano, las **proyecciones verticales** (**r'** y **f '**) de ambas son perpendiculares.

Este, se puede considerar como un **Caso Directo** de perpendicularidad Recta/Plano, ya que la proyección vertical (**r'**) es **perpendicular** al plano de canto y la proyección horizontal (**r**) es **paralela** a la línea de referencia (**H**) del diédro.



DATOS

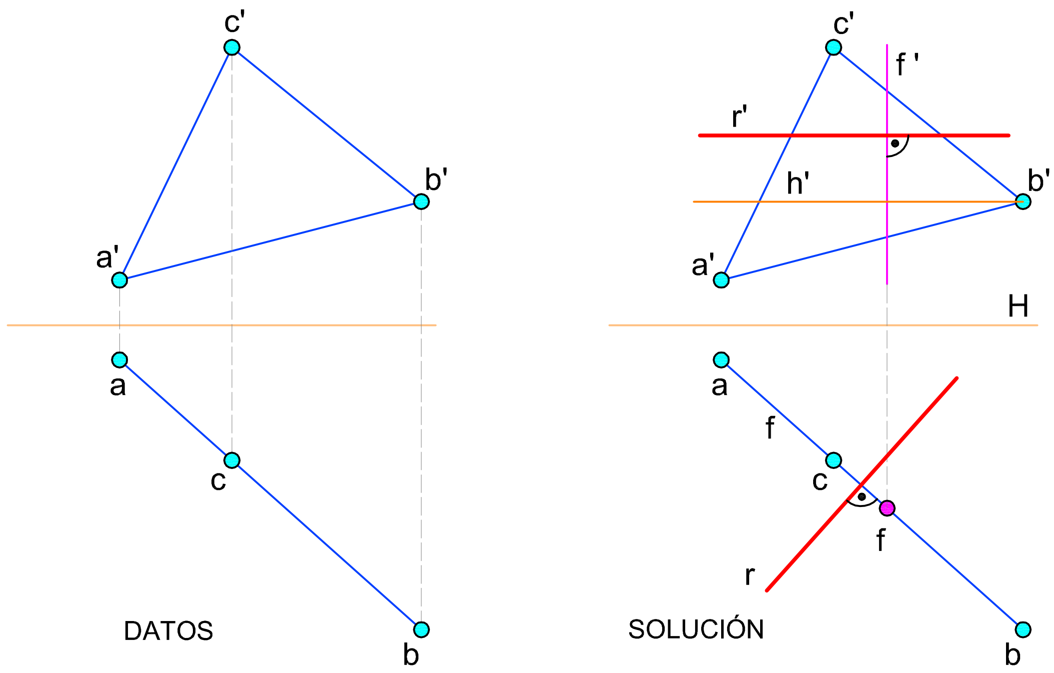


SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RECTA PERPENDICULAR A PLANO VERTICAL:***

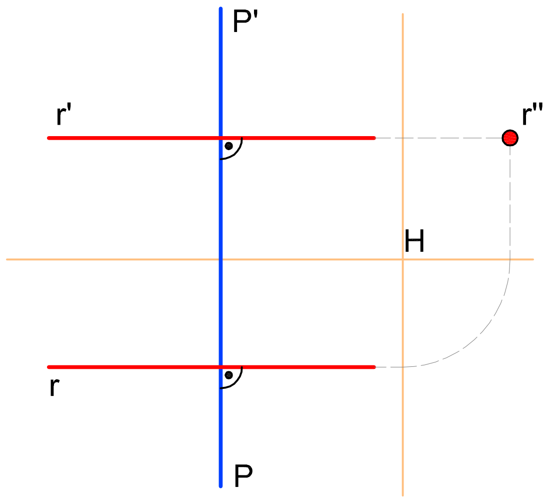
Como en el caso anterior, este se puede considerar como un **Caso Directo** de perpendicularidad Recta/Plano, ya que la proyección horizontal (**r**) es **perpendicular** al plano vertical y la proyección vertical (**r'**) es **paralela** a la línea de referencia (**H**) del diédro.



- ***RECTA PERPENDICULAR A PLANO DE PERFIL:***

Al ser el Pano de Perfil a su vez de canto y vertical, las proyecciones horizontales y verticales (**r** y **r'**) son **perpendiculares** al plano y por consiguiente, **paralelas** a la línea de referencia (**H**) del diédro.

La tercera proyección de la recta es de punta.



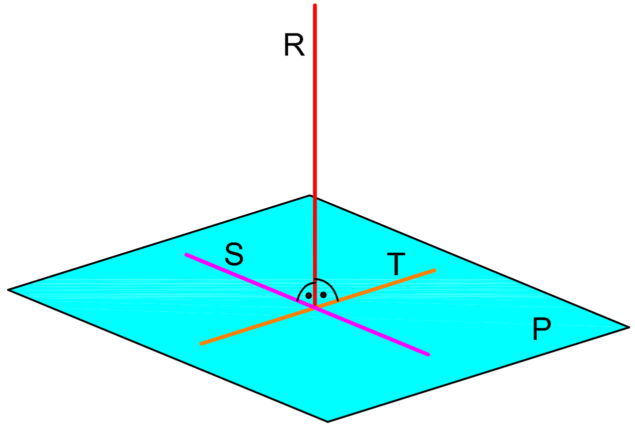
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PERPENDICULARIDAD PLANO/RECTA:***

Como ya se ha enunciado, para que una recta sea perpendicular a un plano tiene que ser perpendicular a dos rectas que se corten del plano.

Para que un Plano (P) sea perpendicular a una recta (**R**), el plano tiene que contener a **dos rectas** (**S** y **T**) que se **corten**, perpendiculares a la recta.

Si esto se cumple podemos asegurar que **todas** las rectas del plano también son perpendiculares a la recta y por lo tanto lo serían las **Horizontales** y las **Frontales**.



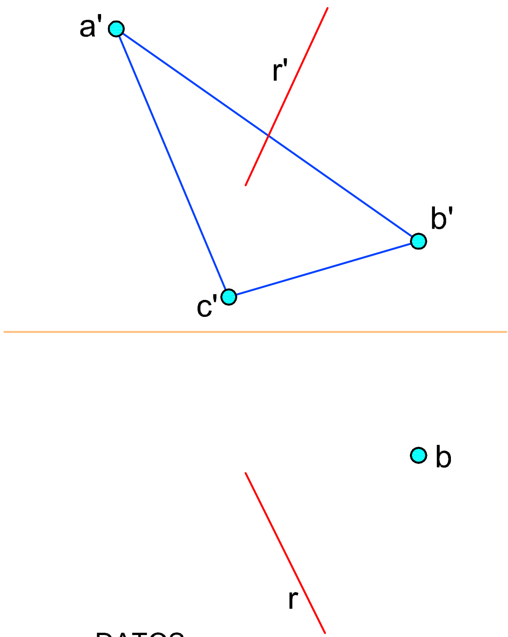
- ***TRAZADO DE PLANO (A,B,C) PERPENDICULAR A RECTA (R):***

- Al ser el Plano perpendicular a la Recta, se conocen las direcciones de las proyecciones de las horizontales (**H**) y frontales (**F**) **perpendiculares** a la proyecciones de (**R**).

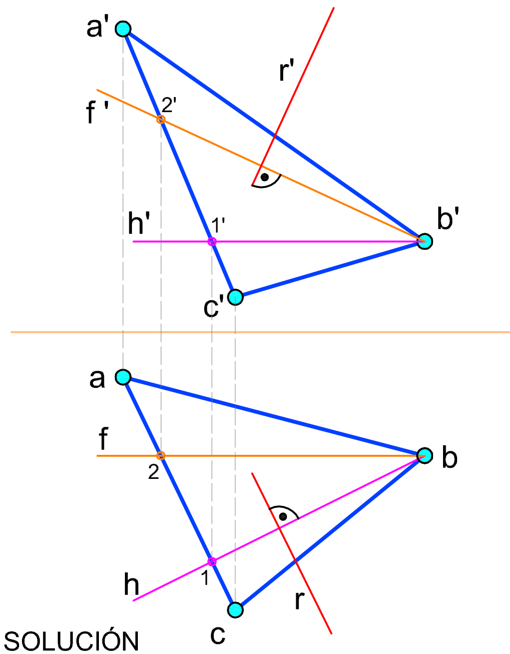
- Se trazan por el punto (**B**) del plano la **horizontal** y la **frontal**.

- Por **pertenencia**, se hallan los puntos (**1** y **2**) comunes a la recta (**A-C**) y a las horizontales y frontales trazadas.

- Se sitúan sobre la recta (**1-2**) los puntos (**A** y **C**), quedando de esta forma definido el plano.



DATOS



SOLUCIÓN

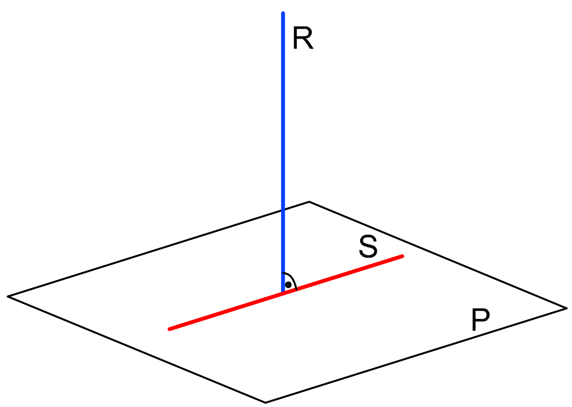
Sistema Diédrico Directo. PERPENDICULARIDAD **RECTA/RECTA**

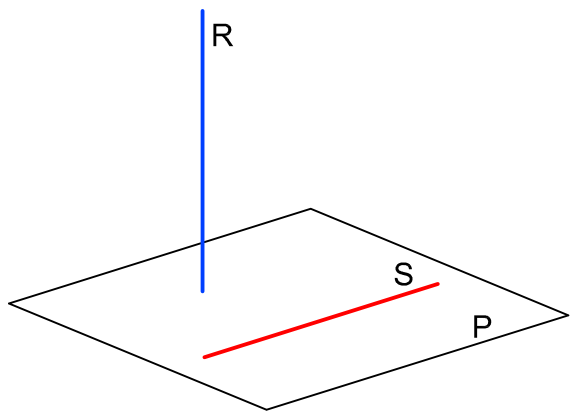
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***CONCEPTO GENERAL:***

Independientemente de que se corten o se crucen, dos Rectas (**R**) y (**S**) son **perpendiculares** en el espacio, si se puede trazar un **Plano** (**P**) que **contenga** a una de ella y sea perpendicular a la otra.

En los **Casos Generales** de perpendicularidad entre rectas, nos apoyaremos en lo ya estudiado en perpendicularidad **RECTA/PLANO** y recordando que en casos de **posiciones particulares** de alguna de las rectas, se reducían a **casos directos**.





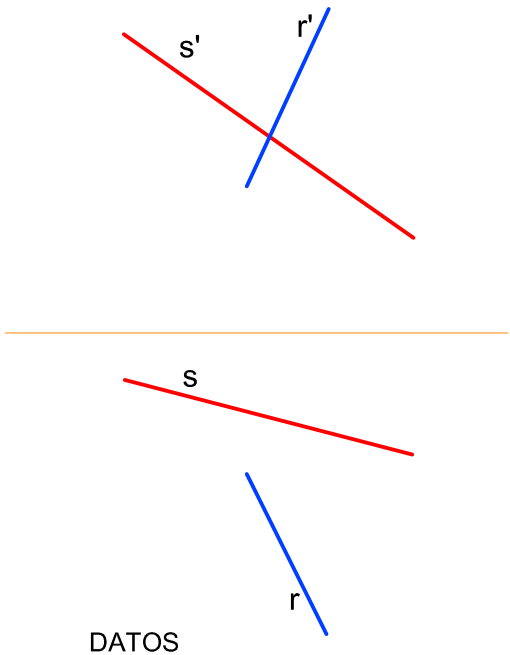
- ***CASOS DE COMPROBACIÓN:***

Se trata de comprobar si existe un **plano** que conteniendo a una de las rectas (**S**) es **perpendicular** a la otra recta (**S**). Para ello:

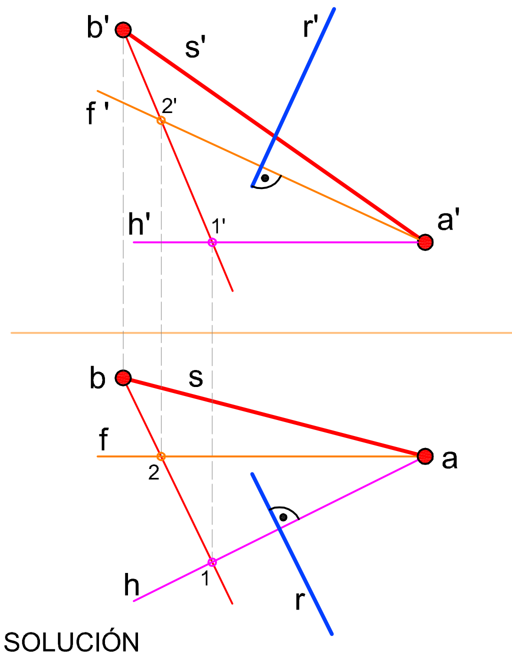
- Por un punto (**A**) de (**S**) trazamos las rectas **horizontales** y **frontales** perpendiculares a (**R**).

- Por un punto (**B**) de (**S**) trazamos una recta (**T**) y se buscan los puntos (**1** y **2**) de **intersección** de (**T**) con las horizontales y frontales anteriores.

- Si los puntos (**A**, **1** y **2**) están **alineados** (forman una recta), hemos encontrado un plano que conteniendo a (**S**) es perpendicular a (**R**). En caso contrario las rectas (**R** y **S**) no son perpendiculares.



DATOS



SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

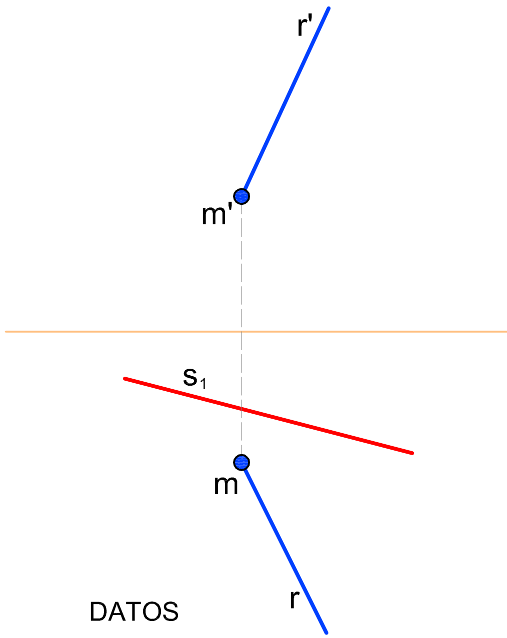
- ***CASOS DE TRAZADOS:***

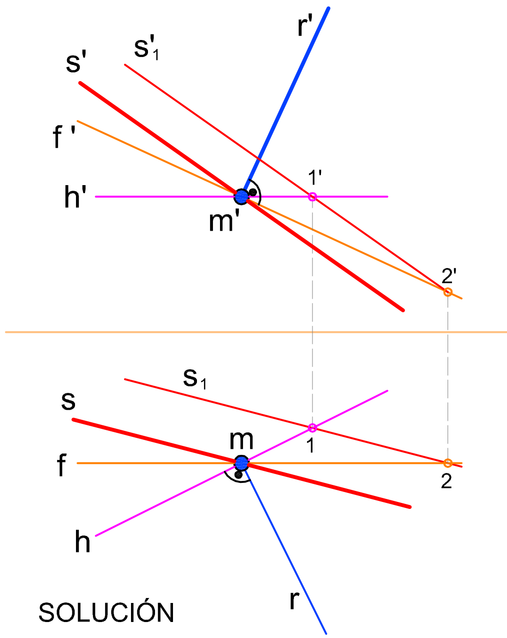
Se trata de **representar** una Recta (**S**) de la que se conoce la dirección (**s1**) de su proyección horizontal, que pasando por un Punto (**M**) de la recta (**R**) sea **perpendicular** a esta. Para ello:

- Por el punto (**M**) trazamos las rectas **horizontales** y **frontales** perpendiculares a (**R**), definiendo así un plano perpendicular a (**R**).

- Hallamos por pertenencia de recta a plano la proyección vertical (**s'1**).

- Trazamos por el punto (**M**) la Recta (**S**) **paralela** a (**S1**) y encontramos la solución buscada.





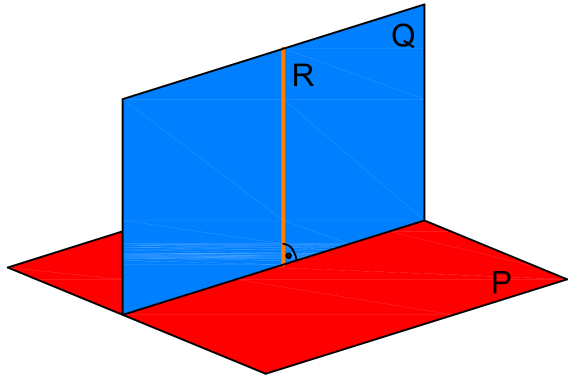
En nuestro caso en el estudio tanto en los casos de comprobación cómo en los de trazados, se han realizado aplicando el **procedimiento general**, recordando la posibilidad de aplicar cambios de planos o vistas auxiliares para colocar los elementos en posiciones favorables. (**RECTAS HORIZONTALES** o **RECTAS FRONTALES**).

Sistema Diédrico Directo. PERPENDICULARIDAD **PLANOS**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***CONCEPTO GENERAL:***

Dos Planos (**P**) y (**Q**) son **perpendiculares** en el espacio, si en uno de los planos existe una Recta perpendicular al otro plano.



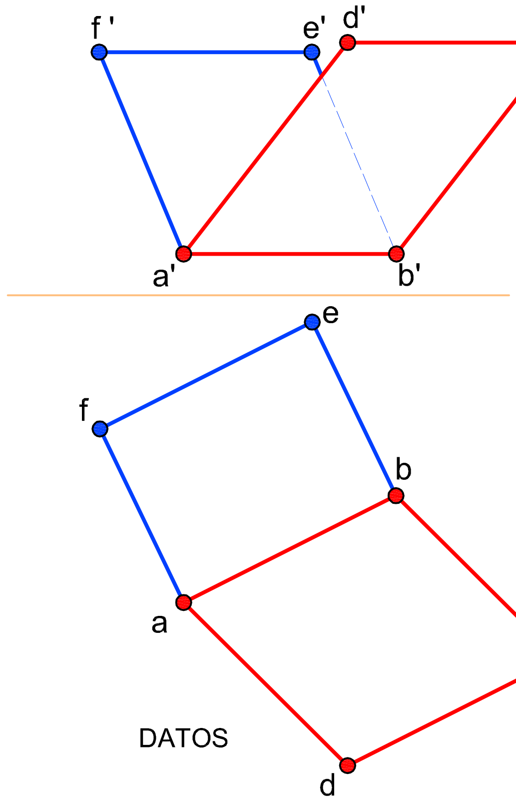
Como se deduce del concepto de perpendicularidad entre planos, nos apoyaremos en lo ya estudiado en perpendicularidad **RECTA/PLANO**.

- ***CASOS DE COMPROBACIÓN:***

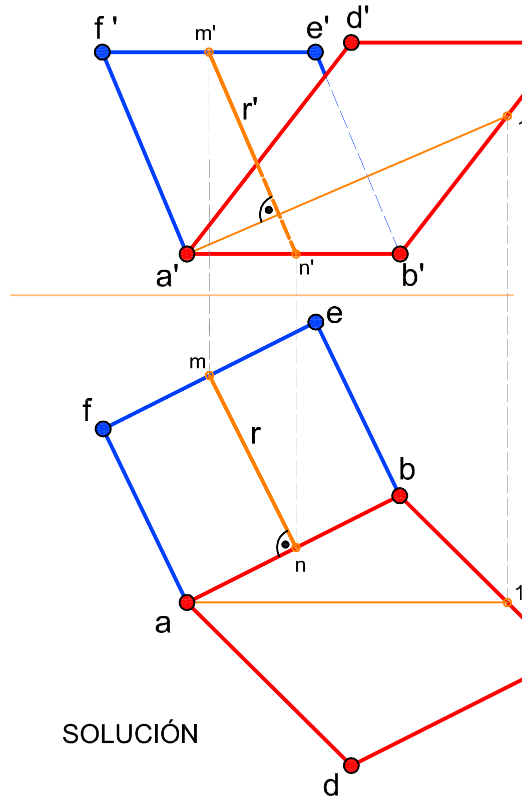
Comprobar si los paralelogramos (**A,B,C,D**) y (**A,B,D,E**) son **perpendiculares**.

Se trata de comprobar si encontramos una **recta** (**R**) que este contenida en uno de los planos (**A,B,D,E**) y que sea **perpendicular** al otro plano (**A,B,C,D**).
Para ello:

- Por un punto (**A**) trazamos la recta **horizontal (A-B)** y **frontal (A-1)** del paralelogramo (**A,B,C,D**).
- Por un punto (**M**) de (**A,B,D,E**) trazamos una recta (**R**) **perpendicular** a las **horizontal** y **frontal** anteriores.
- Comprobamos si esta recta (**M-N**) **pertenece** al plano (**A,B,D,F**) y si esto se cumple los dos paralelogramos son perpendiculares entre si.



DATOS

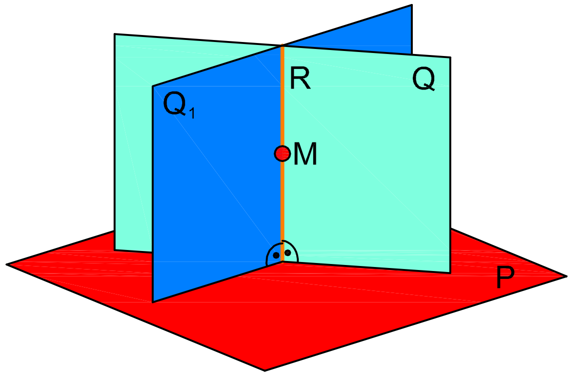


SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***CASOS DE TRAZADO:***

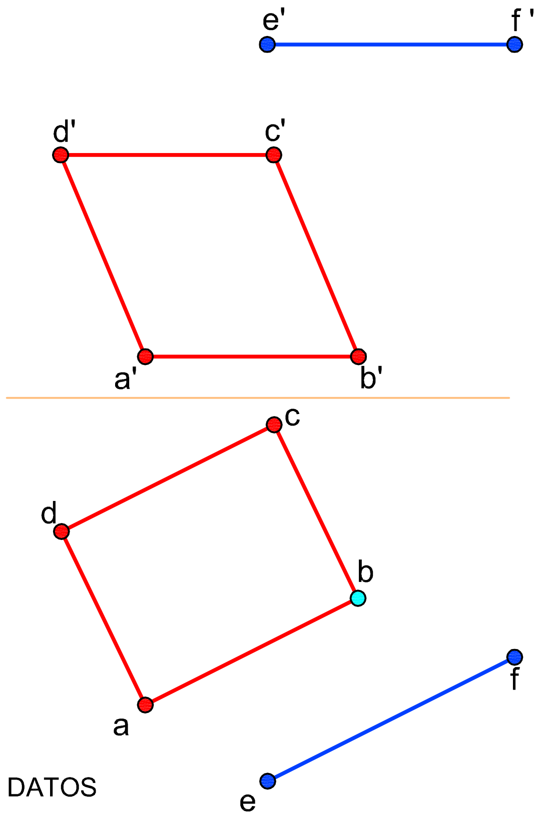
Por un Punto (**M**) se pueden trazar **infinitos Planos** (**Q**) **perpendiculares** a otro Plano (**P**), tantos como los que **contienen a una Recta** (**R**) que pasando por (**M**) sea perpendicular al plano (**P**).



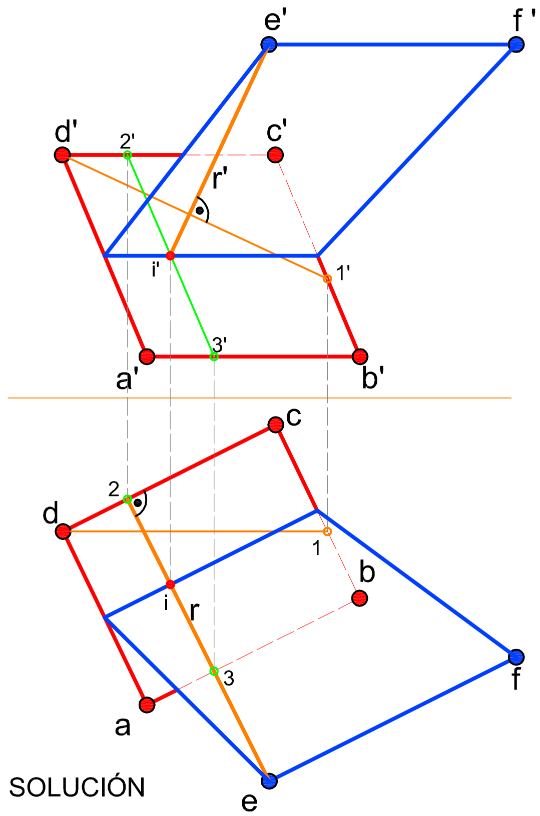
Para limitar el número de planos solución, se necesitará una doble condición.

En el ejemplo, vamos a trazar un Plano que **conteniendo** a la recta (**E-F**), sea **perpendicular** al Plano (**A,B,C,D**), representando este plano por el cuadrilátero de lado (**E-F**) y el segmento intersección del plano buscado con el paralelogramo (**A,B,C,D**).

- Por el punto (**E**) de la recta (**E-F**) se traza una recta (**R**) **perpendicular** al plano (**A,B,C,D**).
- Se halla la **intersección** de la recta (**R**) con el plano siendo esta el punto (**I**).
- Por ser (**E-D**) **paralelo** a (**A-B** y **B-C**), la **intersección** de los dos planos será una **recta paralela** a estas pasando por el punto (**I**).



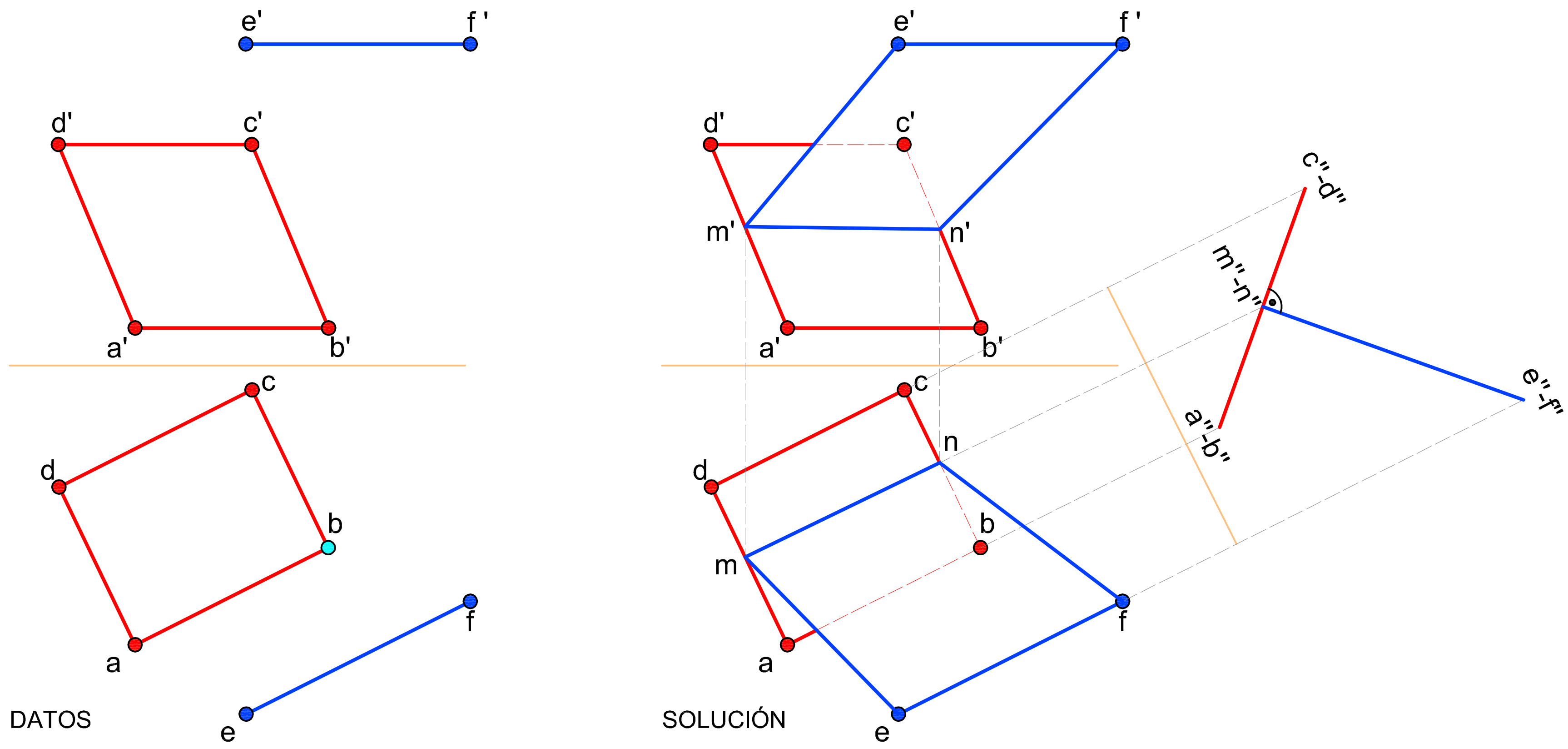
DATOS



SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Al igual que en los casos de perpendicularidad entre rectas, para los casos de **perpendicularidad entre planos**, nos podemos apoyar en cambios de planos o vistas auxiliares y que hemos desarrollado en la figura para el caso de trazado, colocando el **plano ABCD de canto.**



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

En los casos de distancia entre elementos, excepto cuando sean dos puntos que la distancia es el **segmento** que los une, nos podríamos encontrar infinitas soluciones.

En este tema, la distancia que vamos a tratar es el de **mínima distancia** (**perpendicular común**) entre los elementos, dada por su proyección y verdadera magnitud.

- ***DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS:***

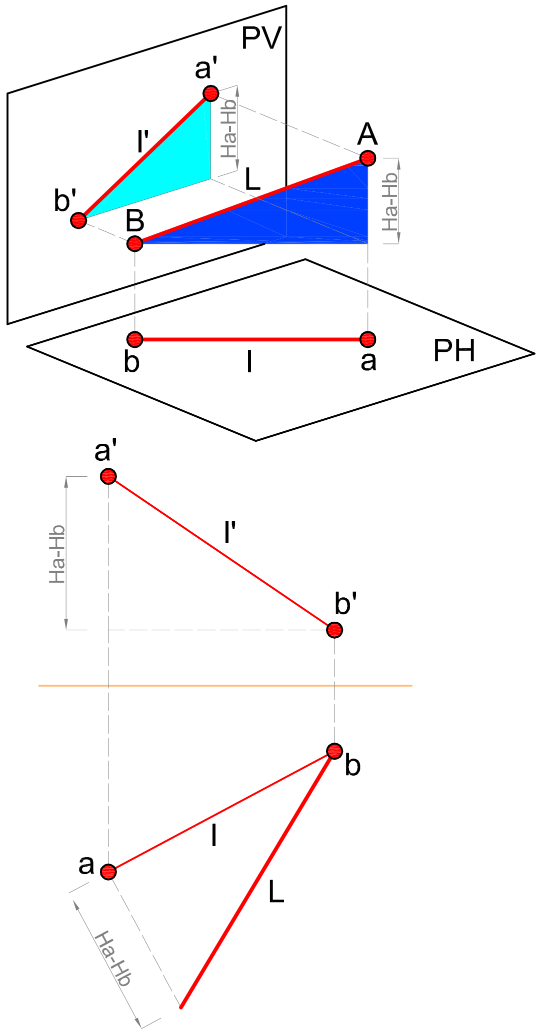
La **distancia** (**L**) entre dos puntos (**A** y **B**) es la del segmento que los une.

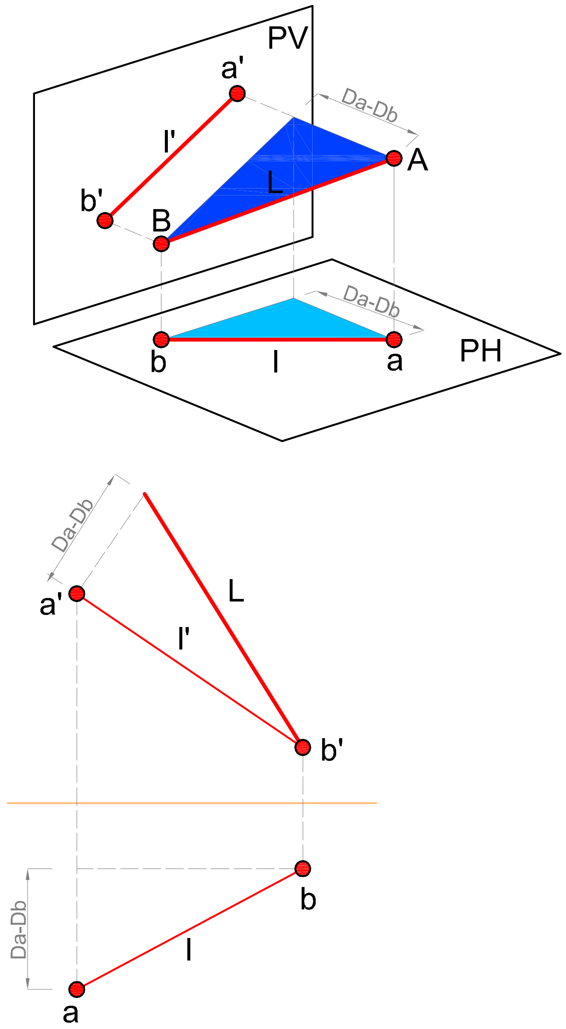
Esta distancia es la **hipotenusa** de los triángulos rectángulos de catetos:

- En un caso, uno es la **proyección horizontal** del segmento y la **diferencia de cotas** de los puntos, el otro.

- En el segundo caso un cateto es la **proyección vertical** del segmento y el otro la **diferencia de alejamiento** de los puntos.

Por tanto, para hallar la verdadera magnitud del segmento (**A-B**), bastará con situar uno de los dos triángulos en verdadera magnitud mediante una **vista auxiliar** o **cambio de plano**.



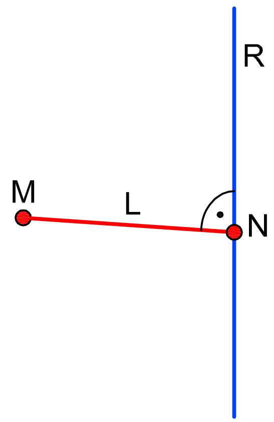


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA:***

La **distancia** (**L**) entre un punto (**M**) y una recta (**R**) es el segmento (**M-N**) perpendicular desde el punto a la recta.

Cómo ya se vio en el tema de perpendicularidad, dependiendo de las posiciones de los elementos, nos podíamos encontrar **casos directos** de trazado **o casos generales.**



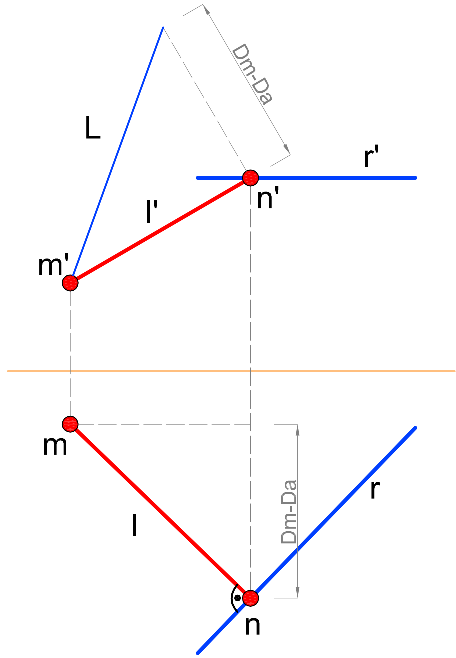
- ***DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA HORIZONTAL O FRONTAL:***

Estos casos los podemos considerar como **casos directos de perpendicularidad**, ya que:

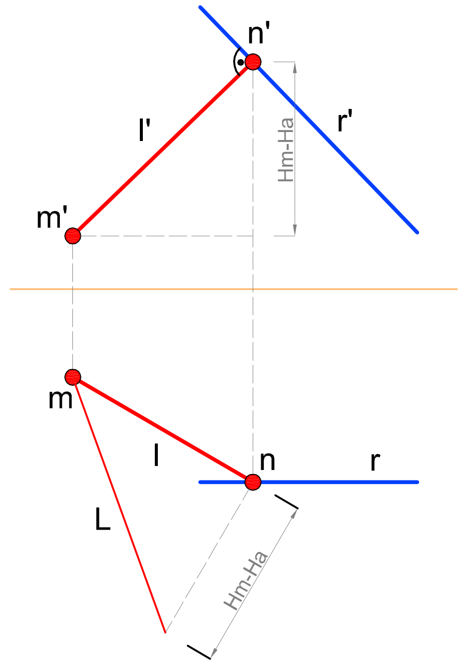
- Si la recta es horizontal, la perpendicular desde el punto a la recta se ve como **perpendicular en proyección horizontal** y el punto (**N**) de intersección se encuentra de forma inmediata.

- Si la recta es frontal, la perpendicular desde el punto a la recta se ve como **perpendicular en proyección vertical**, encontrándose el punto (**N**) de intersección de forma inmediata.

Una vez definido el segmento (**M-N**), se calcula la verdadera magnitud del mismo mediante cambios de planos o vistas auxiliares, colocando el segmento horizontal o frontal.



RECTA (R) HORIZONTAL



RECTA (R) FRONTAL

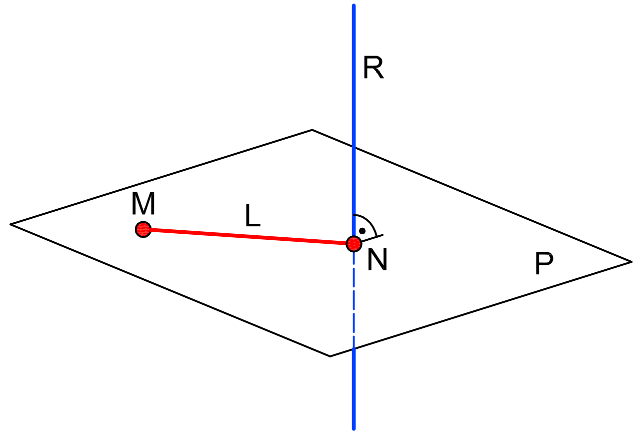
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

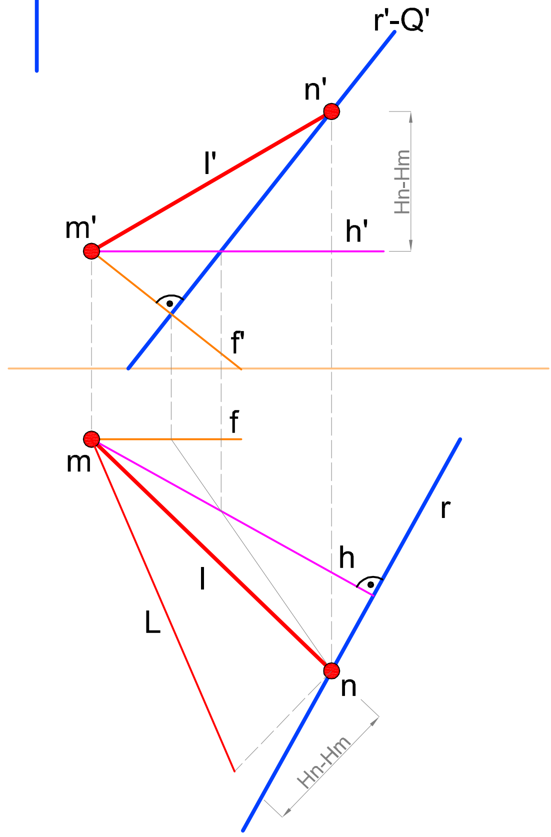
- ***DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA OBLICUA:***

En casos de Recta Oblicua por no ser un caso directo de perpendicularidad, nos apoyaremos en que, **todas las rectas** (**L**) que pasando por un punto (**M**) son **perpendiculares** a otra recta (**R**), se encuentran en un plano (**P**) que conteniendo al punto es perpendicular a la recta, siendo la mínima distancia el segmento (**M-N**) resultante de unir el punto (**M**) con el punto (**N**) de **intersección de la recta y el plano**.

En estos casos para encontrar la solución buscada, procederemos a:

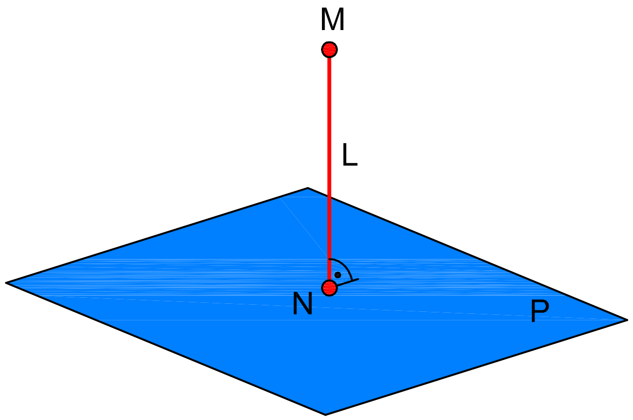
- Trazar un **plano** (**P**) (mediante sus horizontales y frontales) que contenga a (**M**) y sea **perpendicular** a la recta (**R**).
- Hallamos el punto (**N**) de **intersección** de la recta y el plano (Método de intersección de recta y plano).
- El segmento (**M-N**) es la solución buscada.





- ***DISTANCIA DE PUNTO A PLANO:***

La **distancia** (**L**) entre un punto (**M**) y un plano (**P**) es el segmento (**M-N**) perpendicular desde el punto al plano.



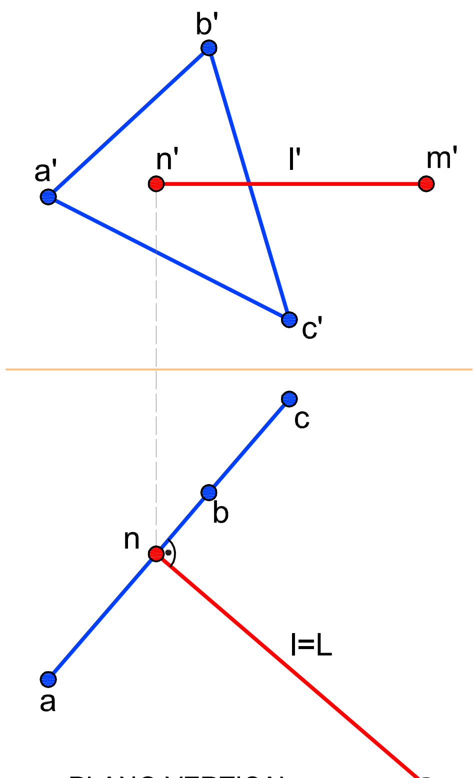
Cómo ya se comento en distancia de punto a recta y se estudio en el tema de perpendicularidad en casos de distancia de punto a plano y dependiendo de las posiciones de los elementos, nos podemos encontrar **casos directos** de trazado **o casos generales.**

- ***DISTANCIA DE PUNTO A PLANO VERTICAL O A PLANO DE CANTO:***

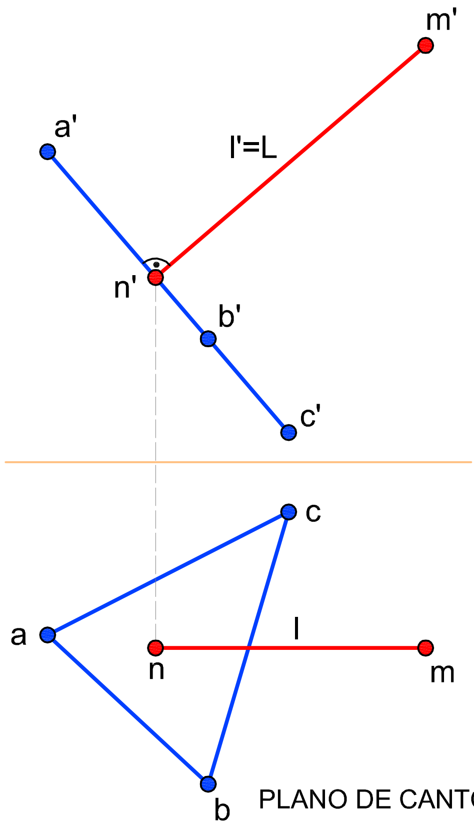
Estos casos los podemos considerar como **casos directos de perpendicularidad**, ya que:

- Si el plano es Vertical (proyectante horizontal), la perpendicular desde el punto al plano se ve como **perpendicular en proyección horizontal** y el punto (**N**) de intersección se encuentra de forma inmediata. En este caso al ser la distancia (**M-N**) **horizontal**, su **verdadera magnitud** se corresponde con la de su **proyección horizontal**.

- Si el plano es de Canto (proyectante vertical), la perpendicular desde el punto al plano se ve como **perpendicular en proyección vertical**, encontrándose el punto (**N**) de intersección de forma inmediata. En este caso al ser la distancia (**M-N**) **frontal**, su **verdadera magnitud** se corresponde con la de su **proyección vertical**.



PLANO VERTICAL



PLANO DE CANTO

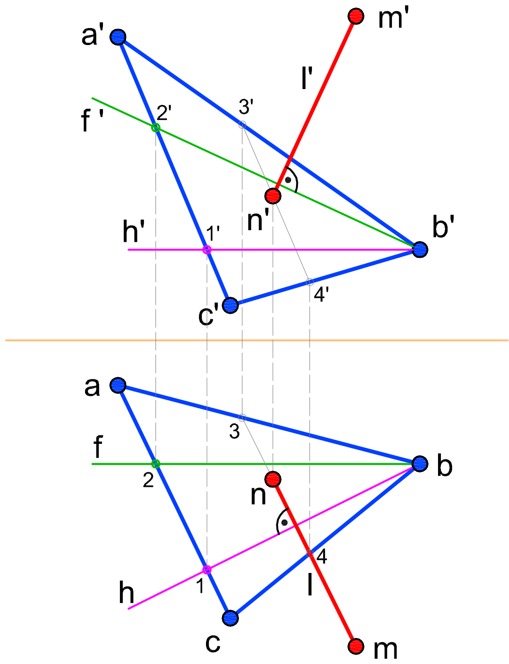
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *DISTANCIA ENTRE PUNTO Y PLANO OBLICUO:*

En casos de Plano Oblicuo, por no ser un caso directo procederemos a:

- Trazar una horizontal (**H**) y una Frontal (**F**) del plano.
- Por el Punto (**M**) trazamos la dirección de la Recta (**L)** perpendicular al plano.
- Hallamos el punto (**N**) de **intersección** de la recta y el plano (Método de intersección de recta y plano).
- El segmento (**M-N**) es la solución buscada.

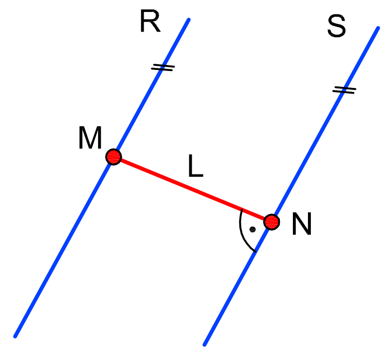
Para calcular la verdadera magnitud y en la figura aparte, se pone por cambio de plano el segmento en posición frontal.



• *DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS:*

Este caso se reduce a distancia de Punto a Recta.

Se toma un punto (**M)** de una de las rectas (**R**) y se calcula la distancia (**L**) desde este punto a la otra recta (**S**).

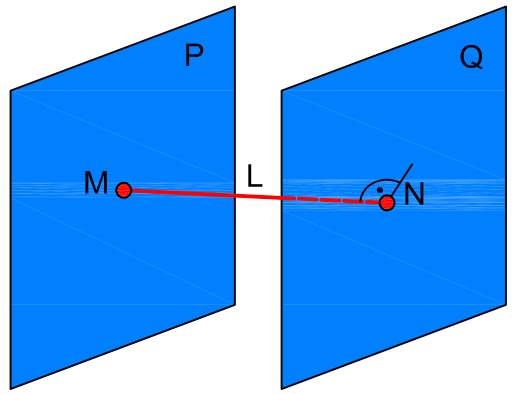


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

• *DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS:*

Este caso se basa en la distancia de Punto a Plano.

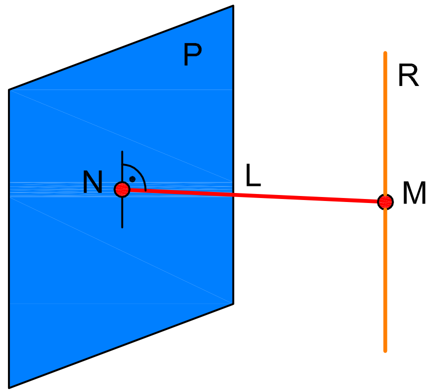
Se toma un punto (**M**) de uno de los planos (**P**) y se calcula la distancia desde este punto al otro plano (**Q**).



• *DISTANCIA ENTRE RECTA Y PLANO PARALELOS ENTRE SI:*

Este caso se reduce a distancia de Punto a Plano.

Se toma un punto (**M)** de la recta (**R**) y se calcula la distancia (**L**) desde este punto al plano (**P**).



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

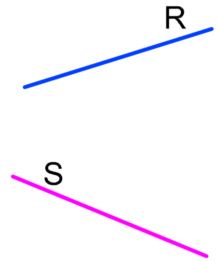
- ***DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN:***

La distancia, será la del segmento **perpendicular común** que se apoya en ambas rectas, siendo los pasos para encontrarlo los siguientes.

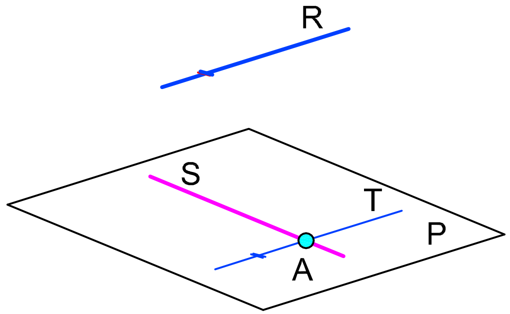
- *Paso 1*. Trazar por un punto (**A**) de una de las rectas (**S**) la recta (**T**) paralela a la (**R**), definiéndose así el plano (**P)** paralelo.

- *Paso 2*. Por un punto (**B**) de la recta exterior (**R**) se traza la perpendicular al plano y se halla la intersección (**C**) con él. El segmento (**B-C**) sería la distancia en magnitud pero no en posición por no apoyarse en (**R**).

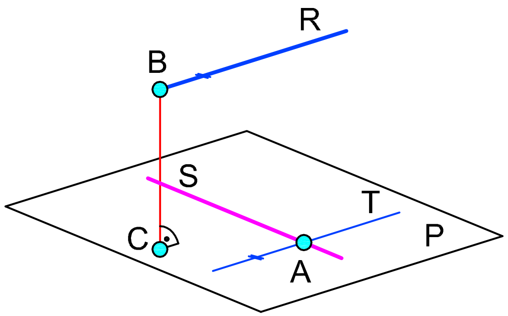
- *Paso 3*. Por el punto (**C**) trazar una recta paralela a (**T**) hasta que corte a (**S**) en el punto (**M**) y por este una paralela a (**C-B**) hasta cortar a (**R**) en el punto (**N**), siendo el segmento (**M-N**) la distancia en posición.



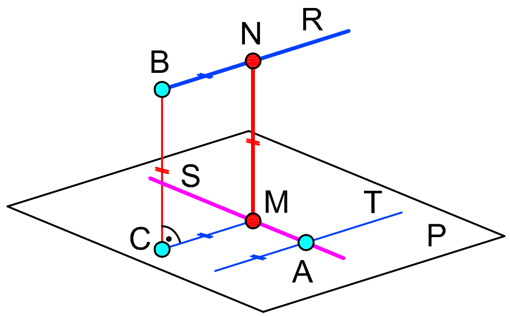
DATOS



PASO 1



PASO 2

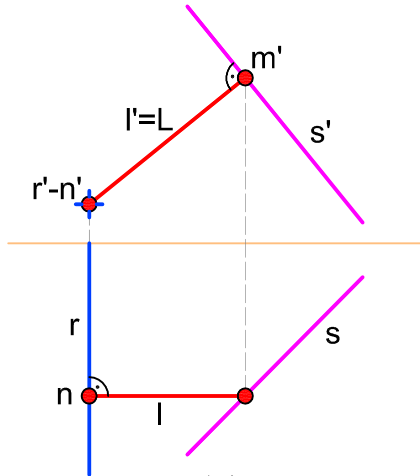


PASO 3

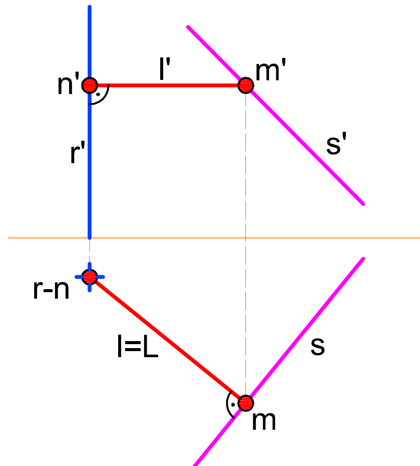
- ***DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN: (POSICIÓNES PARTICULARES)***

En el caso de que una de las rectas (**R**) sea de **punta**, la solución es directa ya que por ser la recta de punta, sus perpendiculares son frontales y la perpendicularidad entre rectas si una de ellas es frontal, se ven como perpendiculares sus proyecciones verticales.

Esto mismo se aplica cuando una de las rectas es **vertical** ya que la distancia sería horizontal y la perpendicularidad se vería en proyección horizontal.



Recta (R) de PUNTA



Recta (R) VERTICAL

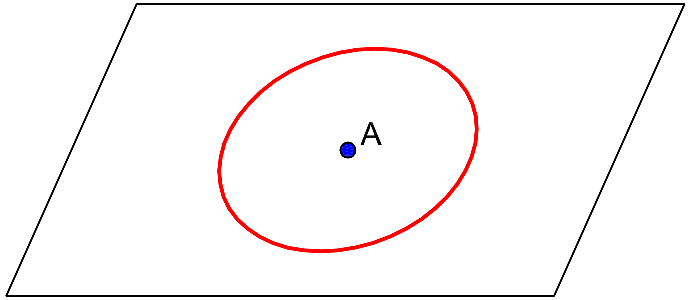
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

En los siguientes apartados y teniendo en cuenta que parte de los ejercicios de distancias se basan en **lugares geométricos** vamos a enumerar espacialmente alguno de los casos más comunes.

1.- LUGAR GEOMÉTRICO EN EL PLANO:

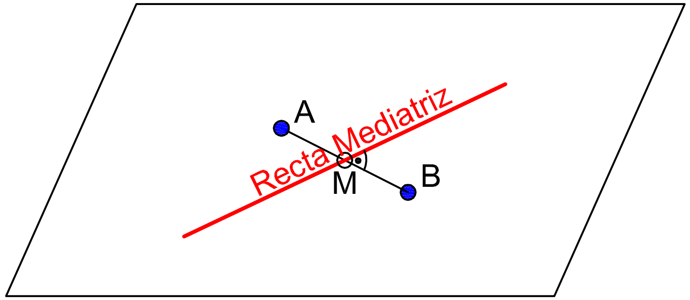
1.1. LUGAR GEOMÉTRICO DE UN PUNTO.

El **lugar geométrico** de los puntos de un plano que equidistan de un **punto A**, es una circunferencia de centro **A** y radio la **distancia.**



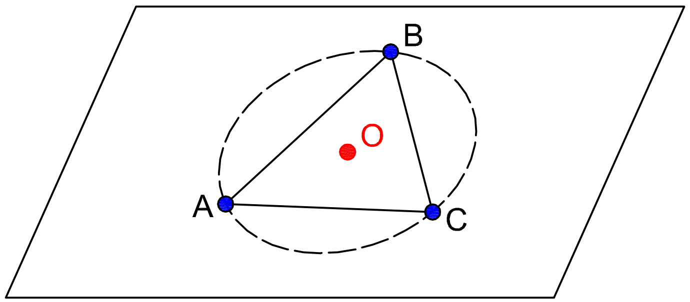
1.2. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS PUNTOS.

El **lugar geométrico** de los puntos de un plano que equidistan de **dos puntos A y B**, es la **Mediatriz del segmento AB,** (perpendicular al segmento AB trazada por su punto medio).



1.3. LUGAR GEOMÉTRICO DE TRES PUNTOS.

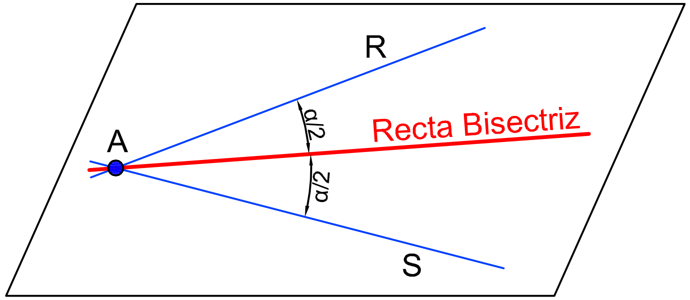
El **lugar geométrico** de los puntos de un plano que equidistan de **tres puntos A, B y C**, es el **Circuncentro del triángulo ABC,** (centro de la circunferencia circunscrita).



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

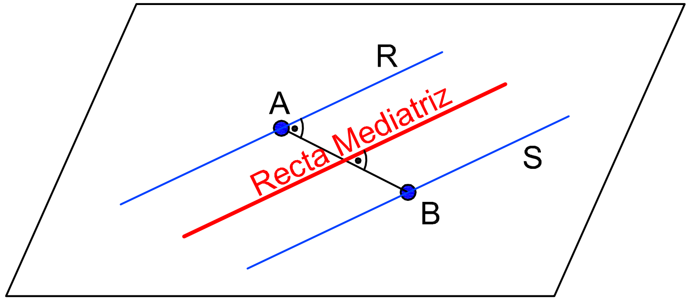
1.5. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

El **lugar geométrico** de los puntos de un plano que equidistan de **dos rectas** del plano que se cortan en un **punto A**, es **la recta bisectriz**.



1.6. LUGAR GEOMÉTRICO DE RECTAS PARALELAS.

El **lugar geométrico** de los puntos de un plano que equidistan de **dos rectas paralelas R y S**, es la **Mediatriz** de un segmento AB perpendicular a las rectas R y S.

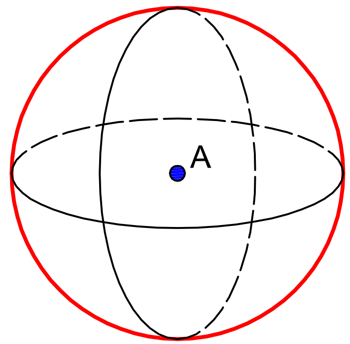


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

2.- LUGAR GEOMÉTRICO EN EL ESPACIO:

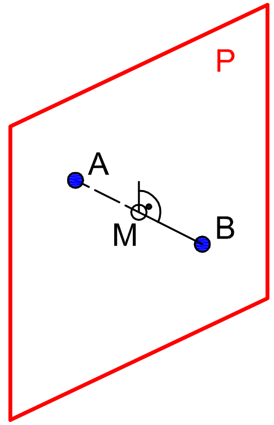
2.1. LUGAR GEOMÉTRICO DE UN PUNTO.

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de un **punto A**, es una esfera de centro **A** y radio la **distancia.**



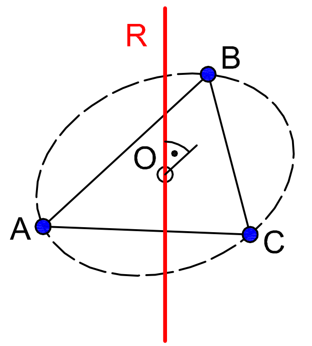
2.2. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS PUNTOS.

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **dos puntos A y B**, es un **Plano P** perpendicular al segmento AB por el punto medio de este.



2.3. LUGAR GEOMÉTRICO DE TRES PUNTOS.

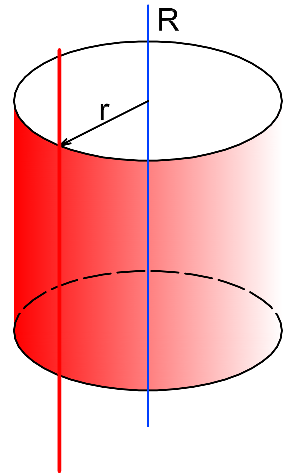
El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **tres puntos A, B y C**, es una **Recta R** que pasa por el **circuncentro del triángulo ABC** y es perpendicular al plano del triángulo.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

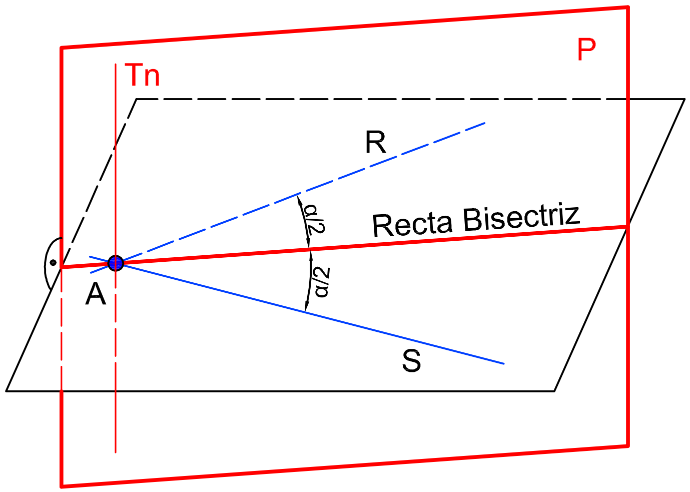
2.4. LUGAR GEOMÉTRICO DE UNA RECTA.

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **una recta**, son las generatrices de **un cilindro de revolución de eje la recta y radio la equidistancia**.



2.5. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

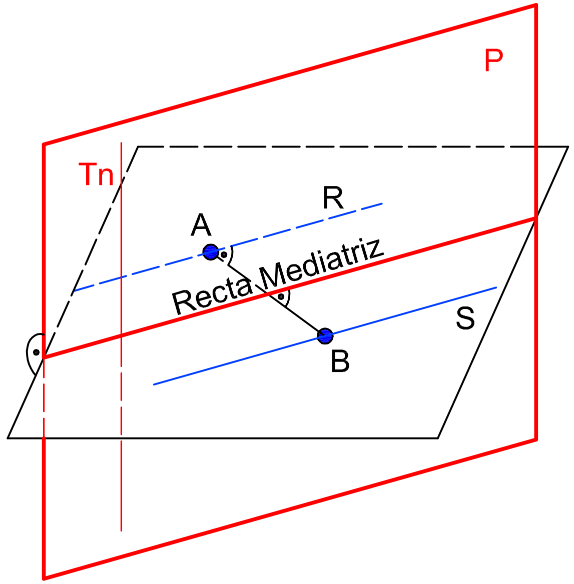
El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **dos rectas R y S que se cortan**, es la **un plano P** que contiene a la bisectriz de las rectas R y S y es perpendicular al plano que forman las citadas rectas.
El plano **P** queda definido por la **recta bisectriz** y por una recta **Tn** que se apoya en la bisectriz y es perpendicular al plano que definen las rectas **R** y **S**.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

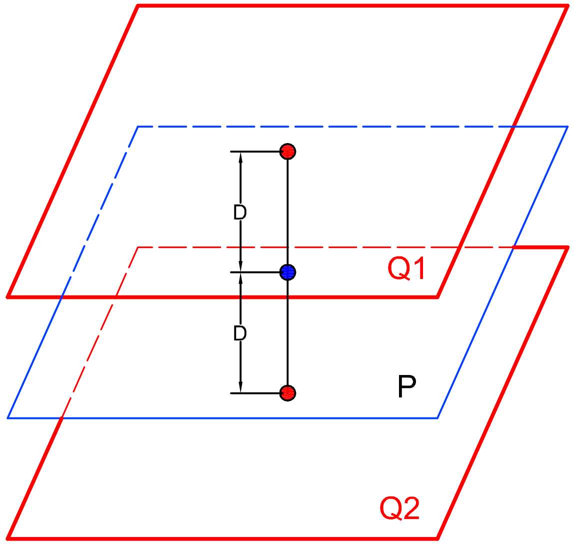
2.6. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS RECTAS PARALELAS.

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **dos rectas paralelas R y S**, es un **plano P** que siendo perpendicular al plano que definen las rectas, contiene a la **mediatriz** de un segmento AB perpendicular a las rectas R y S.
El plano **P** queda definido por la **recta mediatriz** y por una recta **Tn** que se apoya en la mediatriz y es perpendicular al plano que definen las rectas **R** y **S**.



2.6. LUGAR GEOMÉTRICO DE UN PLANO.

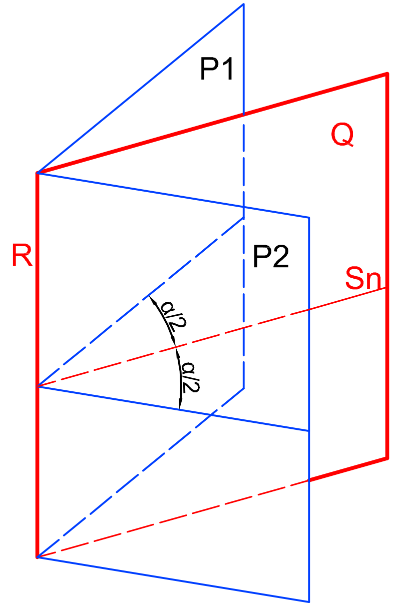
El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de un **plano P** son **dos planos Q1 y Q2** paralelos al P y equidistantes de el la distancia D.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

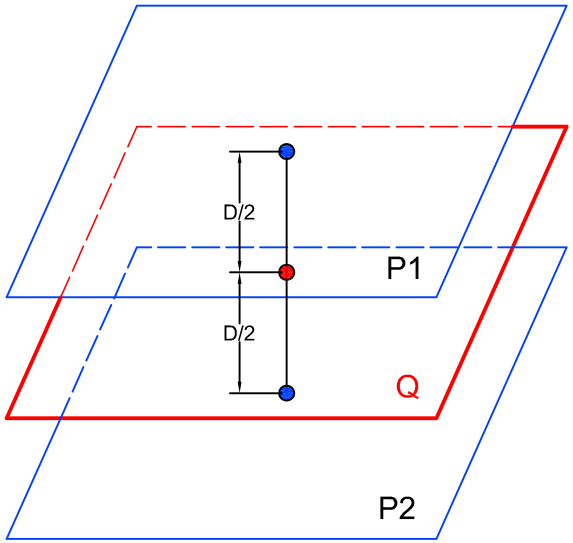
2.6. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS PLANOS QUE SE CORTAN..

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **dos planos P1 y P2 que se cortan**, es el **plano Q bisector** de P1 y P2.
El plano bisector **Q**, queda definido por la recta **R** intersección de los planos **P1** y **P2** y una recta **Sn**, bisectriz del diédro de los planos **Q1** y **Q2**.



2.6. LUGAR GEOMÉTRICO DE DOS PLANOS PARALELOS.

El **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de **dos planos paralelos P1 y P2** es un **plano Q** paralelo a los anteriores y que pasa por el **punto medio** de la distancia entre ellos.

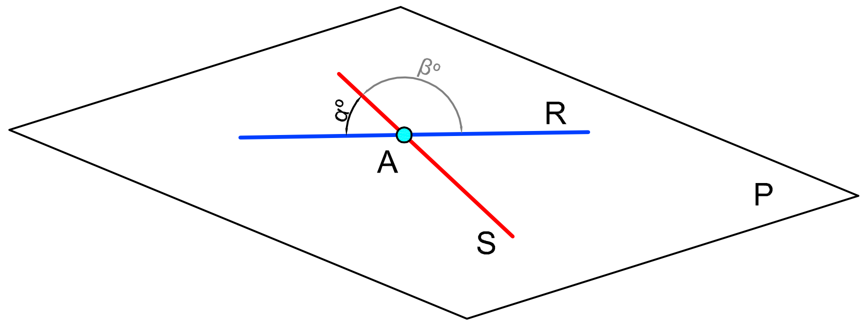


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

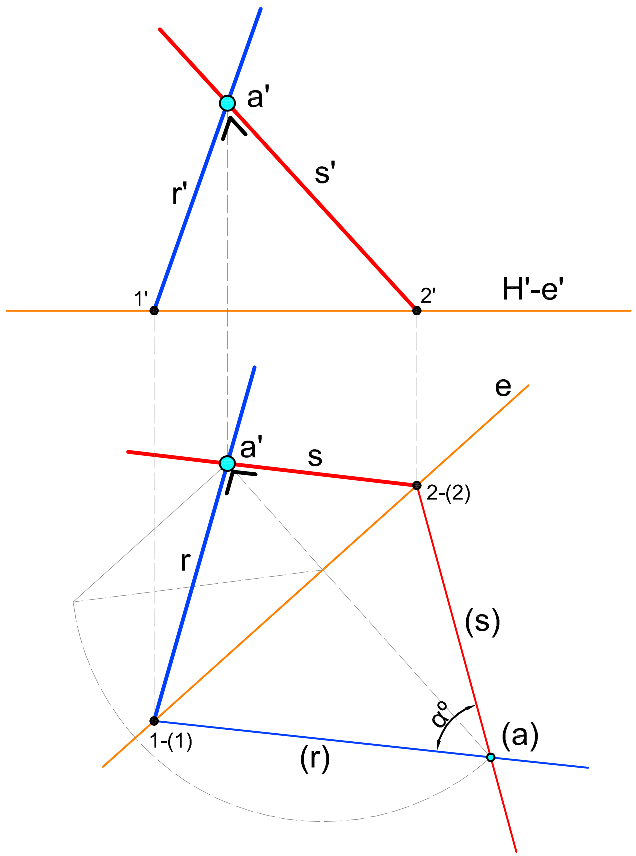
- ***ÁNGULO DE DOS RECTAS:***

Teniendo en cuenta que dos rectas que se cortan definen un plano, el **ángulo** entre estas será conocido situando el plano en verdadera magnitud.

Por convenio y por formar las rectas dos ángulos, el (**α**) y su complementario el (**β**), se toma cómo solución el **menor** de los dos.



En el ejemplo en el sistema diédrico, el ángulo que forman las rectas (**R**) y (**S**), se ha calculado por **abatimiento** del plano que definen las rectas sobre un plano horizontal (**H**), encontrándose la verdadera magnitud del mismo en el abatimiento.

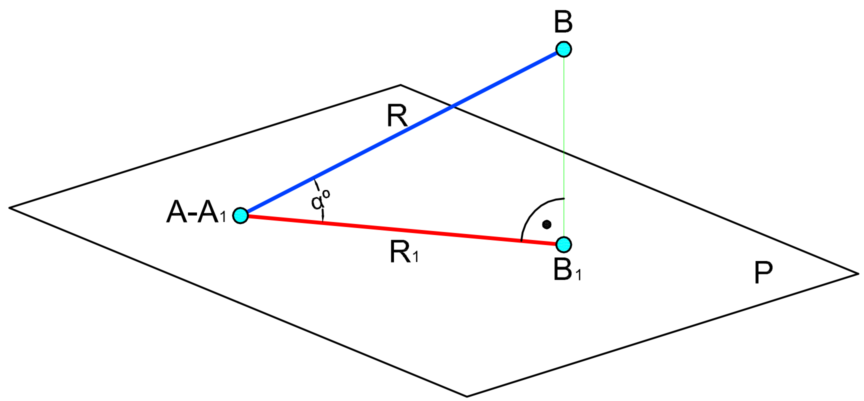


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ÁNGULO DE RECTA Y PLANO:***

El ángulo (**α**) de una Recta (**R**) con un Plano (**P**), es el que forma la recta con su **proyección ortogonal** (**R1**) sobre el plano.

Cómo se deduce del concepto teórico, el resultado final se basa en el ángulo de dos rectas, la recta dato y su proyección ortogonal sobre el plano.



- ***ÁNGULO DE RECTA CON PLANO HORIZONTAL: (ÁNGULO DE PENDIENTE DE LA RECTA)***

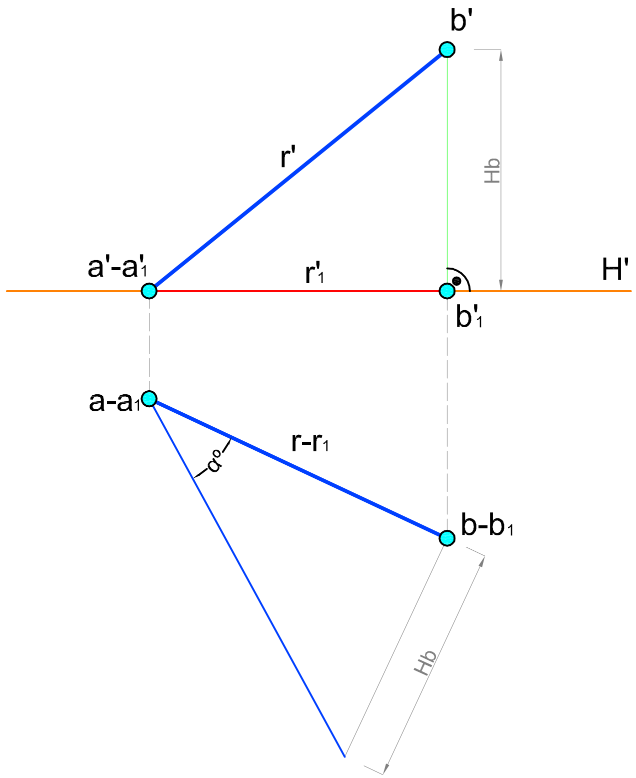
Cómo se deduce del concepto teórico, el resultado final se basa en el ángulo de dos rectas, la recta dato y su **proyección ortogonal** sobre el plano.

- Se proyecta el punto (**A**) de **intersección** de la recta con el plano, siendo este el punto (**A1**) coincidente con el (**A**).

- Desde otro punto (**B**) de la recta se traza la **perpendicular** al plano y se halla la intersección (**B1**), siendo este la **proyección ortogonal** del punto (**B**) sobre el plano.

- La unión de los puntos (**A1**) y (**B1**) definen la recta (**R1**), **proyección ortogonal** de (**R**) sobre el plano.

El ángulo (**α**) que forman las rectas (**R**) y (**R1**) es el angulo buscado.

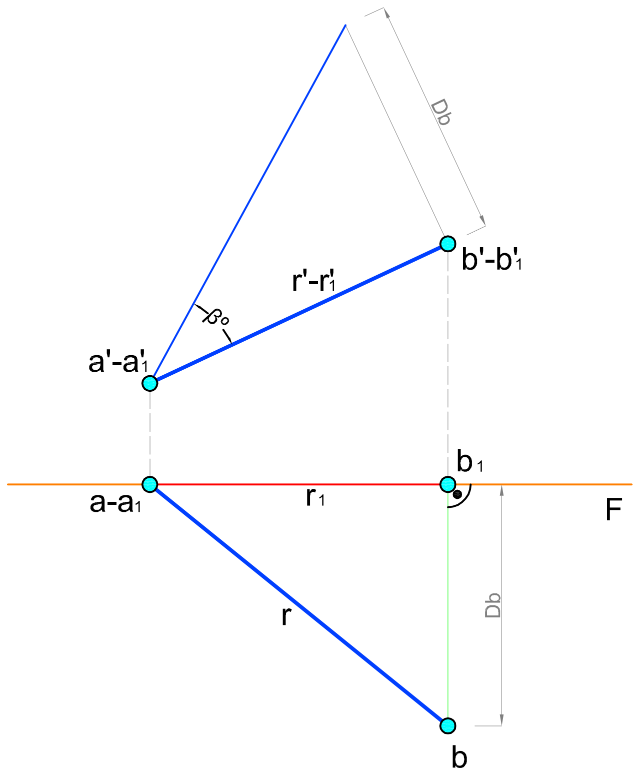


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ÁNGULO DE RECTA CON PLANO FRONTAL:***
  (ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA RECTA)

Este caso se resuelve aplicando los conceptos generales ya conocidos y se reduce a encontrar (**R1**) **proyección ortogonal** de la recta (**R**) sobre el plano (**F**).

- Se proyecta el punto (**A**) de **intersección** de la recta con el plano, siendo este el punto (**A1**) coincidente con el (**A**).
- Desde otro punto (**B**) de la recta se traza la **perpendicular** al plano y se halla la intersección (**B1**), siendo este la **proyección ortogonal** del punto (**B**) sobre el plano.
- La unión de los puntos (**A1**) y (**B1**) definen la recta (**R1**), **proyección ortogonal** de (**R**) sobre el plano.
- El ángulo (**β**) que forman las rectas (**R**) y (**R1**) es el ángulo buscado.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ÁNGULO DE RECTA CON PLANO OBLICUO:***

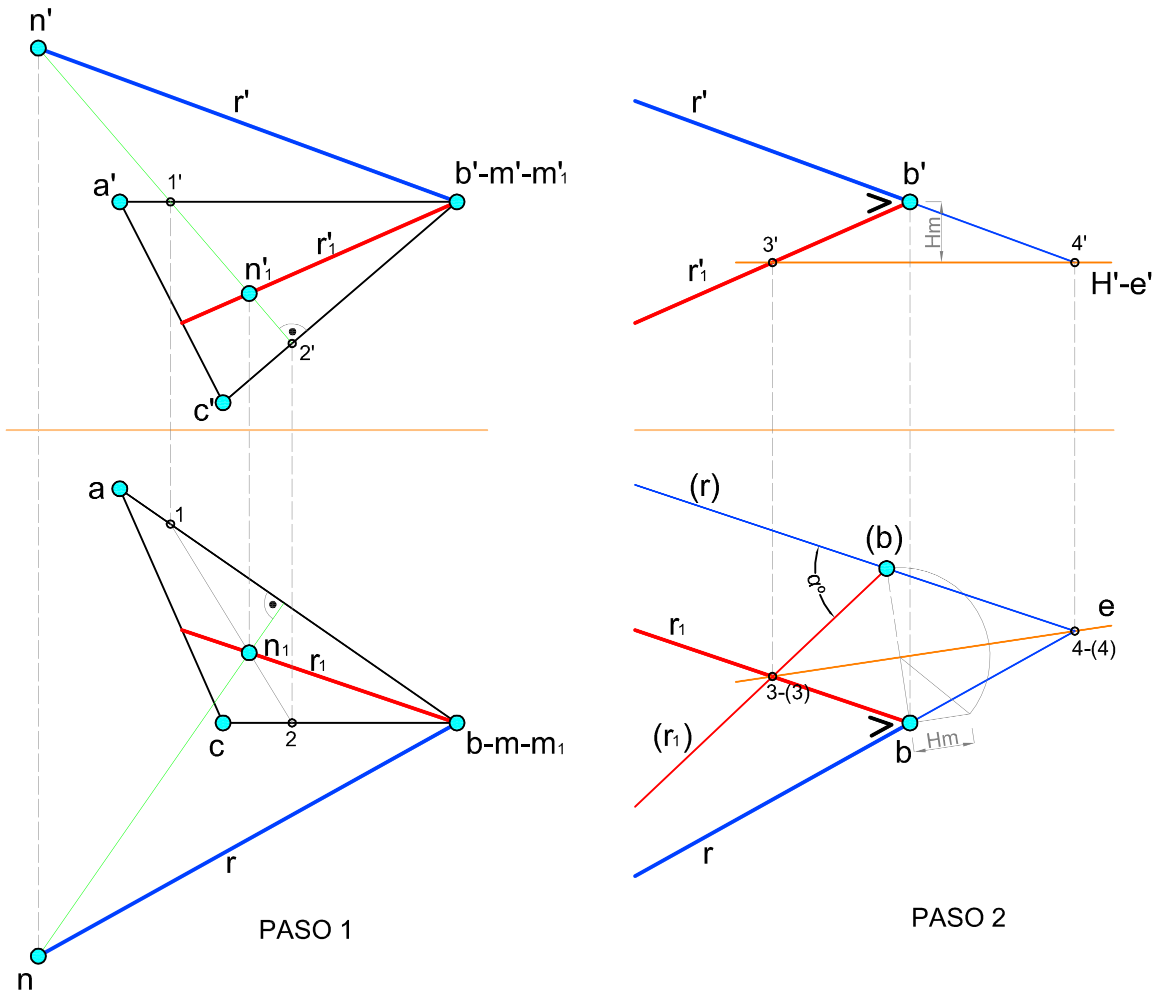
Se trata de hallar el ángulo que una Recta (**R**) forma con el Plano (**Triángulo A,B,C**).

Cómo en todos los casos de ángulo entre recta y plano, se reduce al angulo de la recta con su **proyección ortogonal** sobre el plano y que hemos desarrollado en dos pasos:

PASO 1. Proyectar ortogonalmente la recta (**R**) sobre el plano (**A,B,C**), para lo que:

- Se proyecta un punto (**M**) sobre el plano, siendo este el punto (**M**1) coincidente con (**M**) por pertenecer este al plano.
- Desde el punto (**N**) de la recta, se traza una **perpendicular** al plano y se halla el punto de **intersección** con él, siendo este (**N**1).
- La recta (**R**1) resultante de unir (**M**1) y (**N**1), es la **proyección ortogonal** de la recta (**R**) sobre el plano.

PASO 2. Hallar la **verdadera magnitud** del ángulo que forman la recta (**R**) y la recta (**R**1), para lo que se **abate** el plano que definen sobre un plano horizontal (**H**).

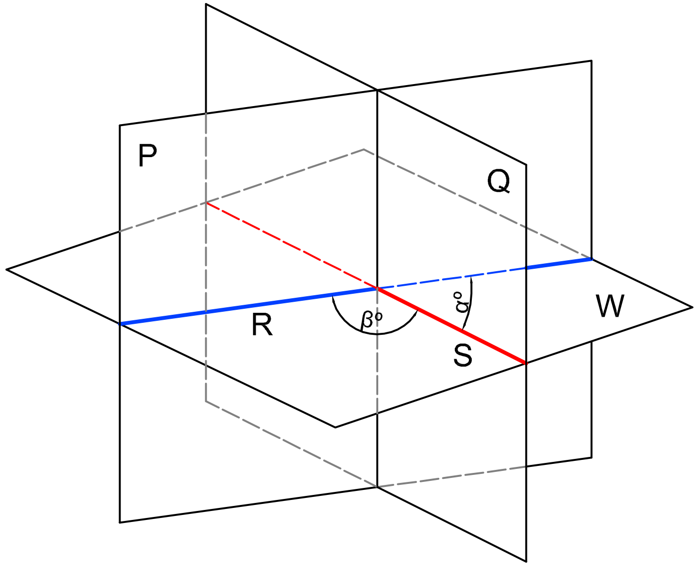


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

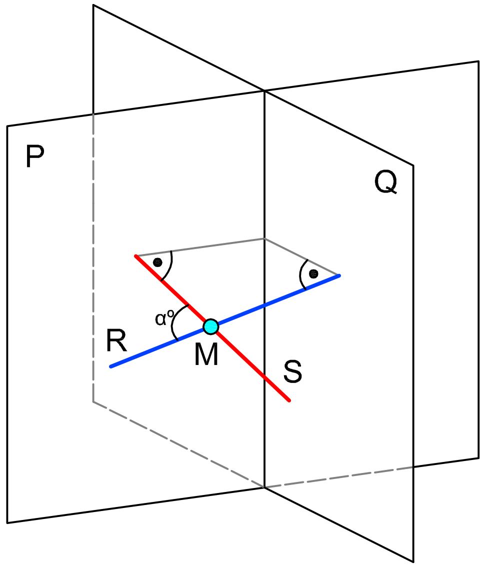
- ***ÁNGULO ENTRE PLANOS:***

El **ángulo** que forman dos Planos (**P**) y (**Q**), es el que forman las Rectas (**R**) y (**S**) de **intersección** con ellos de un Plano (**W**) **perpendicular común** a ambos y por tanto a su recta intersección.

Cómo se deduce de este concepto, el resultado final se reduce al ángulo entre rectas, siendo la solución el menor de los dos.



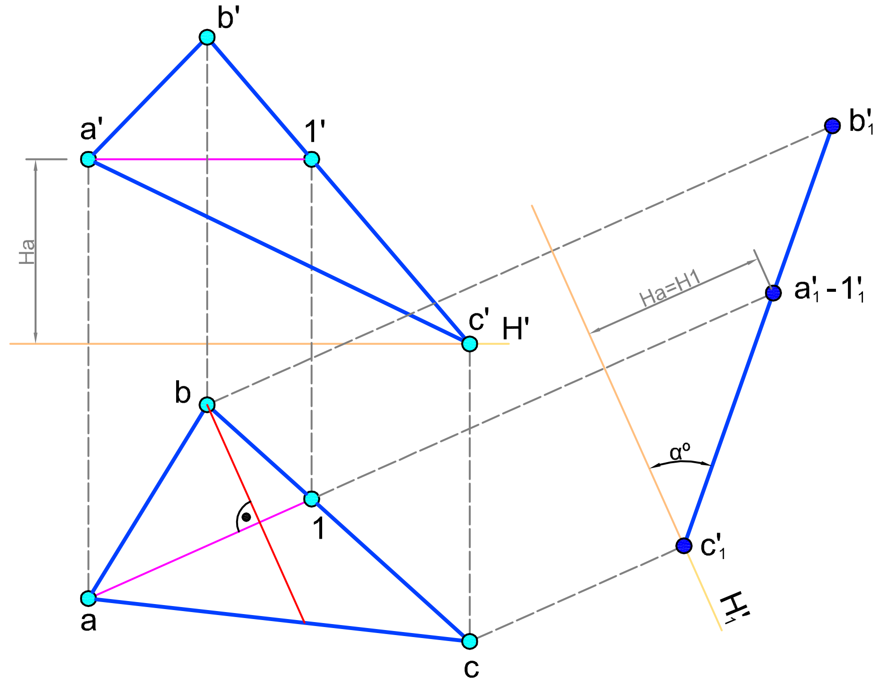
En los caso en los que sólo se quiera conocer el valor del ángulo que forman los planos y no su posición, se puede hallar mediante el ángulo que forman las Rectas (**R**) y (**S**) **perpendiculares** a cada uno de los planos y que pasan por un Punto (**M**) exterior a ambos.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

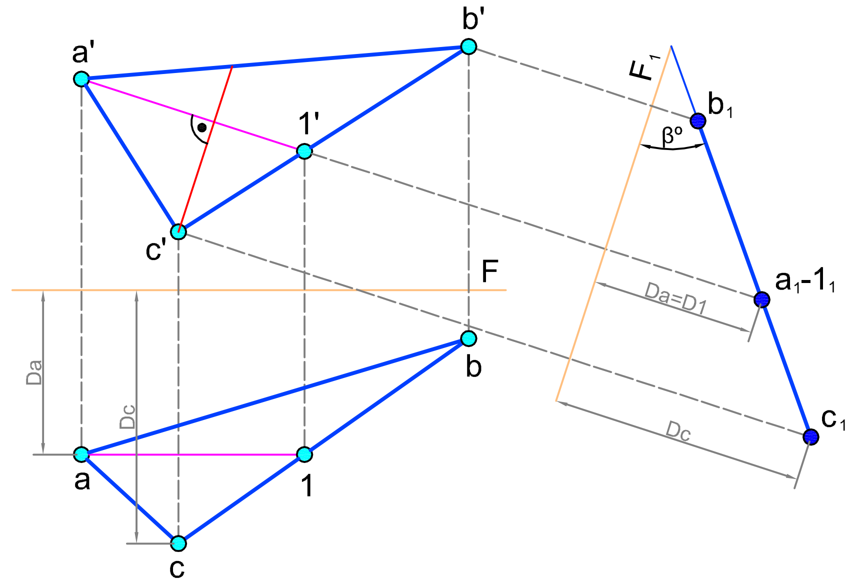
- ***ÁNGULO DE PLANO OBLICUO CON UN HORIZONTAL: (ÁNGULO DE PENDIENTE DEL PLANO OBLICUO)***

Este caso se puede considerar cómo un caso particular ya que el ángulo (**α**) que forma el Plano (**A,B,C**) con Planos Horizontales, es el ángulo de su **línea de máxima pendiente**, viándose este ángulo en verdadera magnitud situando la recta frontal y por tanto el **plano de canto** mediante una vista auxiliar o cambio de plano.



- ***ÁNGULO DE PLANO OBLICUO CON UN FRONTAL: (ÁNGULO DE INCLINACIÓN DEL PLANO OBLICUO)***

Cómo en el anterior caso, este se puede considerar cómo un caso particular ya que el ángulo (**β**) que forma el Plano (**A,B,C**) con Planos Frontales, es el ángulo de su **línea de máxima inclinación**, viándose este ángulo en verdadera magnitud situando la recta horizontal y por tanto el **plano vertical** mediante una vista auxiliar o cambio de plano.

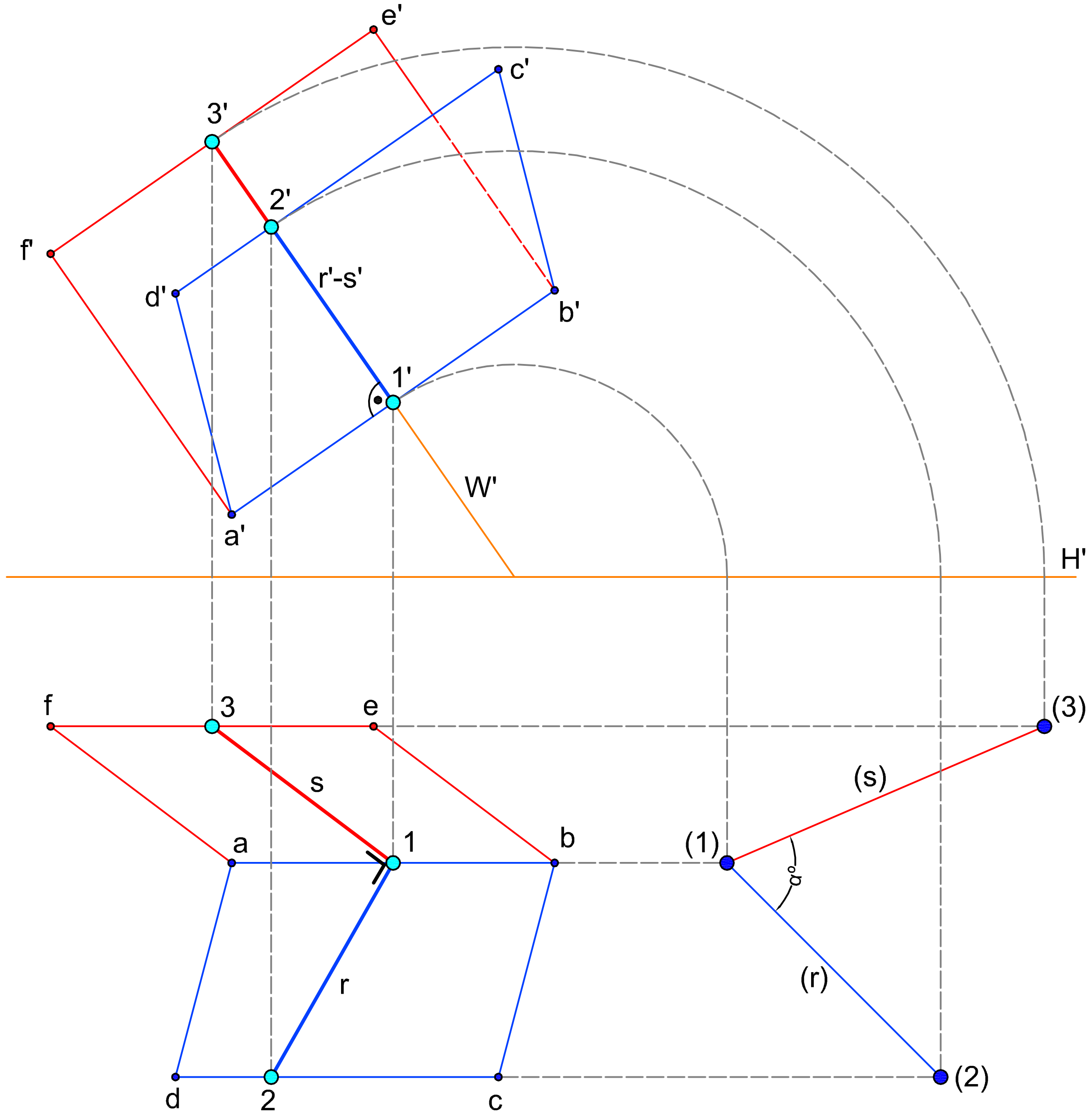


Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***ÁNGULO ENTRE PLANOS OBLICUOS:***

En estos casos aplicaremos el **concepto teórico** de ángulo entre planos y que pasamos a desarrollar para hallar el ángulo entre los paralelogramos (**A,B,C,D**) y (**A,B,E,F**).

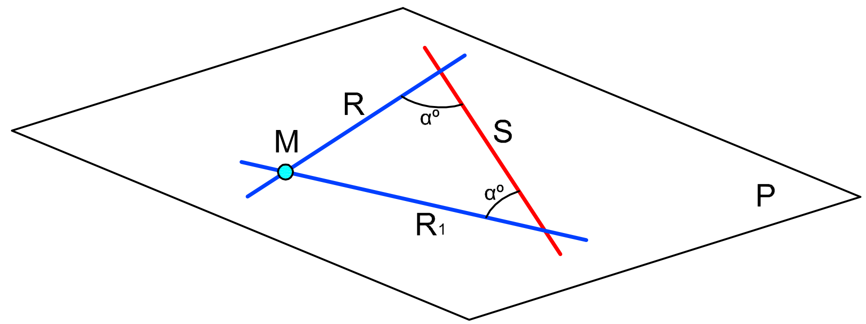
- Se halla la recta (**A-B**) **intersección** de los planos.
- Por un punto (**1**) de esta recta, trazamos el plano (**W**) perpendicular a ella y por lo tanto **perpendicular común** a los planos.
- Se calculan las rectas (**1-2**) y (**1-3**) de **intersección** del plano (**W**) con los paralelogramos.
- Se halla, por **abatimientos**, la verdadera magnitud del ángulo (**α**) que forman estas rectas y este será el de la solución buscada.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

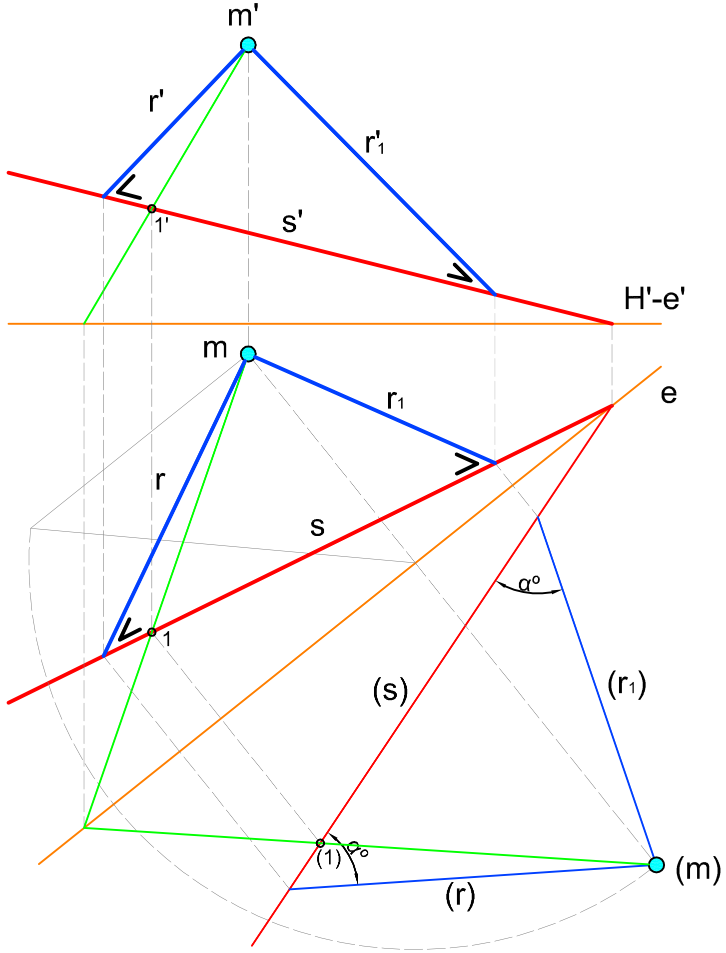
- ***TRAZADO DE RECTAS QUE FORMAN UN ÁNGULO CON OTRA RECTA POR UN PUNTO EXTERIOR:***

Basandonos en el caso de ángulos directos entre rectas, estas definen un plano y el **ángulo** entre estas será conocido situando el plano en verdadera magnitud.

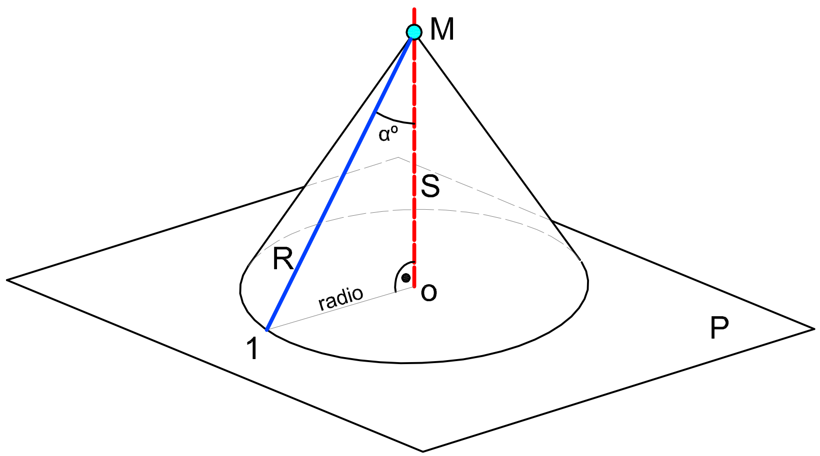


En el ejemplo en el sistema diédrico, vamos a trazar las rectas (**R**) y (**R1**) que pasando por un punto (**M**) formen un ángulo (**α**) con otra recta (**S**):

- Se define el Plano que forman la Recta (**S**) y el Punto (**M**).
- Abatimos este plano sobre un plano horizontal (**H**).
- Desde el punto (**(m)**) abatido se trazan las rectas (**(r)**) y (**(r1)**) abatidas que forman el ángulo deseado con la recta (**(s)**) abatida.
- Desabatimos el plano y tendremos las proyecciones de las rectas solución (**R**) y (**R1**).



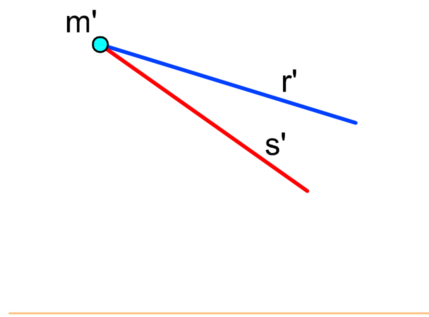
- ***TRAZADO DE RECTAS QUE FORMAN UN ÁNGULO CON OTRA RECTA POR UN PUNTO DE ESTA:***



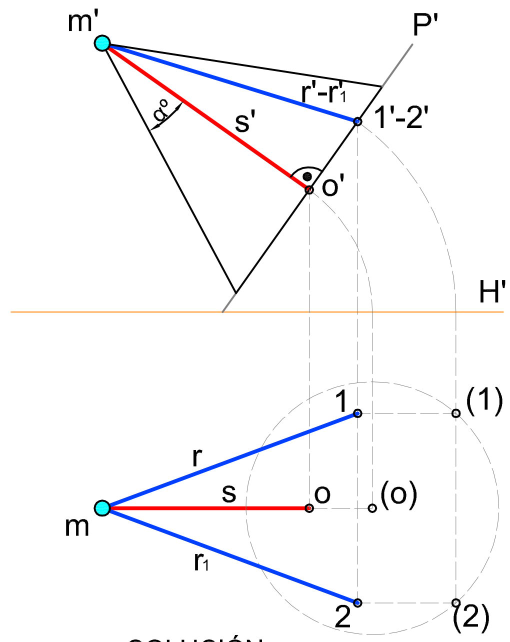
Por un punto (**M**) de una Recta (**S**) pasan tantas Rectas (**R**) que forman un ángulo (**α**) con ella como **generatrices** de un **cono de revolución** de eje la recta (**S**), vértice el punto (**M**), semiángulo cónico el ángulo (**α**) y directriz circular en un plano (**P**) perpendicular al eje.

El radio de la directriz del cono se puede calcular cómo cateto de un triángulo rectángulo del que se conoce el otro cateto (**M-O**) y la dirección de su hipotenusa.

En el ejemplo en sistema diédrico se han hallado las rectas (**R**) y (**R₁**) que pasan por un punto (**M**) de una recta (**S**), forman un ángulo (**α**) con ella y su proyección vertical es conocida.



DATOS

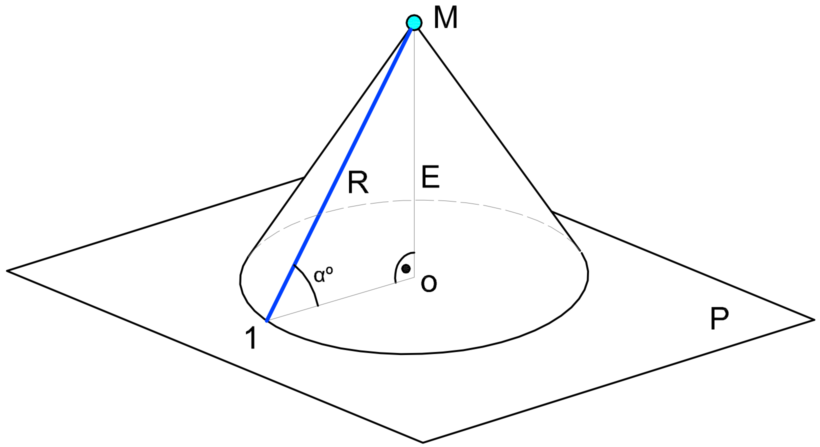


SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***RECTAS QUE FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO, POR UN PUNTO EXTERIOR A ESTE:***

Por un Punto (**M**) exterior a un Plano (**P**), pasan tantas rectas (**R**) que forman un ángulo (**α**) con él, como **generatrices** de un **cono de revolución** de vértice el punto (**M**), eje la recta perpendicular del punto al plano y directriz circular de centro (**O**) la intersección de la perpendicular con el plano y radio el cateto de un triángulo rectángulo cuyo otro cateto es el segmento (**M-O**) del eje y su hipotenusa de dirección conocida.



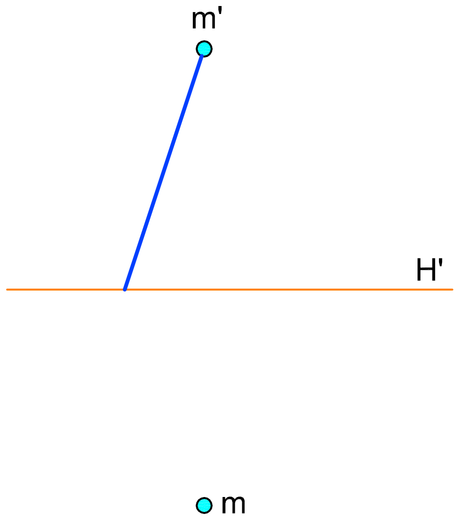
- ***RECTAS QUE PASANDO POR UN PUNTO, FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO HORIZONTAL (ÁNGULO DE PENDIENTE DE LAS RECTAS):***

- Por (**M)** se traza el eje (**E**) del cono, perpendicular al plano, resultando ser en este caso una recta vertical.

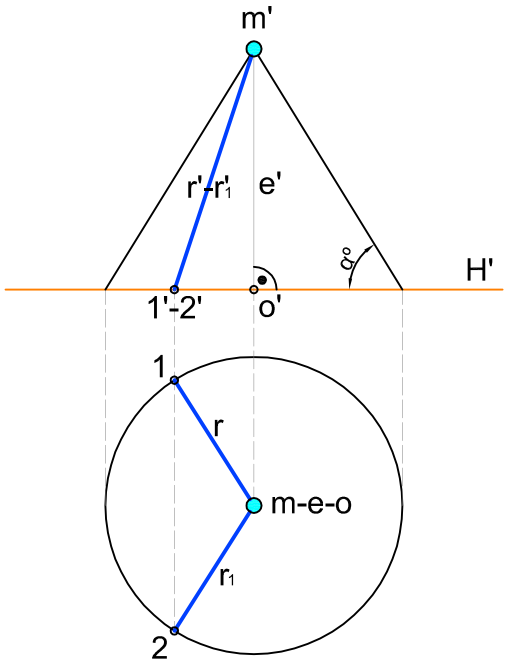
- Con centro en (**O**), intersección del eje con el plano, se dibuja la circunferencia en el plano horizontal de radio conocido.

- Las rectas resultantes de unir los puntos de la circunferencia con el punto (**M**), son posibles soluciones.

En el ejemplo se reducen a dos (**R**1) y (**R**2) ya que se ha puesto una segunda condición, que la proyección vertical de las rectas buscadas fuera conocida.



DATOS



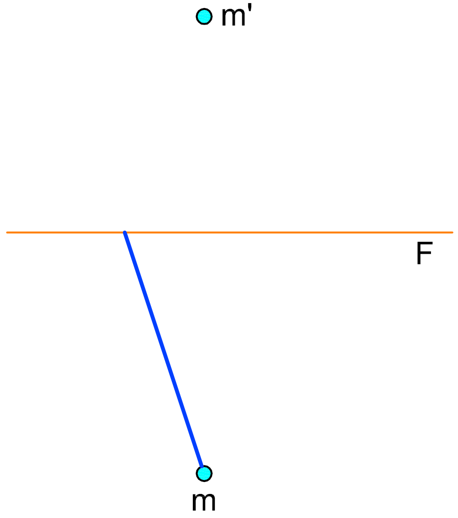
SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

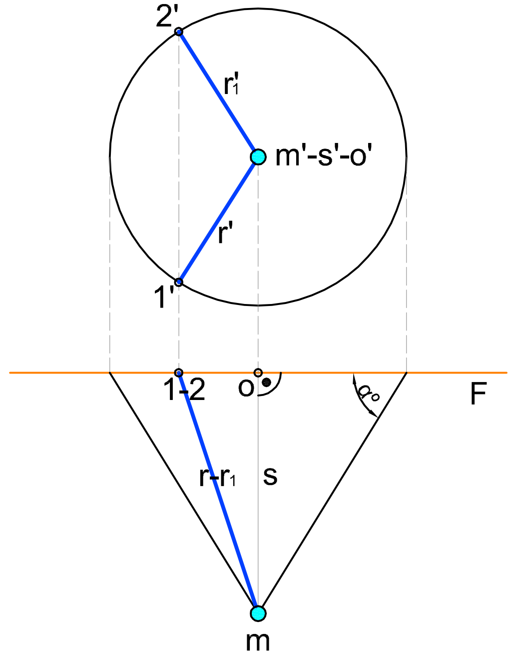
- ***RECTAS QUE PASANDO POR UN PUNTO, FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO FRONTAL (ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LAS RECTAS):***

Este caso es similar al anterior con las diferencias que:

- El eje (**E**) del cono de revolución es una recta de punta.
- La circunferencia directriz del cono se encuentra en un plano frontal.



DATOS



SOLUCIÓN

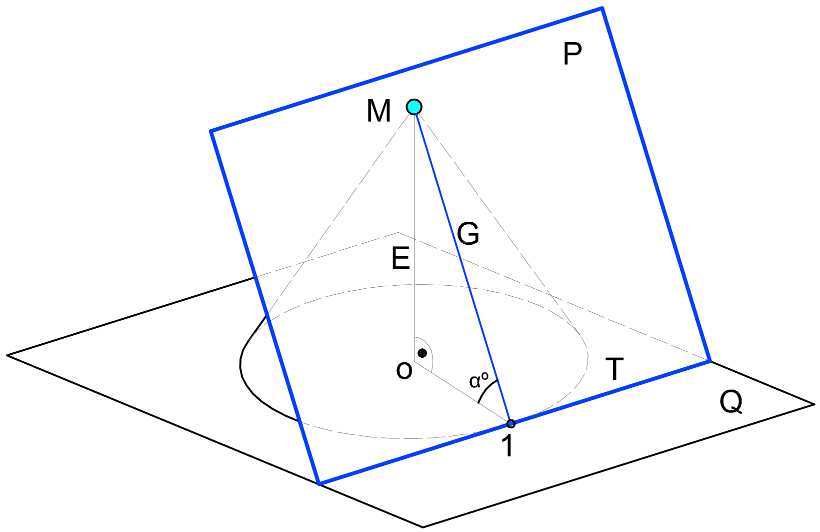
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***PLANOS QUE FORMAN UN ÁNGULO CON OTRO PLANO, POR UN PUNTO EXTERIOR A ESTE:***

Por un Punto (**M**) exterior a un Plano (**Q**), pasan tantos Planos (**P**) que forman un ángulo (**α**) con él, como **planos tangentes** a un **cono de revolución** de vértice el punto (**M**), directriz circular en el plano (**Q**) y cuyas generatrices (**G**) forman el ángulo pedido con el plano (**Q**).

Todo plano tangente a un cono, contiene a la generatriz (**G**) de tangencia y la recta (**T**) de intersección con el plano de la directriz, es tangente a esta en el punto (**1**) pie de la generatriz.

Como podemos deducir de lo explicado, existen tantos planos solución cómo generatrices de un cono, por lo que para acotar el número de soluciones se recurre a una segunda condición.

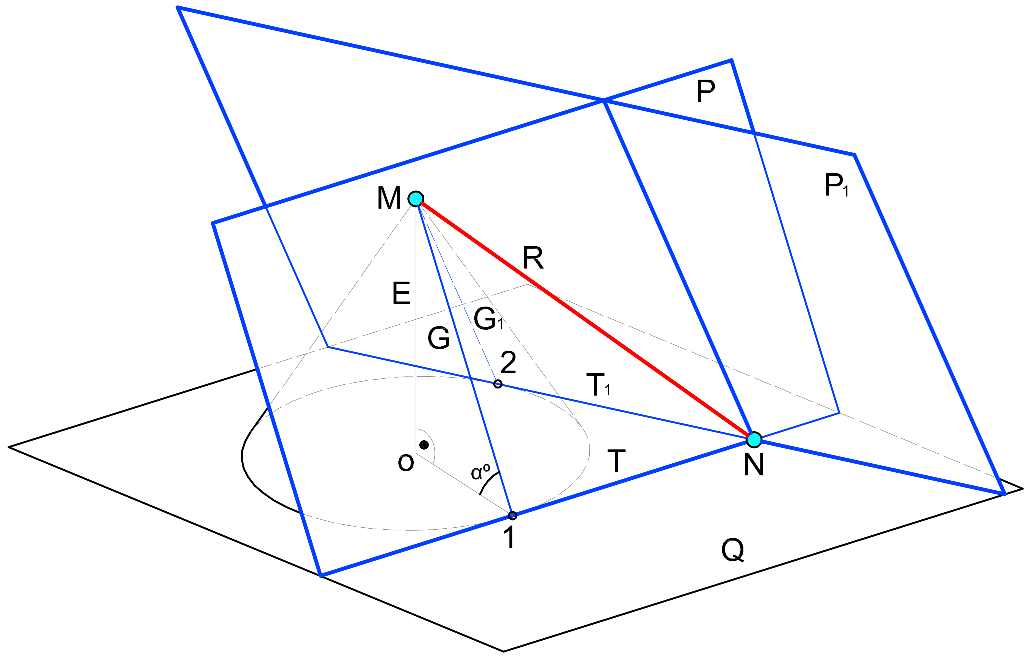


- ***PLANOS QUE CONTIENEN A UNA RECTA Y FORMAN UN ÁNGULO CON OTRO PLANO.***

Este, es un caso de trazado de un plano (**P**) que forma un ángulo conocido con otro plano (**Q**) y en el que:

- Como **vértice** del cono, se toma un punto (**M**) de la recta.
- Las tangentes a la directriz, pasan por el punto (**N**) de **intersección** de la recta con el otro plano (**Q**).

El número de soluciones será tantas cómo rectas tangentes a la circunferencia directriz, desde el punto (**N**).



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

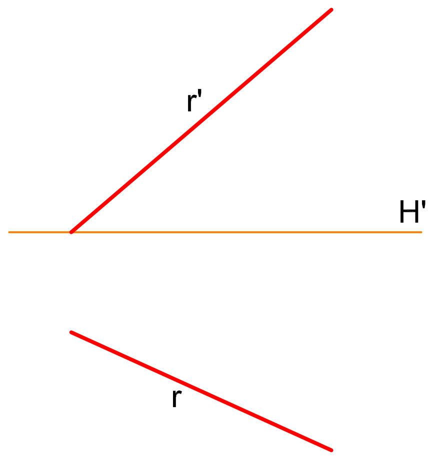
- ***PLANOS QUE CONTIENEN A UNA RECTA (R) Y FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO HORIZONTAL (ÁNGULO DE PENDIENTE):***

- Por un Punto (**M**) de la Recta (**R**) se traza la recta (E) perpendicular al Plano (**H**) horizontal.

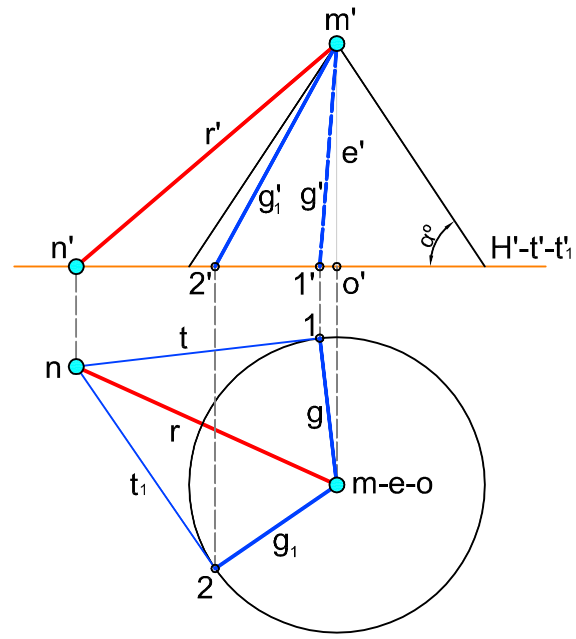
- Representamos el cono de revolución de vértice (**M**), eje la perpendicular (**E**) al plano (**H**), y directriz circular de centro (**O**) el punto de intersección de la perpendicular con el plano.

- Desde el punto (**N**) de intersección de la recta (**R**) con el plano horizontal se trazan las tangentes (**T**) y (**T₁**) a la directriz, siendo los puntos (**1**) y (**2**) los puntos de tangencia.

- Las rectas (**G**) y (**G₁**) resultantes de unir los puntos de tangencia (**1**) y (**2**) con el punto (**M**) y la recta (**R**), definen los planos buscados.



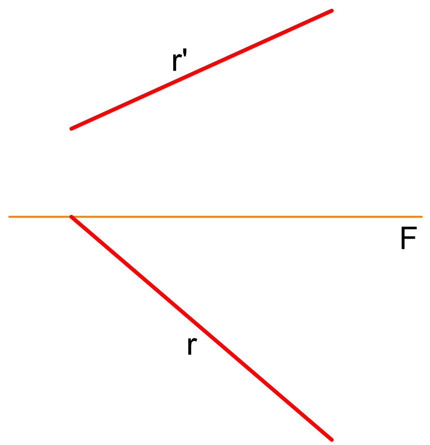
DATOS

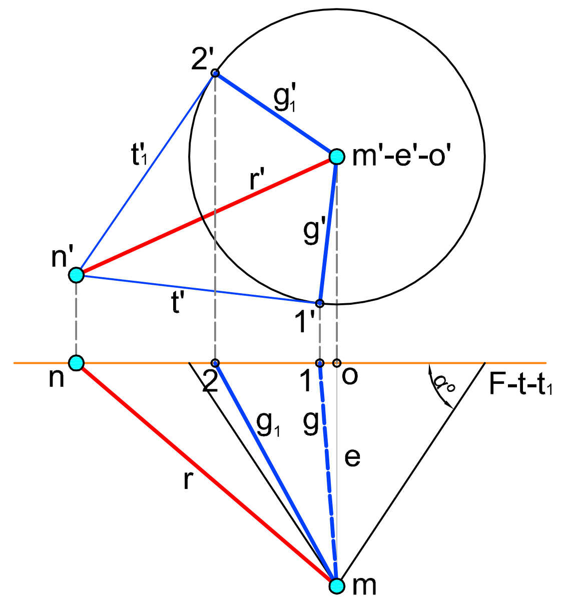


SOLUCIÓN

- ***PLANOS QUE CONTIENEN A UNA RECTA (R) Y FORMAN UN ÁNGULO CON UN PLANO FRONTAL (ÁNGULO DE INCLINACIÓN):***

Este caso es igual al anterior pero con la diferencia que la directriz del cono se encuentra en un plano frontal, siendo el eje una recta de punta.





POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Un **poliedro regular** es un cuerpo geométrico en el que sus caras son todas polígonos regulares iguales, y todos sus diedros y ángulos poliedros lo son también iguales.

Los poliedros regulares convexos son aquellos que cumplen el TEOREMA DE EULER: **nºC + nºV = nºA + 2**

C=Caras
V=Vértices
A=Aristas

Fig.nº	POLIEDRO	C	V	A	TIPOLOGÍA DE LAS CARAS
1	**TETRAEDRO**	4	4	6	**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**
2	**HEXAEDRO**	6	8	12	**CUADRADO**
3	**OCTAEDRO**	8	6	12	**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**
4	**DODECAEDRO**	12	20	30	**PENTÁGONO REGULAR**
5	**ICOSAEDR0**	20	12	30	**TRIÁNGULO EQUILÁTERO**

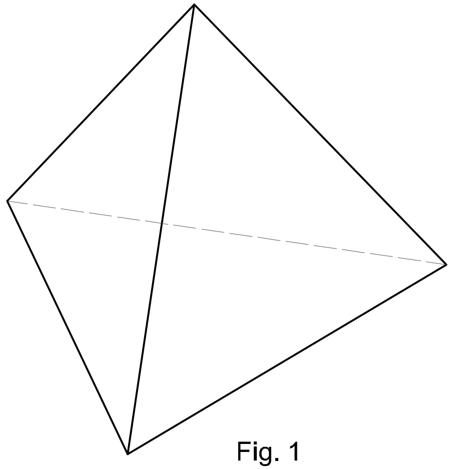


Fig. 1

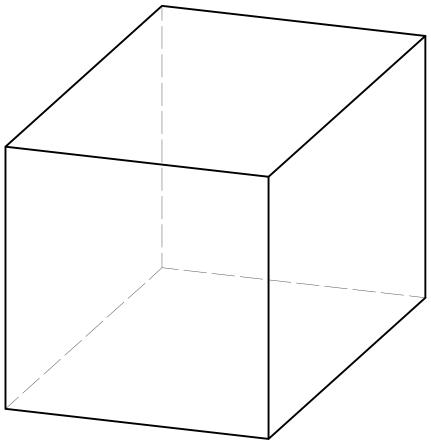


Fig. 2

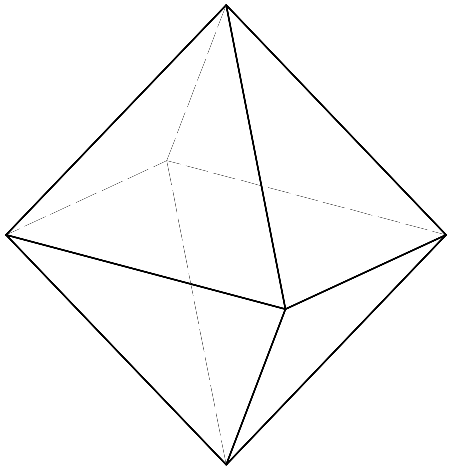


Fig. 3

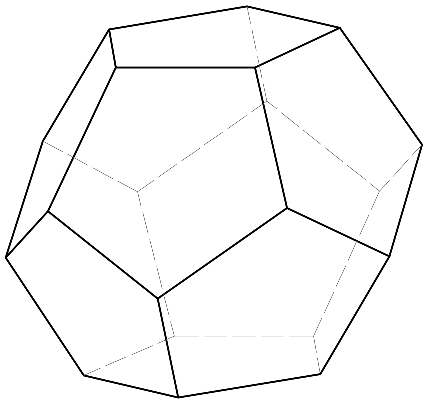


Fig. 4

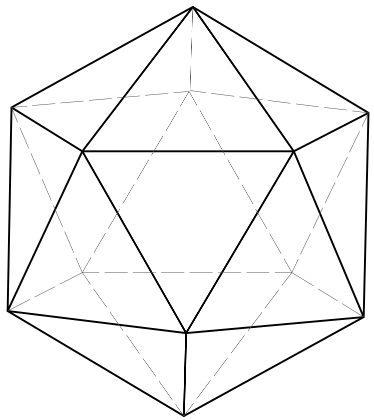


Fig. 5

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS Y SUS CONJUGADOS

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

En geometría, un poliedro dual o **conjugado** es el poliedro cuyos vértices se corresponden con el centro de las caras del otro poliedro dado, de lo que se deduce que el número de vértices de un poliedro conjugado es igual al número de caras del poliedro dado.

Fig.nº	POLIEDRO	C	V	A	POLIEDRO CONJUGADO	C	V	A
1	TETRAEDRO	4	4	6	**TETRAEDRO**	4	4	6
2	HEXAEDRO	6	8	12	**OCTAEDRO**	8	6	12
3	OCTAEDRO	8	6	12	**HEXAEDRO**	6	8	12
4	DODECAEDRO	12	20	30	**ICOSAEDRO**	20	12	30
5	ICOSAEDR0	20	12	30	**DODECAEDRO**	12	20	30

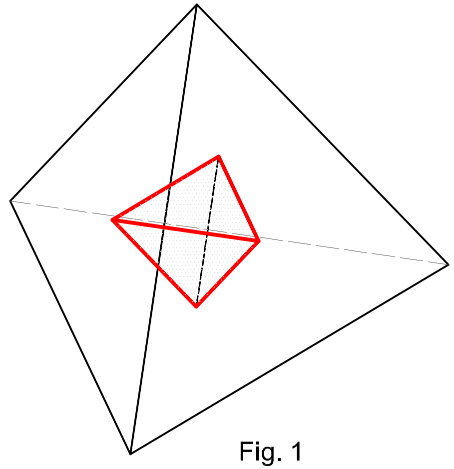


Fig. 1

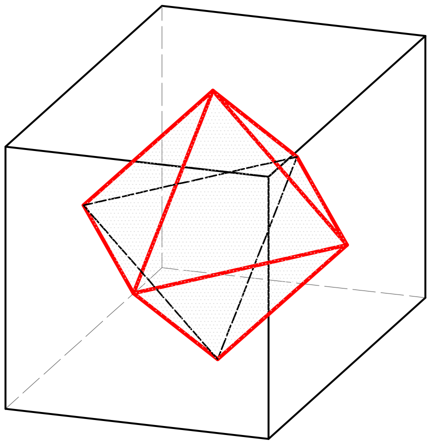


Fig. 2

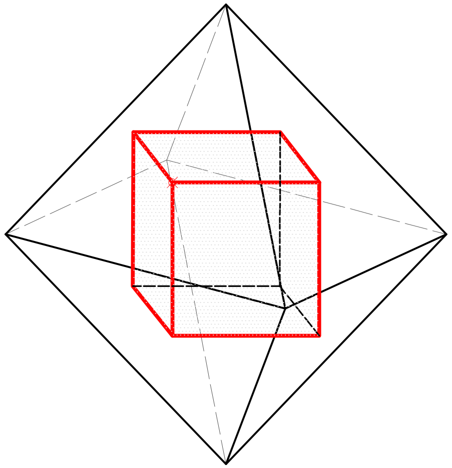


Fig. 3

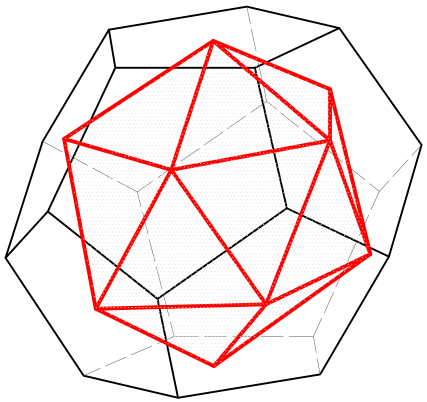


Fig. 4

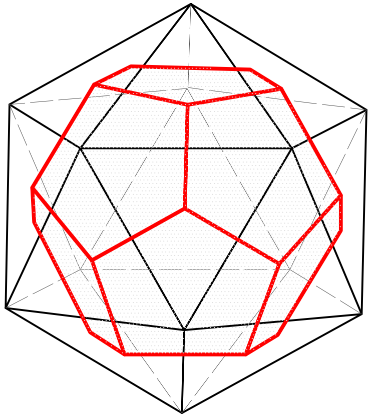


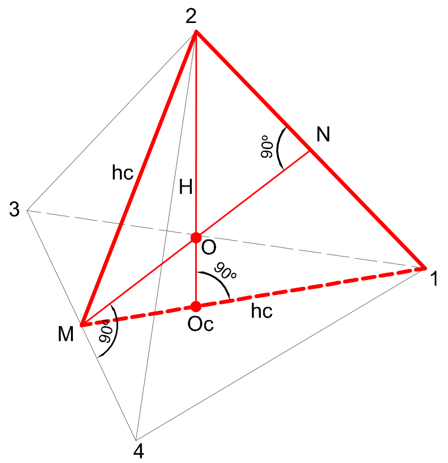
Fig. 5

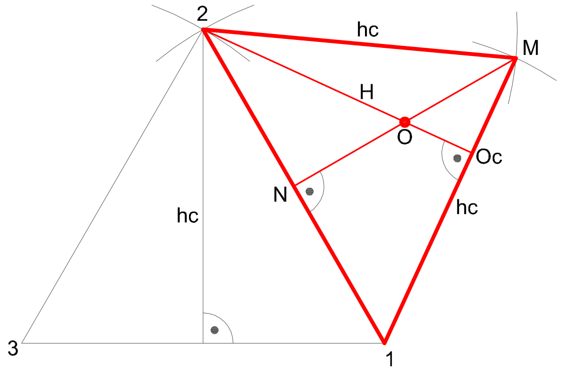
En los poliedros regulares convexos, existen una serie de secciones en las que se relacionan todos los elementos del cuerpo factibles de definir la magnitud del mismo. A estas secciones, se las denominan como **Secciones Principales.**

TETRAEDRO:

Sección principal.

- Sección que le produce un plano que contiene a una arista y al punto medio de la arista opuesta. Es un **triángulo isósceles** de lados uno (**1-2**), de valor el de las aristas y los otros dos iguales (**1-M** y **2-M**) de valores el de las alturas de caras.





(**O**) = Centro Geométrico del Poliedro
(**Oc**) = Centro de las Caras
(**1-2**) = Arista
(**1-M**) = (**2-M**) = (**hc**) = Altura de Cara
(**2-Oc**) = (**H**) = Altura Tetraedro
(**M-N**) = Distancia Aristas Opuestas
(**O-2**) = Radio Esfera Circunscrita
(**O-Oc**) = Radio Esfera Inscrita
(**O-M**) = (**O-N**) = R. Esfera Tangente Aristas

Geometría:

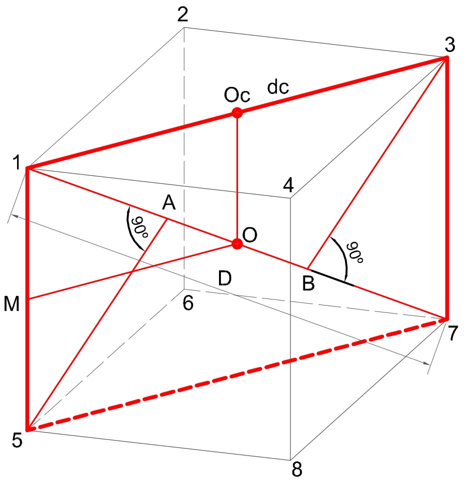
- Dos aristas opuestas son perpendiculares, siendo la mínima distancia entre ellas el segmento (**M-N**) que une sus puntos medios y que se corresponde con la distancia entre aristas opuestas.

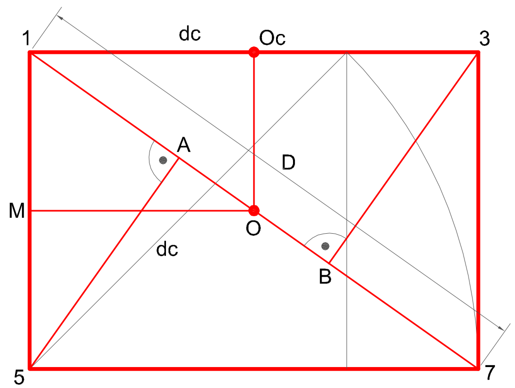
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

HEXAEDRO:

SECCIÓN PRINCIPAL.

- Es la sección que le produce un plano que contiene a dos aristas opuestas. Es un **rectángulo** de lados unos (**1-5** y **3-7**), de valor el de las aristas y los otros (**1-3** y **5-7**) de valor el de las diagonales de caras.





(**O**) = Centro Geométrico del Poliedro
(**Oc**) = Centro de las Caras
(**1-5**) = (**3-7**) = Arista
(1-3) = (**5-7**) = (**dc**) = Diagonal de Cara
(**1-7**) = (**D**) = Diagonal Hexaedro
(**O-1**) = (**O-7**) = Radio Esfera Circunscrita
(**O-Oc**) = Radio Esfera Inscrita
(**O-M**) = Radio Esfera Tangente Aristas
(**1-A**) = (**A-B**) = (**B-7**) = ⅓ D

GEOMETRÍA:

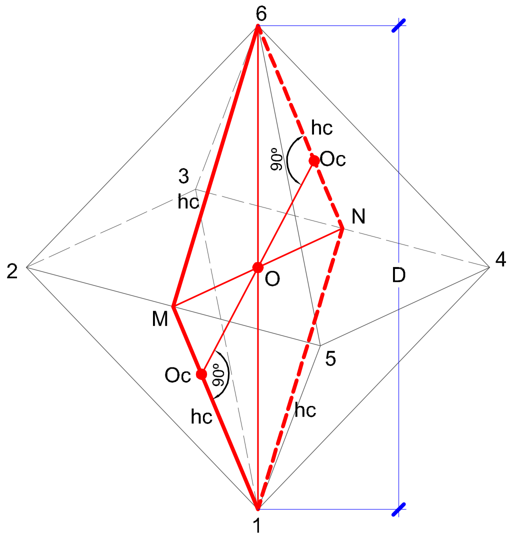
- Caras opuestas paralelas y equidistantes una distancia de valor la arista.
- Aristas opuestas paralelas y equidistantes una distancia de valor la diagonal de cara.
- Tres aristas concurrentes en un vértice definen un triedro trirectángulo.
- Las dos secciones principales que contienen a las diagonales de una misma cara, son perpendiculares entre sí.

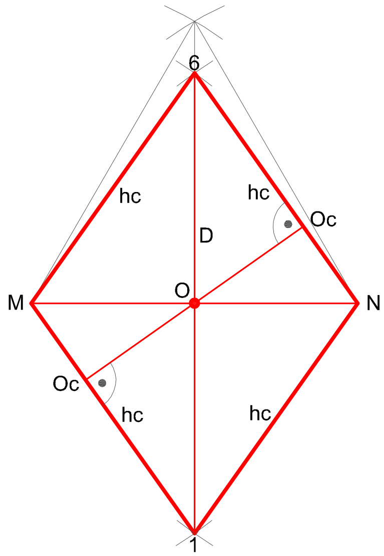
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

OCTAEDRO:

SECCIÓN PRINCIPAL.

- Sección que produce un plano perpendicular a dos aristas opuestas y que contiene a los puntos medios de estas. Es un **rombo** de lados (**1-M**, **1-N**, **6-M** y **6-N**) las alturas de caras, siendo el valor de la diagonal menor (**M-N**) el de las aristas del poliedro.





(**O**) = Centro Geométrico del Poliedro
(**Oc**) = Centro de las Caras
(**1-6**) = Diagonal Octaedro
(**M-N**) = Distancia Aristas Opuestas (arista)
(**1-M**) = (**1-N**) = (**hc**) = Altura de Cara
(**Oc-Oc**) = Distancia entre Caras Opuestas
(**O-1**) = (**O-6**) = Radio Esfera Circunscrita
(**O-Oc**) = Radio Esfera Inscrita
(**O-M**) = (**O-N**) = Radio Esfera Tangente Aristas

GEOMETRÍA.

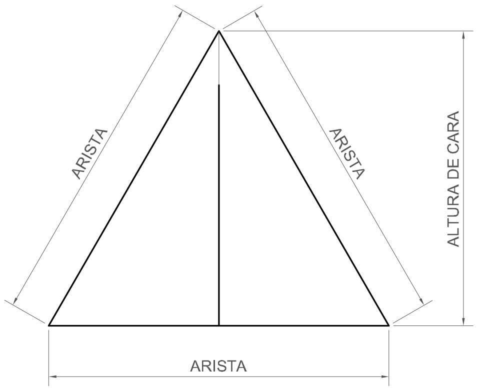
- Dos aristas opuesta son paralelas y equidistantes una distancia de valor la arista.
- Dos caras opuestas son paralelas, giradas entre sí 180º con respecto de sus centros y equidistantes la distancia entre caras opuestas.
- Las tres diagonales del poliedro definen un triedro trirectángulo.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

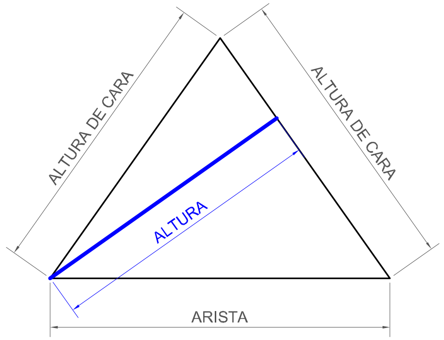
Como ya hemos comentado, en las secciones principales de los poliedros regulars están reflejados todos los elementos factibles de definir la magnitud del mismo y para poder trazarla, el elemento básico es el valor de las aristas del poliedro.
Vamos en este apartado a representar las secciones principales a partir de algún dato que no fuese el valor de la arista.

SECCIÓN PRINCIPAL DE UN TETRAEDRO CONOCIDA SU ALTURA:.

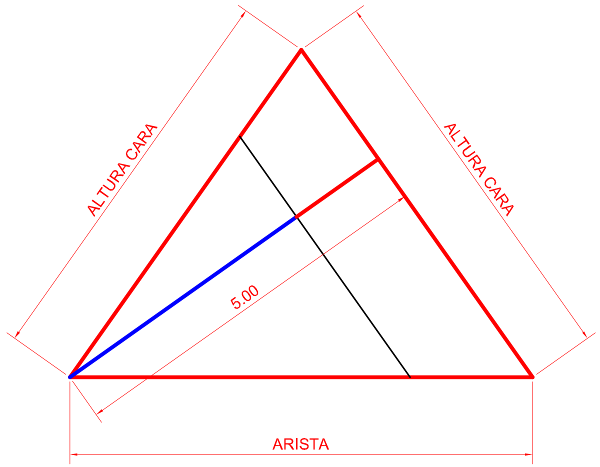
En este ejemplo, vamos a dibujar la sección principal que le corresponde a un tetraedro de **5.00 cm de altura**.



1º.- Dibujamos la cara de un tetraedro de **arista genérica** y hallamos los elementos para dibujar la sección principal correspondiente a este (arista dato y altura de cara).



2º.- Dibujamos la sección principal corrrespondiente a la arista genérica y sobre ella dibujamos el dato del ejemplo, en nuestro caso la **altura del tetraedro**.



3º.- Recortamos o **prolongamos** como es nuestro caso, la altura hasta hacerla coincidir con el valor real y por **semejanza** hallamos la **sección principal** corrrespondiente a un tetraedro de altura conocida.

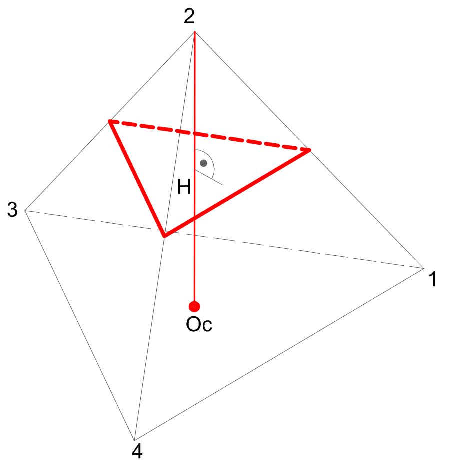
Este proceso desarrollado para un dato la altura de un tetraedro, es similar para cualquier elemento del poliedro así cómo para el trazado de secciones principales de cualquier poliedro a partir de datos diferentes a su arista.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

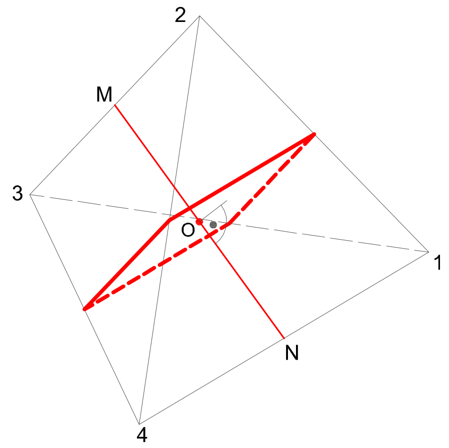
Además de las secciones principales, en los poliedros regulares convexos nos podemos encontrar otras secciones que denominaremos características y que nos permiten definir la magnitud del poliedro y determinar su posición en el espacio.

TETRAEDRO:

TRIÁNGULO EQUILÁTERO: Son las producidas por planos perpendiculares a las alturas del Tetraedro y por lo tanto paralelos a las caras del mismo.

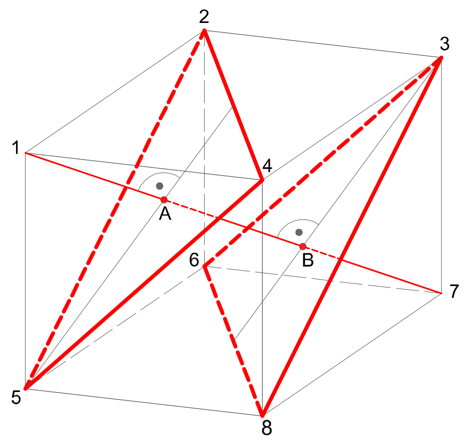


CUADRADO: Planos perpendiculares a la distancia entre aristas opuestas por el punto medio de esta (Centro Geométrico).
Los vértices del cuadrado sección son puntos medios de aristas.

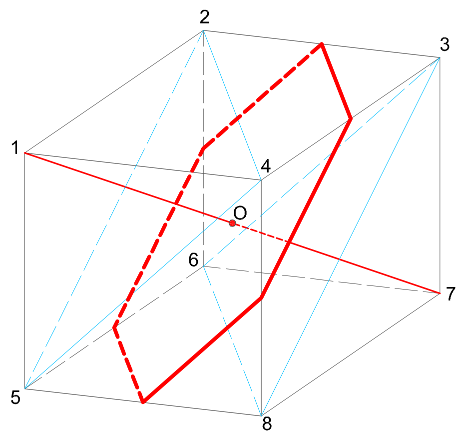


HEXAEDRO:

TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS: Planos perpendiculares a una Diagonal del Hexaedro por los puntos a 1/3 y 2/3 de la misma. Los vértices de los triángulos sección, coinciden con vértices del Poliedro.

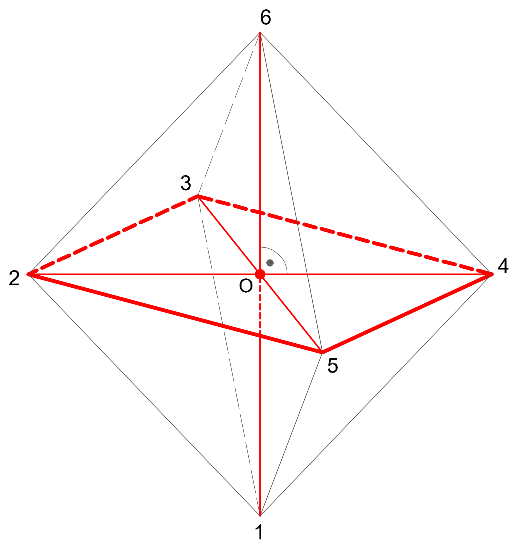


HEXÁGONO REGULAR: Planos perpendiculares a una Diagonal del Poliedro por el punto medio de esta. Los lados del hexágono son paralelos a los de los triángulos equiláteros y los vértices, puntos medios de aristas.

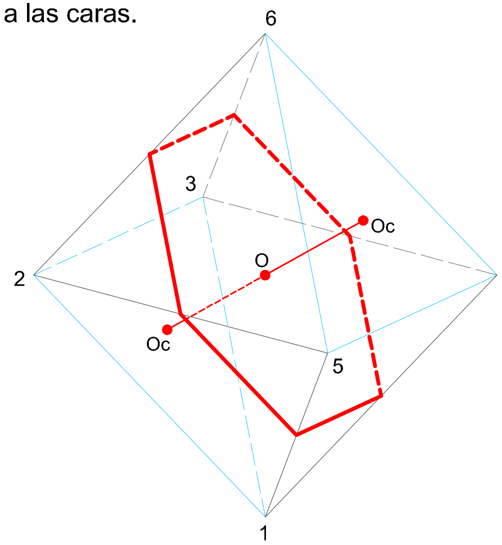


OCTAEDRO:

SECCIÓN MERIDIANA: Planos perpendiculares a una Diagonal del Octaedro por el punto medio de la misma. La sección es el **cuadrado** formado por las aristas no concurrentes en los vértices de la diagonal.



HEXÁGONO REGULAR: Planos paralelos a dos caras opuestas por el centro geométrico del Octaedro. Dos lados no consecutivos del hexágono son paralelos a los lados de las caras, siendo los vértices del mismo los puntos medios de las aristas no pertenecientes a las caras.

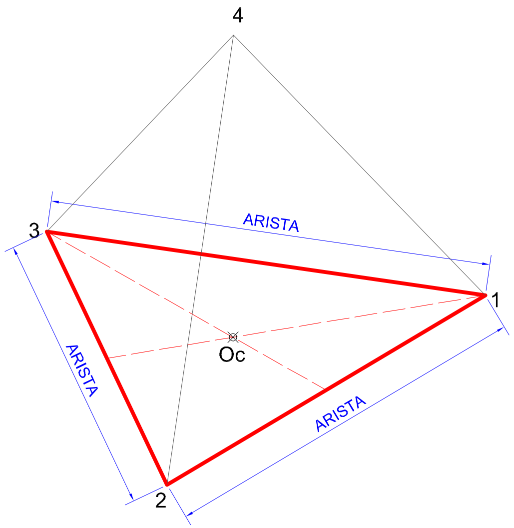


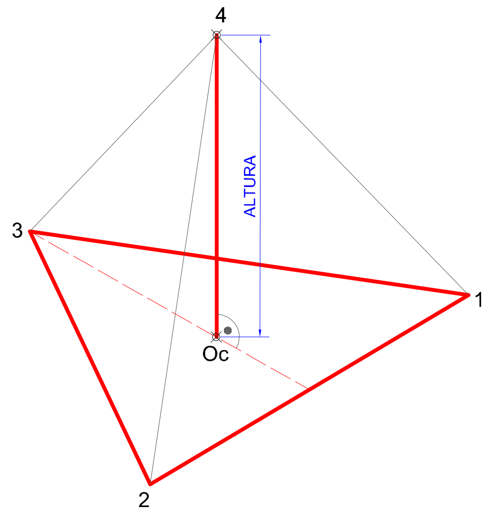
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

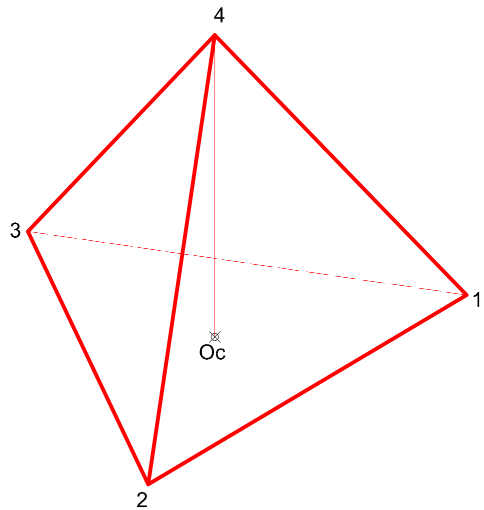
Teniendo en cuenta que por definición un **poliedro regular** es un cuerpo geométrico en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que conocemos las características de sus elementos, los ejercicios de trazados se limitan al buen conocimiento de la geometría del poliedro y a las aplicaciones estudiadas en los conceptos basicos de los **fundamentos del sistema diédrico**.

Vamos a continuación a enumerar de forma espacial los pasos necesarios para el trazado de poliedros en sus posiciones más comunes.

- **TRAZADO DEL TETRAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS CARAS:**







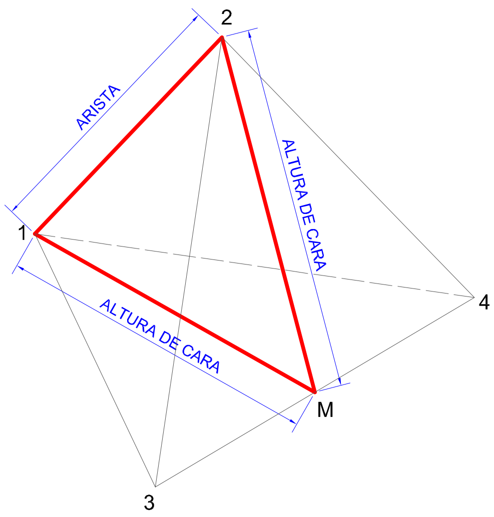
PASO 1.
Construir un triángulo equilátero (**1-2-3**) de lados la arista en la posición pedida y hallar su centro geométrico (**Oc**).

PASO 2.
Trazar desde (**Oc**) una recta perpendicular al plano del triángulo y llevar sobre ella la altura del poliedro (**Oc-4**).

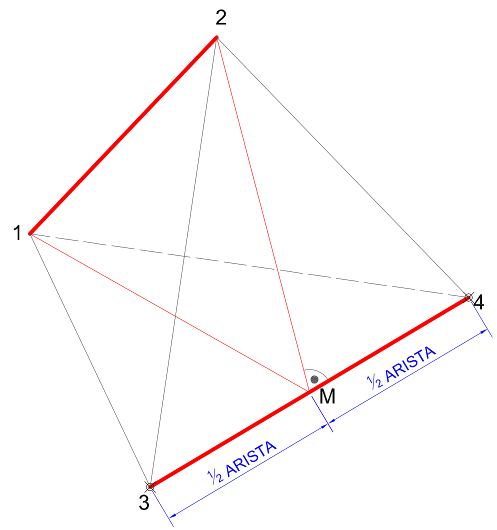
PASO 3.
Unir este punto (**4**) con los vértices de la cara dada.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

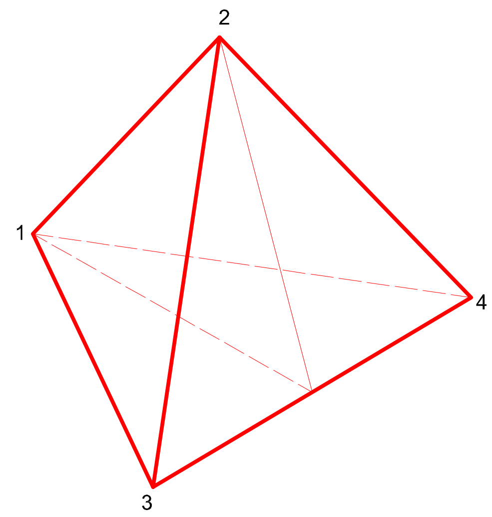
- **TRAZADO DEL TETRAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS SECCIONES PRINCIPALES:**



PASO 1.
Construir un triángulo isósceles (**1-2-M**) de lados arista y alturas de cara en la posición pedida.



PASO 2.
Trazar desde (**M**) una recta perpendicular al plano del triángulo y llevar sobre ella la mitad del valor la arista a cada lado de (**M**), puntos (**3** y **4**).

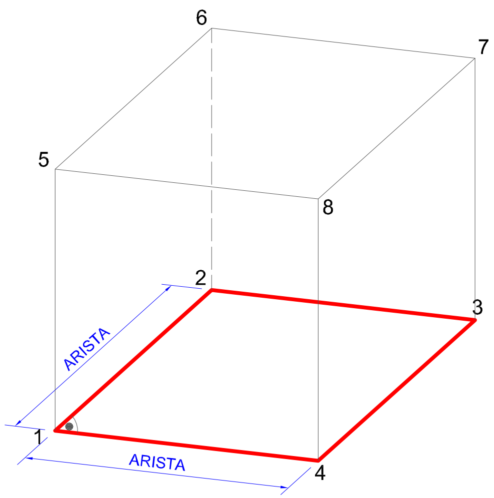


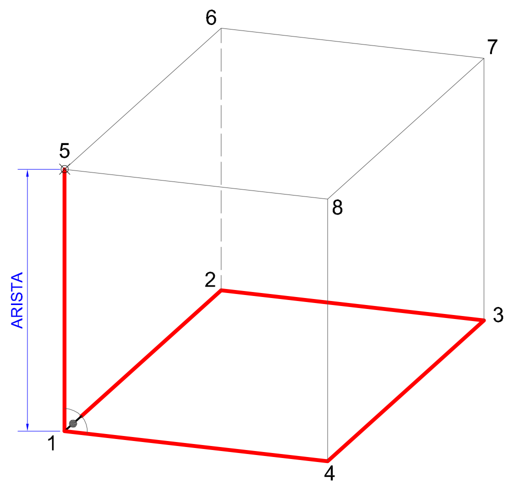
PASO 3.
Unir estos puntos (**3** y **4**) con los vértices (**1** y **2**) de la arista dato.

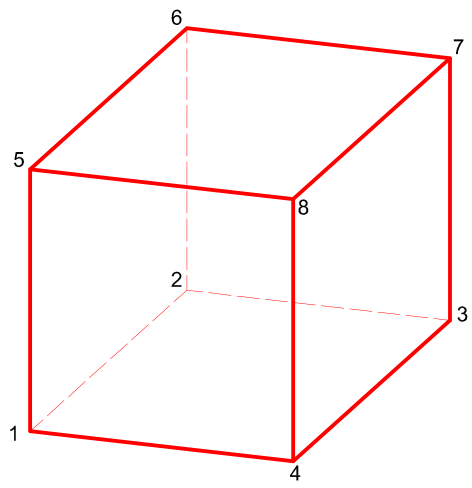
- Los pasos desarrollados en este caso, nos pueden servir de guia para el **TRAZADO DEL TETRAEDRO A PARTIR DE DOS ARISTAS OPUESTAS.**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- **TRAZADO DEL HEXAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS CARAS:**





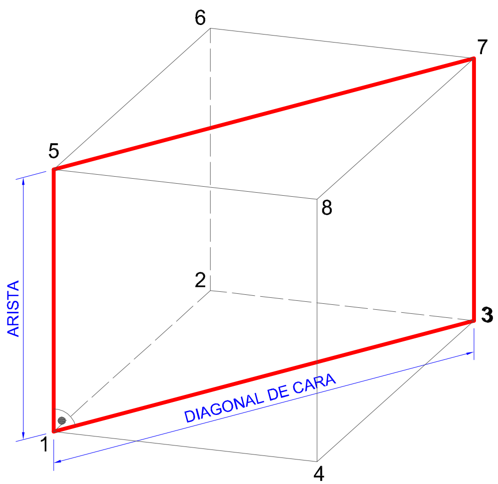


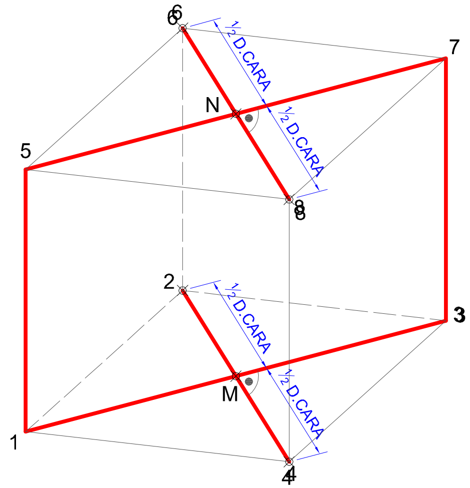
PASO 1.
Construir un cuadrado (**1-2-3-4**) de lados arista en la posición pedida.

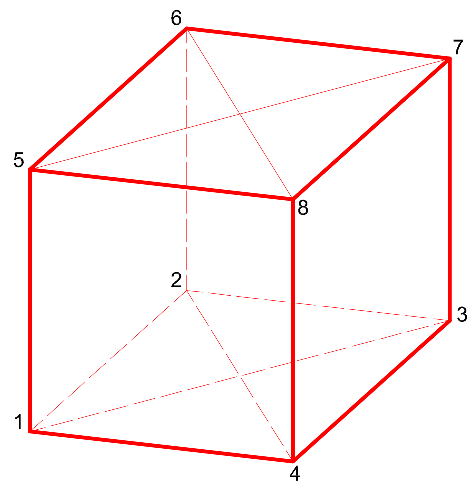
PASO 2.
Trazar desde uno de los vértices (**1**) del cuadrado una recta perpendicular al plano del mismo y llevar sobre ella la arista (**1-5**).

PASO 3.
Tomando como referencia este último punto (**5**), construir la cara (**5-6-7-8**), opuesta a la dada sabiendo que ambas son paralelas.

- **TRAZADO DEL HEXAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS SECCIONES PRINCIPALES:**







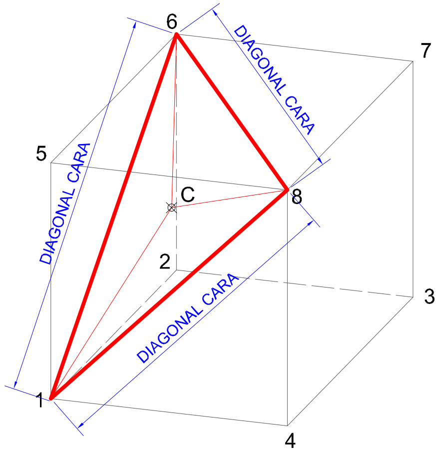
PASO 1.
Construir un rectángulo (**1-5-7-3**) de lados arista y diagonal de cara en la posición pedida.

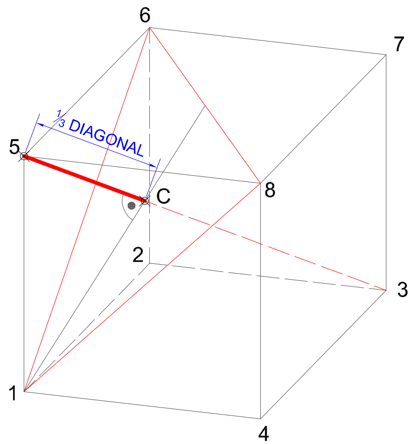
PASO 2.
Trazar desde los puntos medios (**M** y **N**) de los lados (**1-3**) y (**5-7**) diagonal de cara, rectas perpendiculares al plano del cuadrado y llevar sobre ella y a cada lado, la mitad del valor de la diagonal de cara encontrando de este modo los vértices (**2**, **4**, **6** y **8**).

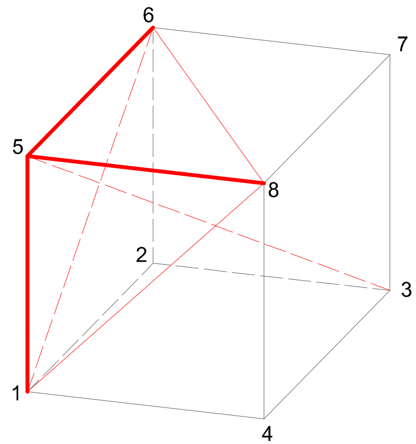
PASO 3.
Completar la construcción teniendo en cuenta que los extremos de las diagonales de cara que se cortan (**1-2-3-4**) y (**5-6-7-8**), son vértices de dos caras opuestas.

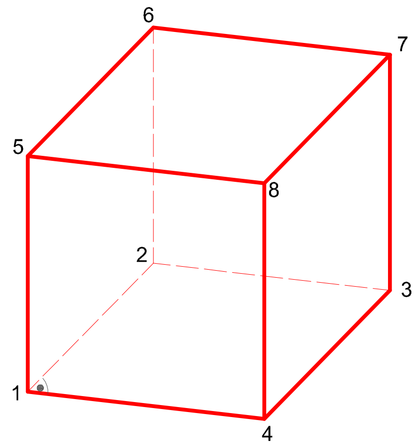
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- **TRAZADO DEL HEXAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS SECCIONES TRIÁNGULO EQUILÁTERO DE LADO DIAGONAL DE CARA:**









PASO 1.
Construir un triángulo equilátero (**1-6-8**) de lados diagonal de cara en la posición pedida y hallar su centro geométrico (**C**).

PASO 2.
Desde (**C**), trazar una recta perpendicular al plano del triángulo y trasladar sobre ella y a partir de (**C**), un tercio del valor de la diagonal del poliedro (**C-5**).

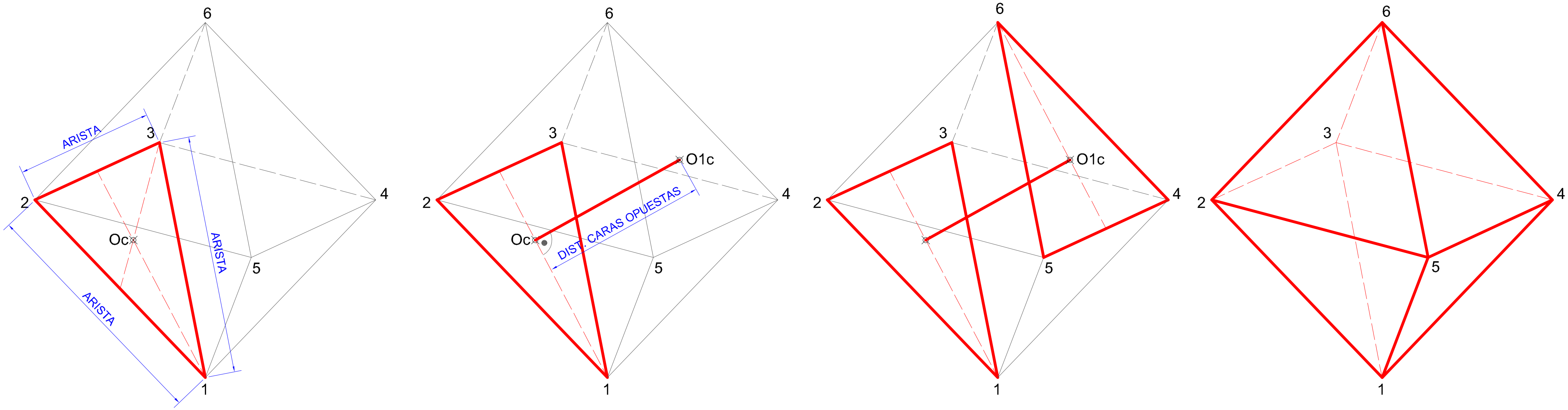
PASO 3.
Al unir este punto (**5**) con los vértices (**1-6-8**) del triángulo, queda definido el triedro trirectángulo por tres aristas (**5-1**, **5-6** y **5-8**) que concurren en un vértice.

PASO 4.
Completar el trazado teniendo en cuenta que cada dos aristas del triedro, definen una de las caras del poliedro.

- Los pasos desarrollados en este caso, nos pueden servir de guia para el **TRAZADO DEL HEXAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS DIAGONALES.**

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- **TRAZADO DEL OCTAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS CARAS:**



PASO 1.
Construir un triángulo equilátero (**1-2-3**) de lados arista en la posición pedida y hallar su centro geométrico (**Oc**).

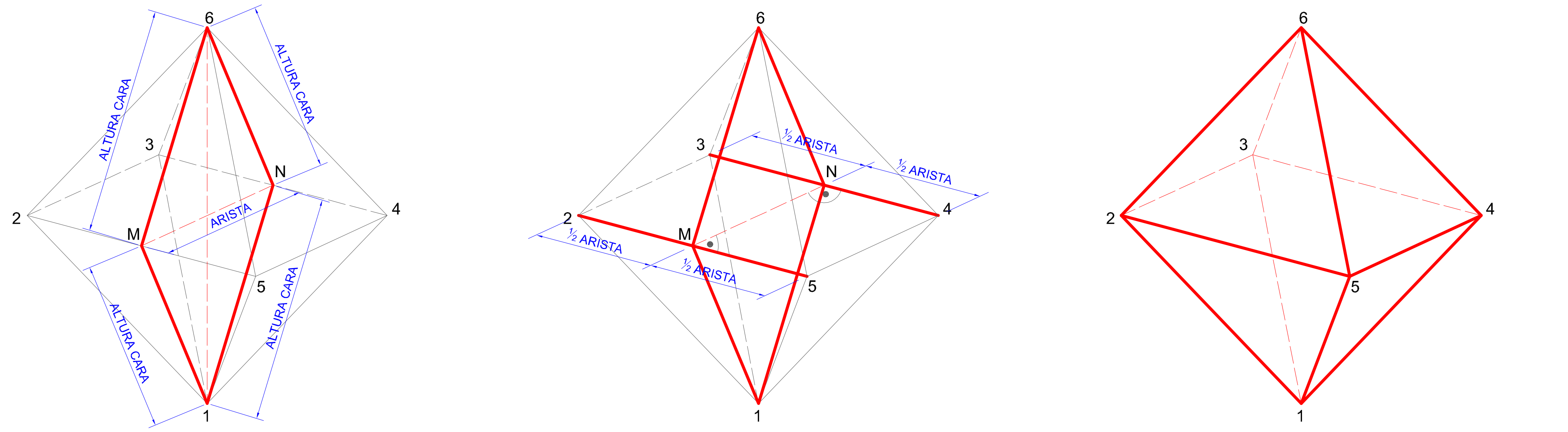
PASO 2.
Desde **Oc**, trazar una perpendicular al plano de la cara dada y trasladar sobre esta el valor de la distancia entre caras opuestas (**Oc-O1c**), encontrando el centro geométrico (**O1c**) de la cara opuesta.

PASO 3.
Tomando como referencia este úlimo centro, construir otro triángulo (**4-5-6**) de lados arista, paralelo al anterior y girado 180º. siendo este triángulo la cara opuesta a la dada.

PASO 4.
Completar el trazado teniendo en cuenta que con los pasos anteriores, quedan definidos todos los vértices.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- **TRAZADO DEL OCTAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS SECCIONES PRINCIPALES.**



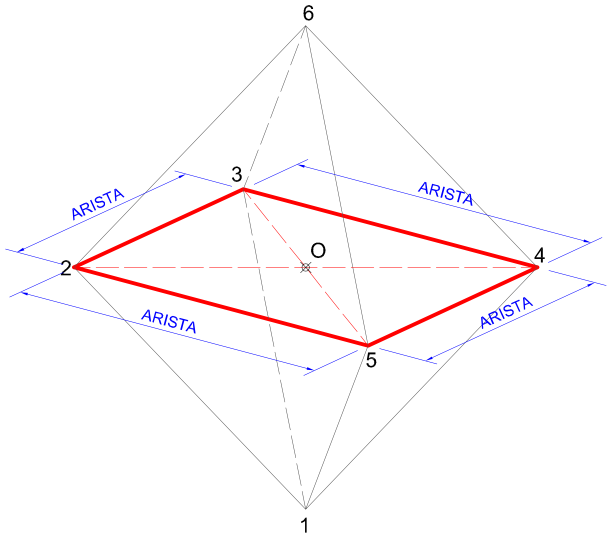
PASO 1.
Construir en la posición pedida un rombo (**1-M-6-N**) de lados alturas de cara y diagonal menor arista.

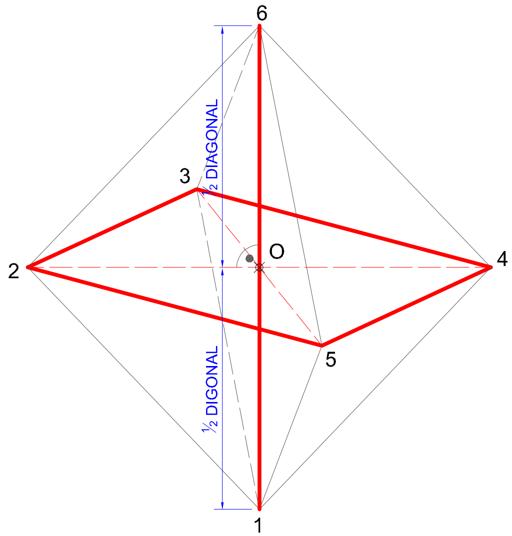
PASO 2.
Trazar desde los extremos (**M** y **N**) de la diagonal menor, rectas perpendiculares al plano del rombo y llevar sobre ellas y a cada lado, la mitad del valor de la arista, definiendo una sección meridiana (**2-3-4-5**) y por consiguiente cuatro aristas.

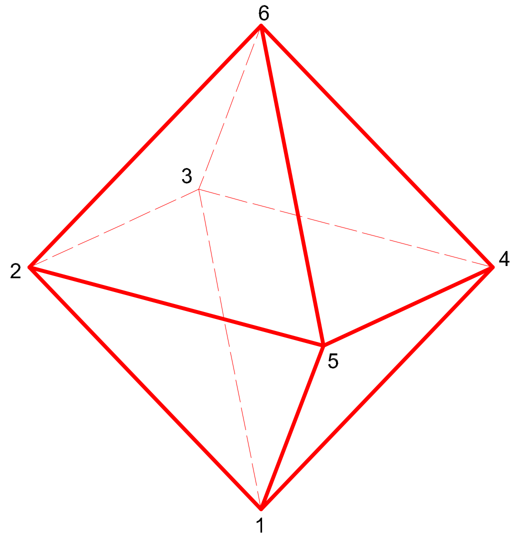
PASO 3.
Completar la construcción uniendo los extremos de la diagonal mayor (**1** y **6**) de la sección principal con los vértices (**2**, **3**, **4** y **5**)de la sección meridiana.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- **TRAZADO DEL OCTAEDRO A PARTIR DE UNA SECCIÓN MERIDIANA.**







PASO 1.
Construir un cuadrado (**2-3-4-5**) de lados aristas en la posición pedida y hallar su centro (**O**).

PASO 2.
Trazar desde (**O**) una recta perpendicular al plano del cuadrado y llevar sobre ella y a cada lado, la mitad del valor de la diagonal del octaedro y cuyo valor es conocido ya que coincide con las diagonales del cuadrado sección meridiana, encontrando los vértices (**1** y **6**)

PASO 3.
Completar la construcción uniendo los extremos de la diagonal trazada con los vértices de la sección meridiana.

- Los pasos desarrollados en este caso, nos pueden servir de guia para el **TRAZADO DEL OCTAEDRO A PARTIR DE UNA DE SUS DIAGONALES.**

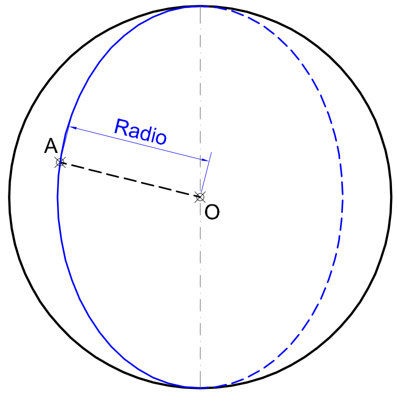
ESFERA. CONCEPTOS BÁSICOS

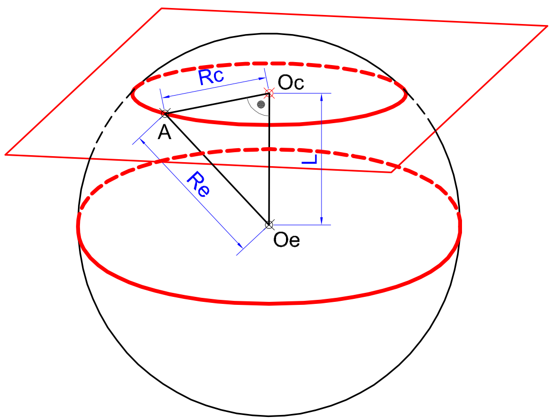
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- La esfera (**superficie esférica**) es el conjunto de los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo denominado centro; el segmento que une un punto de la superficie esférica con el centro (**OA**) se denomina radio. En este caso se genera al rotar una **semicircunferencia,** usando como eje de rotación uno de sus diámetros.

- La esfera (**sólido esférico**) es el conjunto de puntos del espacio que están, respecto del centro, a una distancia igual o menor que la longitud de su radio. Se genera al rotar un **semicírculo**, teniendo como eje de rotación uno de sus diámetros.

- Una esfera queda definida conocidos su **centro** y su **radio**.

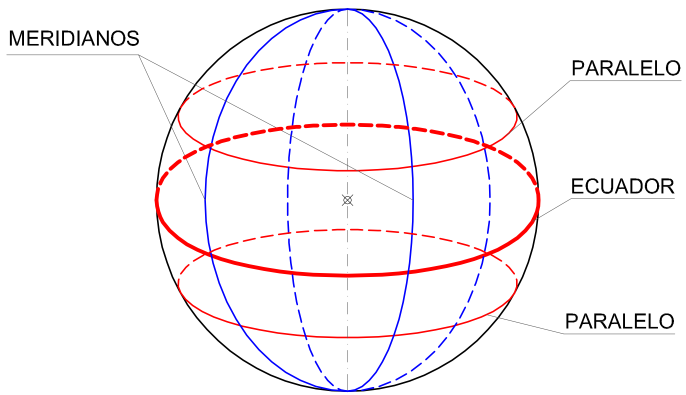




- Todo plano secciona a la superficie esférica según una **circunferencia** cuyo centro (**Oc**) se encuentra en el punto de intersección con el plano de la perpendicular trazada desde el centro de la esfera (**Oe**).

- El **radio** de la circunferencia sección se puede calcular como cateto (**Oc-A**) de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa (**Oe-A**) es el radio de la esfera y el otro cateto (**Oe-Oc**) la distancia entre centros.

- Todo plano que pase por el centro de la esfera, secciona a la superficie esférica según una **circunferencia máxima** de centro (**Oe**) el centro de la esfera y radio el radio de la misma.

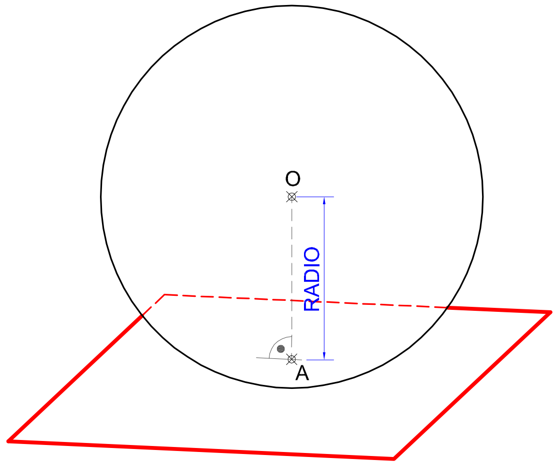


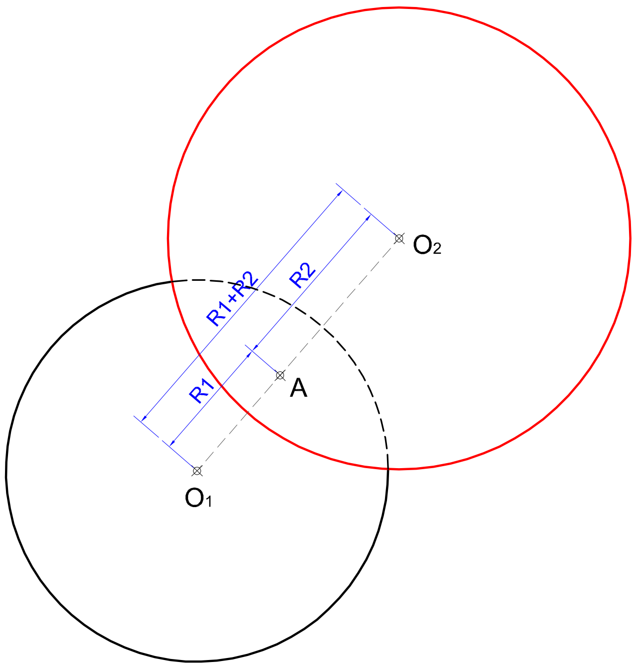
- Las secciones producidas por planos horizontales se denominan **paralelos**, siendo la sección horizontal que pasa por el centro de la esfera el **ecuador**.

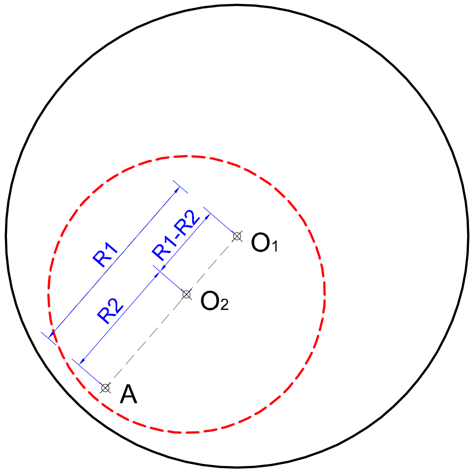
- Las secciones producidas por planos que contienen a un diámetro vertical de la esfera, se denominan **meridianos**, siendo estos circunferencias máximas.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Todo **plano tangente** a una esfera es perpendicular a uno de sus radios, siendo el punto (**A**) de tangencia el extremo del mismo.







- Si dos esferas de radios (**R1**) y (**R2**) son **tangentes** entre sí, la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios en el caso de **tangencia exterior** y a la diferencia de radios en el caso de **tangencia interior**, encontrándose el punto (**A**) de tangencia en la recta que une sus centros y a una distancia de cada centro igual al radio correspondiente.

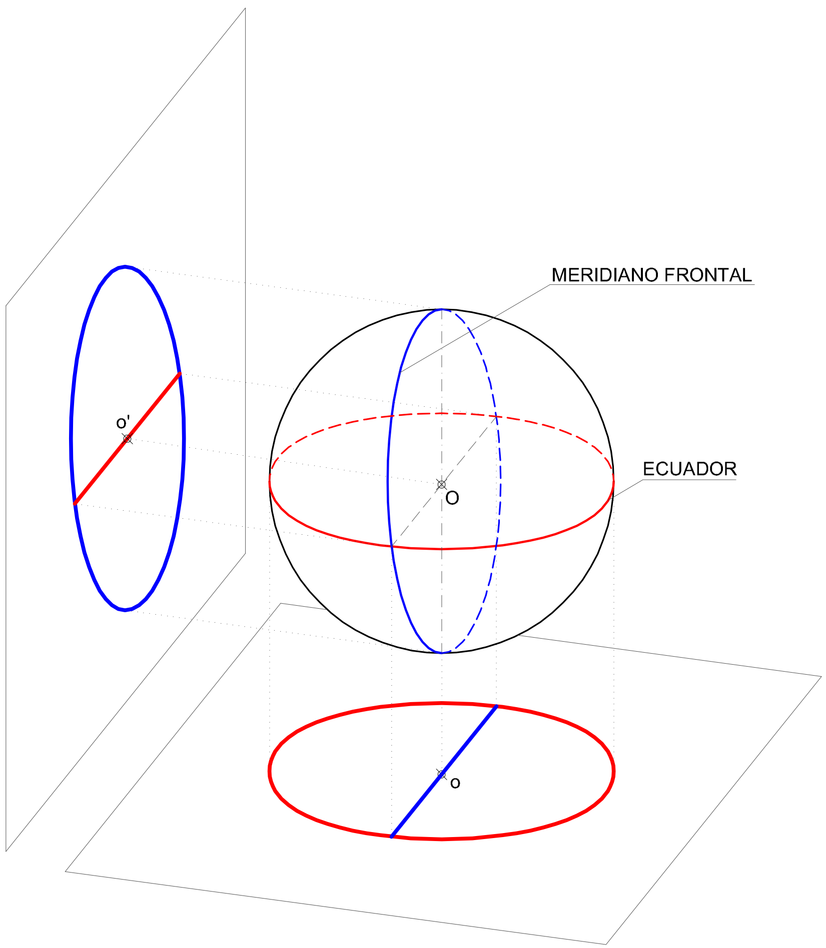
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

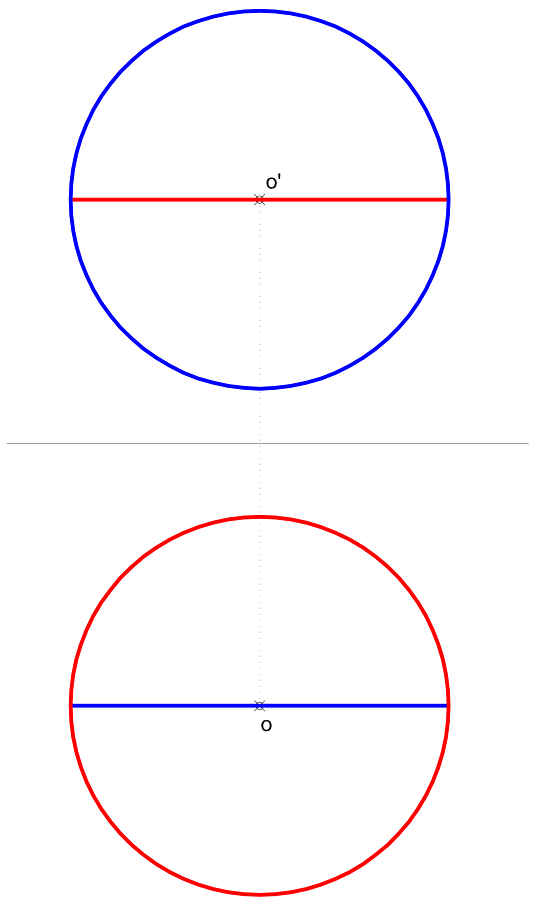
- ***REPRESENTACIÓN DE LA ESFERA EN SISTEMA DIÉDRICO.***

En el sistema diédrico la esfera se representa por sus contornos aparentes sobre los planos de proyección, siendo estos:

- ***Contorno aparente horizontal***: Circunferencia de centro la proyección horizontal del centro de la esfera y radio el de la esfera. Esta circunferencia se correspondería con la proyección del ecuador, siendo su proyección vertical un segmento horizontal de longitud el diámetro.

- ***Contorno aparente vertical***: Circunferencia de centro la proyección vertical del centro de la esfera y radio el de la esfera. Esta circunferencia se corresponde con la proyección de un meridiano frontal, siendo su proyección horizontal un segmento frontal de longitud el diámetro.

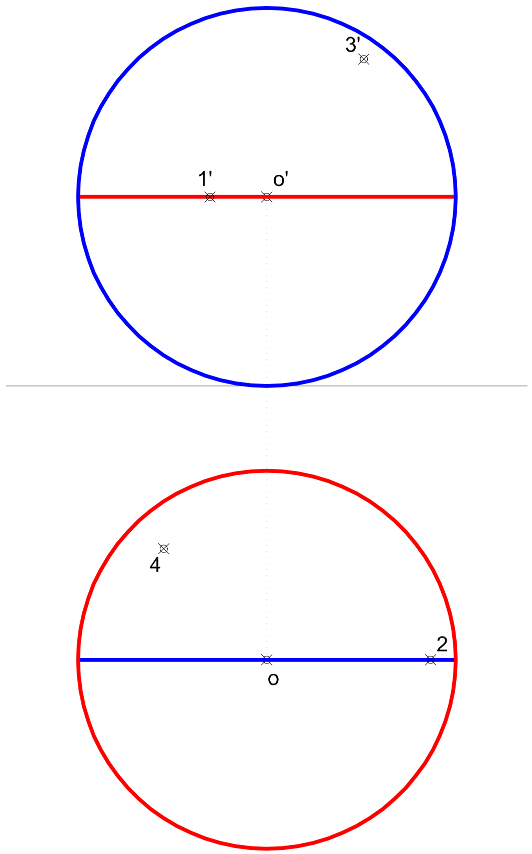




• *REPRESENTACIÓN DE PUNTOS DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA.*

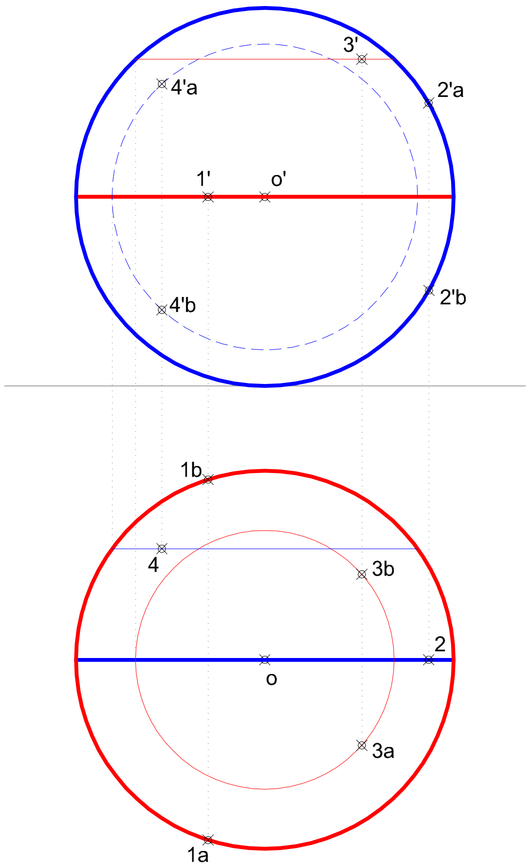
Teniendo en cuenta que como ya hemos comentado, todo plano secciona a la superficie esférica según circunferencias de centro y radio conocidos, el procedimiento para situar puntos en ella será mediante secciones planas en posiciones favorables, siendo estas

- ***Planos horizontales*** (La sección circunferencia se proyecta en verdadera magnitud en el P.H. y según un segmento en el P.V.
- ***Planos frontales*** (La sección circunferencia se proyecta en verdadera magnitud en el P.V. y según un segmento en el P.H.
- Los puntos situados tanto en el ***ecuador***, como en el ***meridiano frontal*****,** se encuentran sobre los contornos aparentes**.**



DATOS

Completar las proyecciones de los puntos 1, 2, 3 y 4.



SOLUCIÓN

Como se puede observar en la figura y como característica general, a cada punto le corresponden dos proyecciones y que el ecuador y el meridiano frontal dividen a la esfera en cuatro hemisferios, vamos en la tabla siguiente a indicar la visibilidad de cada punto teniendo en cuenta que:

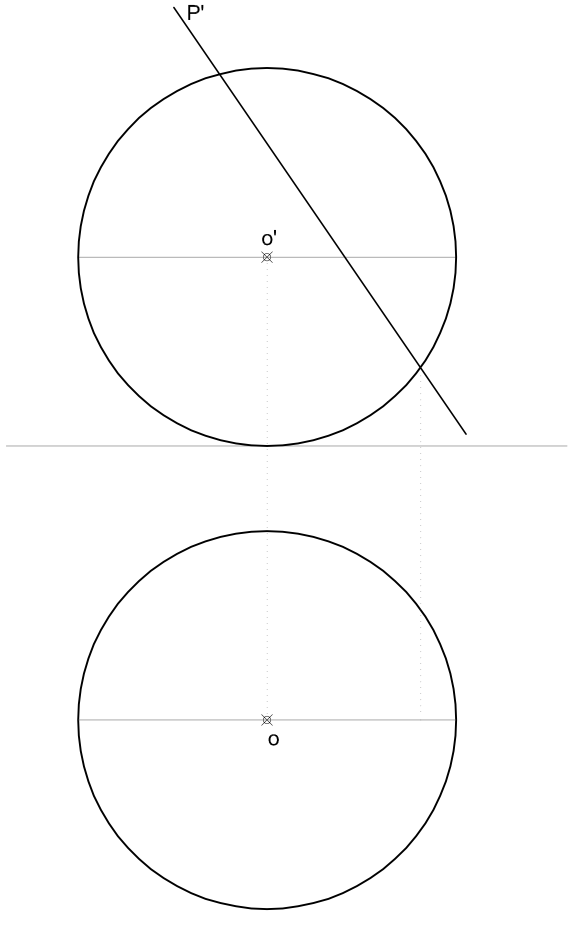
- En **proyección horizontal** es visto todo lo que esté situado por encima del ecuador.
- En **proyección vertical**, es visto todo lo que esté situado por delante del meridiano frontal.

PUNTO	PLANO AUXILIAR	SOLUCIÓN	VISIBILIDAD	
			P.H.	P.V.
1	ECUADOR	1a	VISTO	VISTO
		1b	VISTO	OCULTO
2	MERIDIANO FRONTAL	2a	VISTO	VISTO
		2b	OCULTO	VISTO
3	HORIZONTAL	3a	VISTO	VISTO
		3b	VISTO	OCULTO
4	FRONTAL	4a	VISTO	OCULTO
		4b	OCULTO	OCULTO

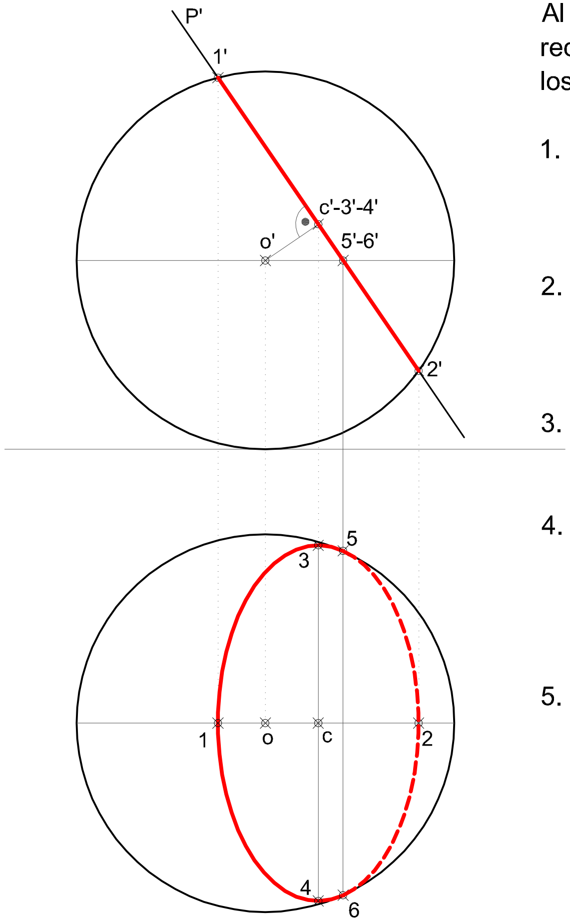
• *SECCIONES PLANAS DE LA ESFERA.*

Como todo plano secciona a la superficie esférica según circunferencias de centro y radio conocidos, los trazados de secciones planas se limita a la representación diédrica da la circunferencia citada.

• *SECCIÓN POR UN PLANO PROYECTANTE (P).*



DATOS



SOLUCIÓN

Al ser un plano de canto, la circunferencia sección se ve en P.V. como una recta y cuya magnitud se corresponde con un diámetro, vamos a enumerar los pasos a seguir:

1. Trazar desde (**O**) una recta perpendicular al plano. La intersección de esta recta con el plano es el centro (**C**) de la circunferencia sección.

2. Los puntos (**1** y **2**), definen un eje de la elipse, estando este en posición frontal (verdadera magnitud) y en el plano del meridiano frontal.

3. El eje (**3-4**), perpendicular al anterior está en posición de punta y por tanto en verdadera magnitud en proyección horizontal.

4. Los puntos (**5** y **6**) de contacto de la circunferencia sección con el contorno aparente horizontal de la esfera, están perfectamente definidos en la proyección vertical ya que tanto la circunferencia sección como el ecuador se ven como rectas.

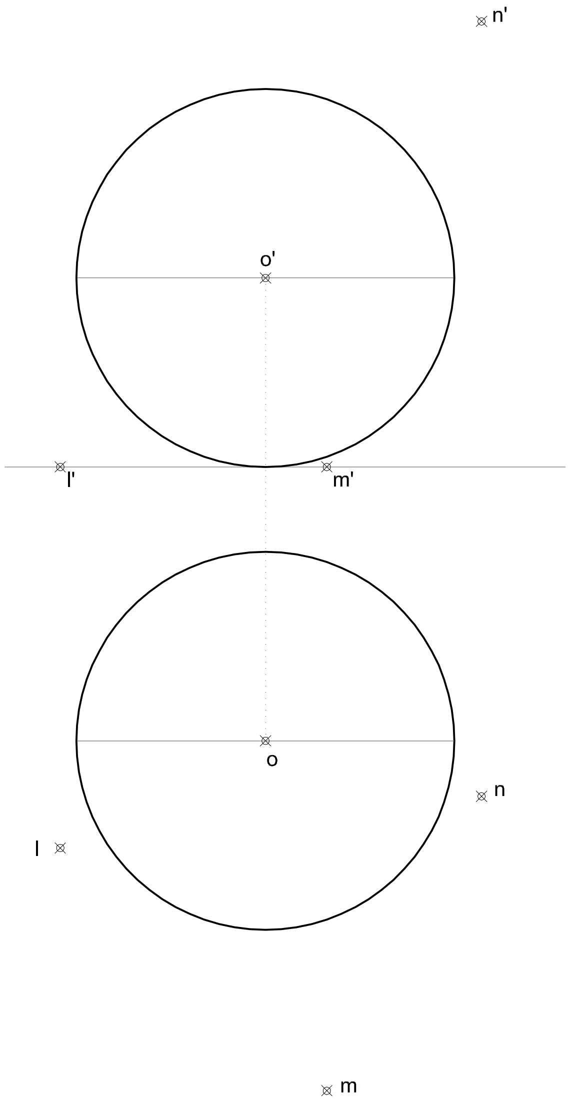
5. Para el estudio de la visibilidad de la proyección horizontal, tenemos en cuenta que es visto todo lo que está situado por encima del ecuador.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

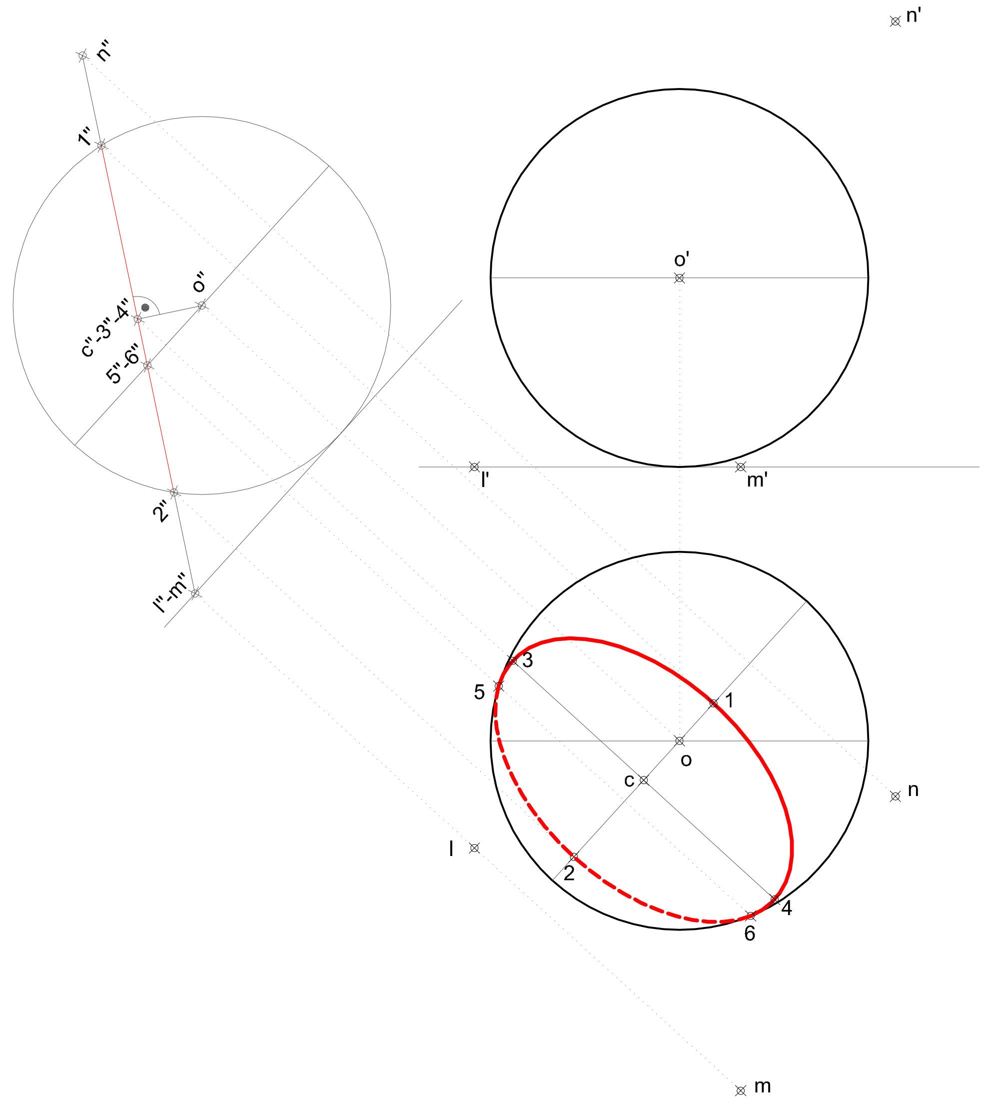
- ***SECCIÓN POR UN PLANO OBLICUO DEFINIDO POR LOS PUNTOS (L, M y N).***

PASO 1.- En estos casos al no estar el plano en una posición favorable lo primero que haremos es la vista auxiliar para poner el plano, en nuestro ejemplo, de **canto** y dibujar la proyección horizontal de la circunferencia sección siguiendo el proceso del ejemplo anterior de plano de canto.

DATOS



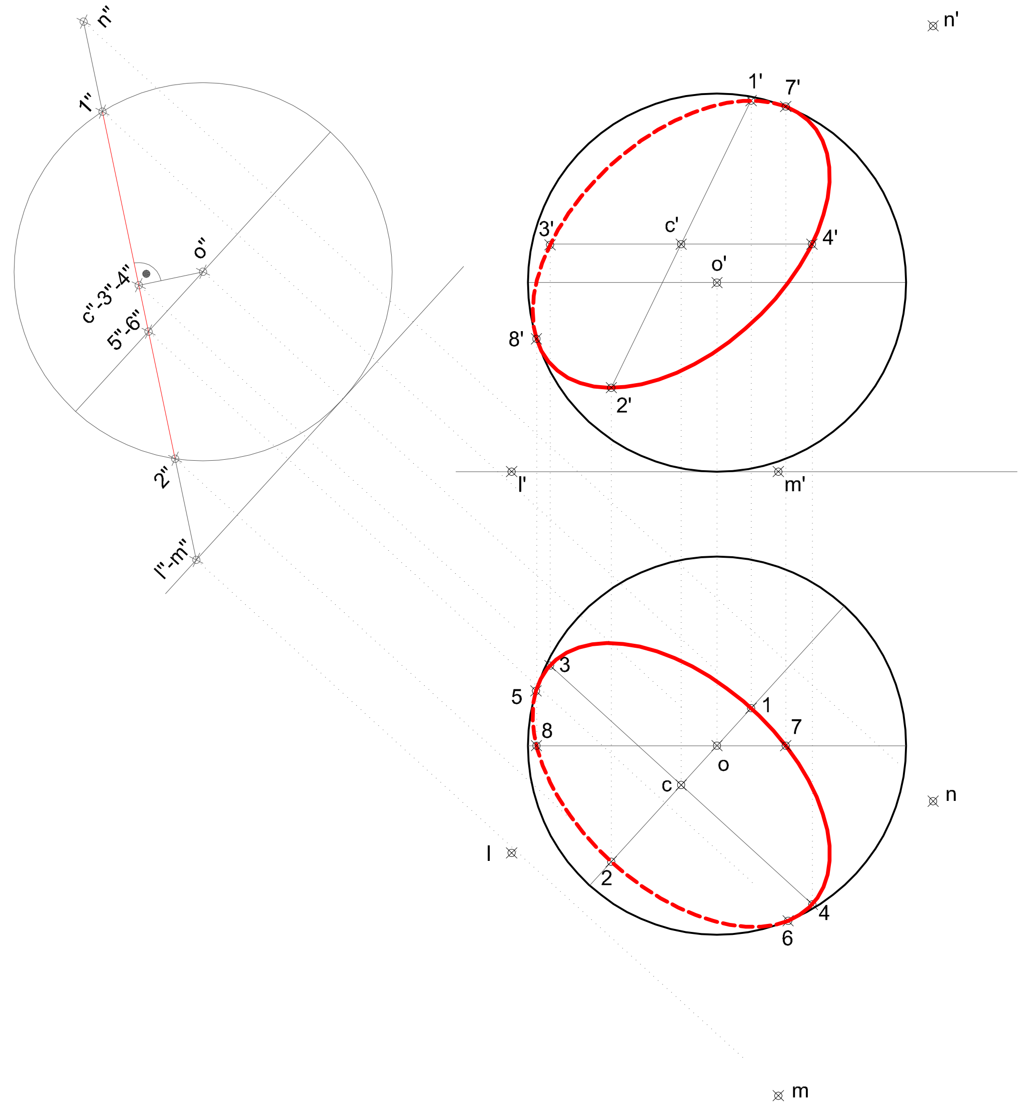
PASO 1.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***SECCIÓN POR UN PLANO OBLICUO.***

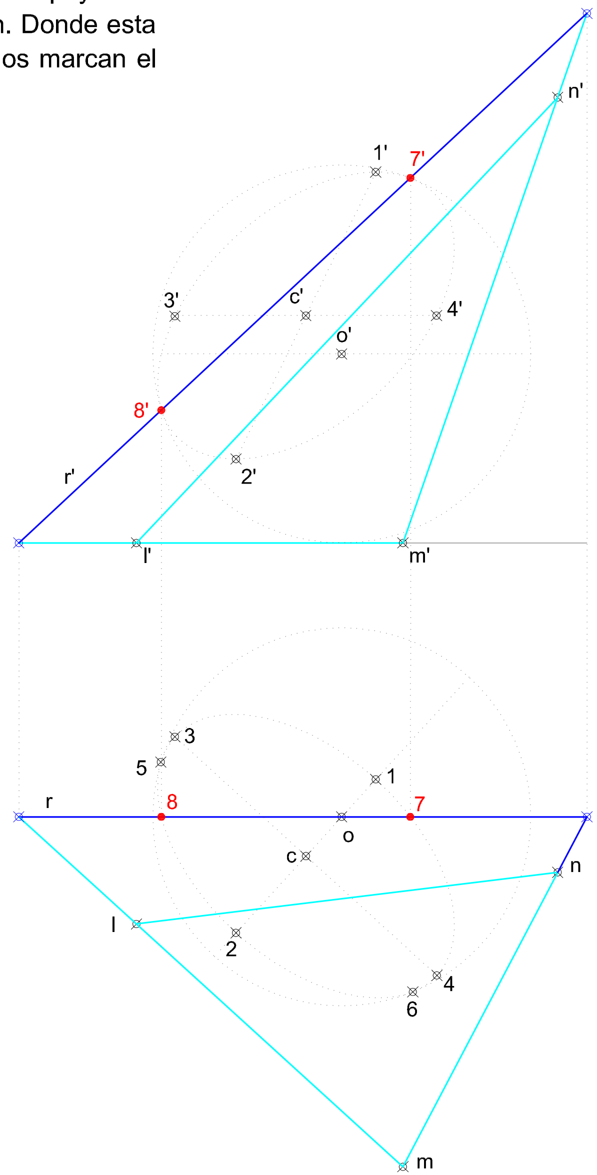
PASO 2.- Una vez dibujada la circunferencia sección en proyección horizontal, pasamos a dibujar la proyección vertical de la misma recordando que las **cotas** de los elementos son las mismas en las dos vistas (vista inicial y vista auxiliar).



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***SECCIÓN POR UN PLANO OBLICUO.***

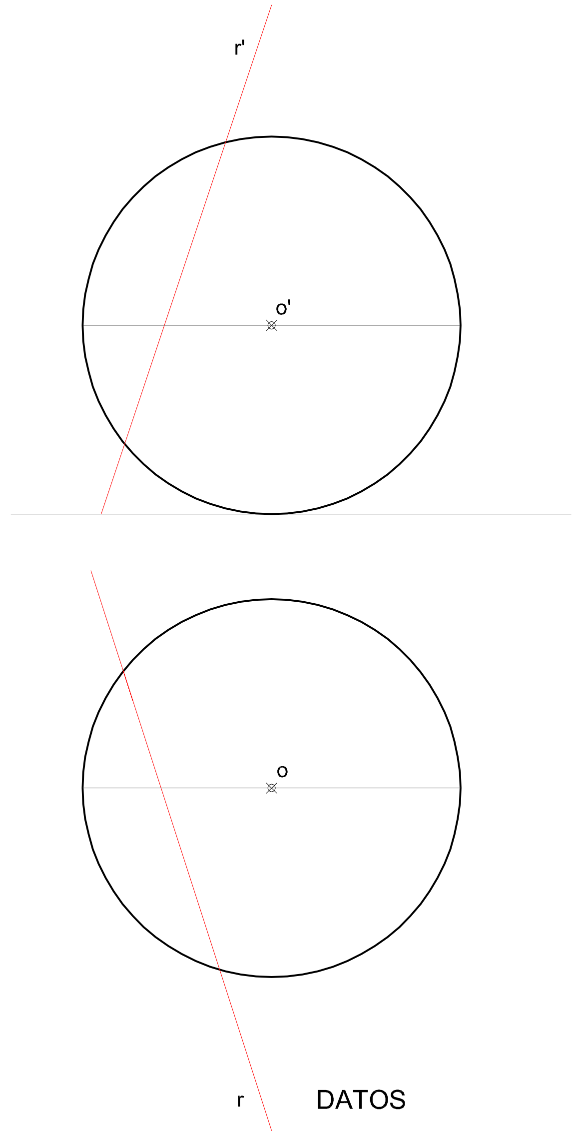
Paso 3.- Para definir con exactitud las proyecciones de los puntos (**7** y **8**) de contacto de la circunferencia sección con el contorno aparente vertical (meridiano frontal) de la esfera, nos apoyamos en la recta (**R**) intersección del plano frontal que contiene al meridiano con el plano sección. Donde esta recta corte al contorno aparente vertical de la esfera se encontrarán estos puntos y que nos marcan el cambio de visibilidad en P.V.



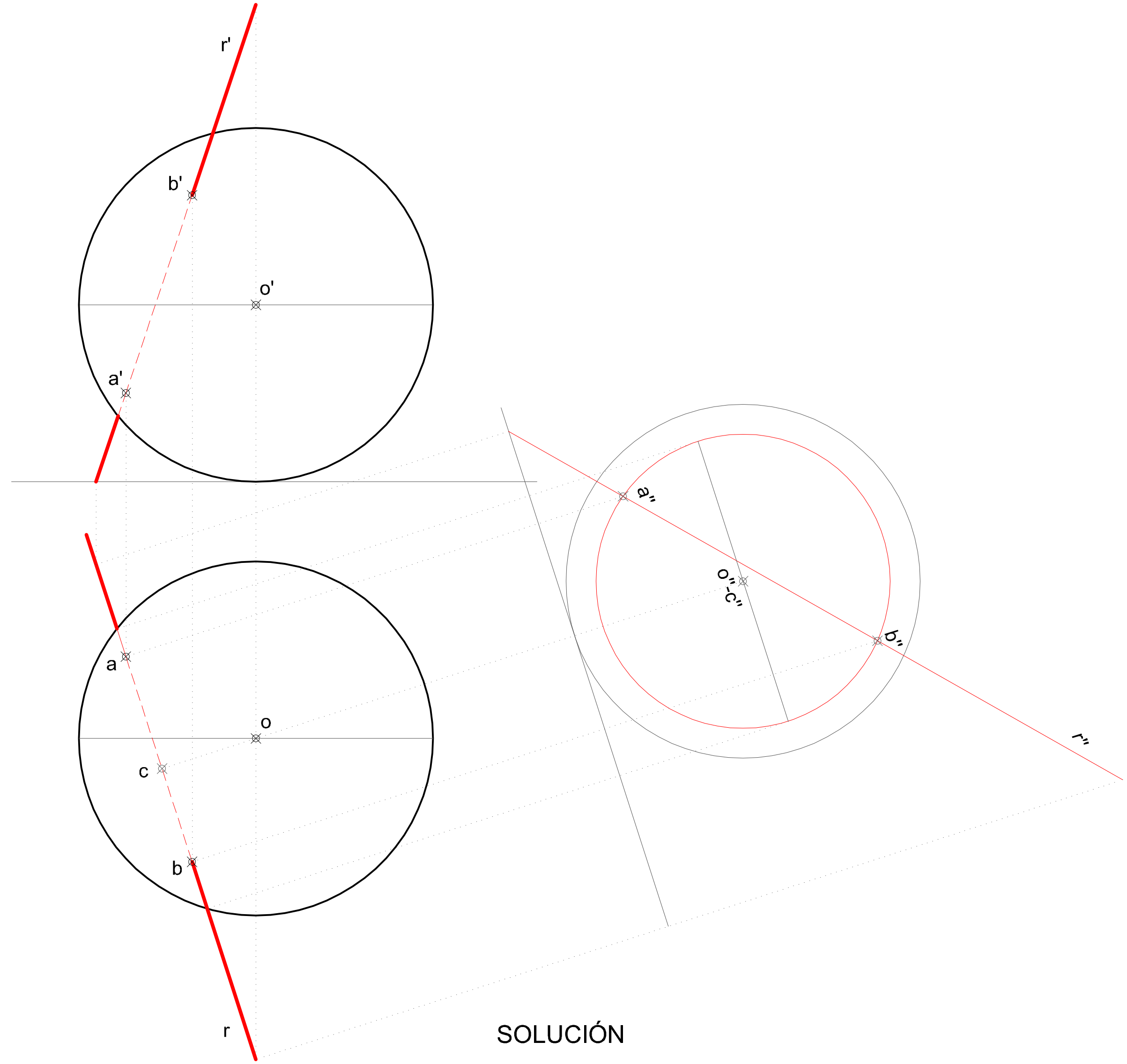
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***INTERSECCIÓN DE RECTA CON ESFERA.***

MÉTODO 1º.- Este método se basa en tomar un plano auxiliar vertical que contenga a la recta y hallar la circunferencia sección del plano con la esfera que es inmediata si nos apoyamos en un cambio de plano colocando el plano frontal. Los puntos (**A** y **B**) comunes de la recta y la circunferencia sección son los puntos buscados.



DATOS

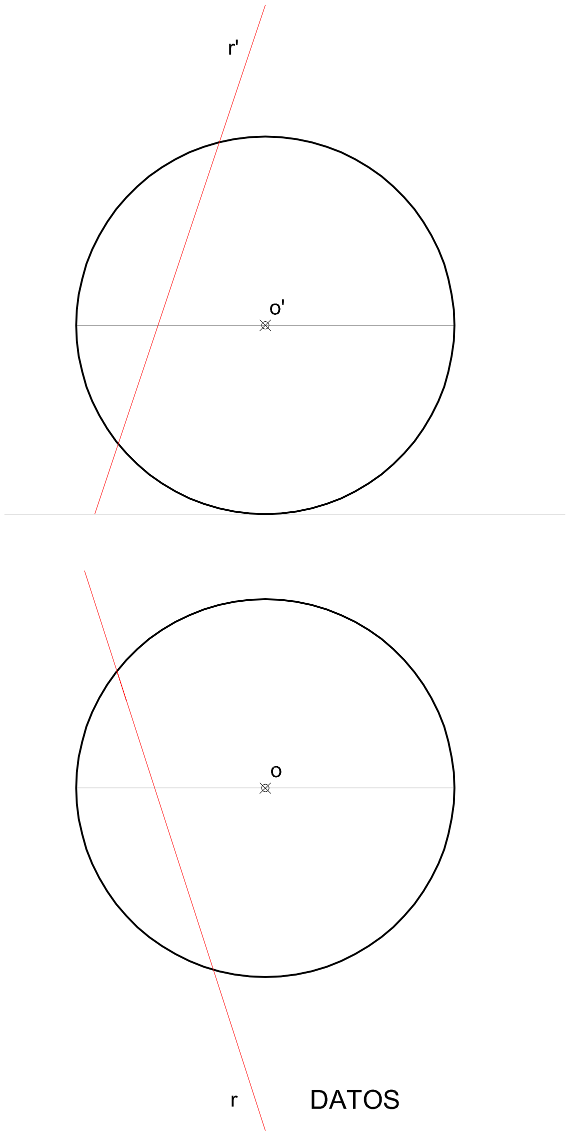


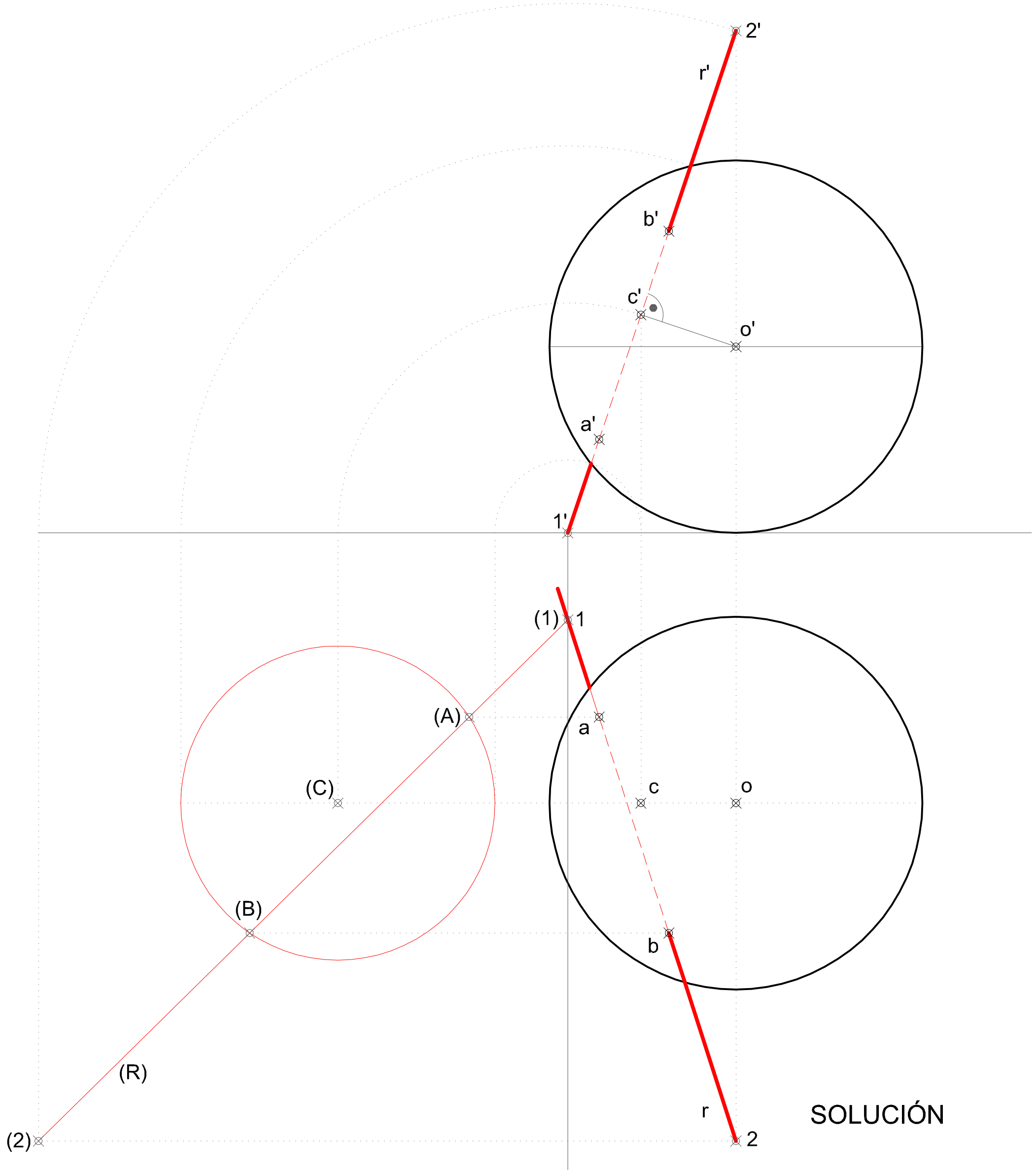
SOLUCIÓN

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***INTERSECCIÓN DE RECTA CON ESFERA.***

MÉTODO 2º.- Este método consiste en tomar un plano auxiliar de canto que contenga a la recta, hallar la circunferencia sección del plano con la esfera, hallando los puntos buscados mediante el abatimiento de la circunferencia sección y de la recta. Una vez resuelto, se trasladan a su proyecciones por pertenencia a la recta.

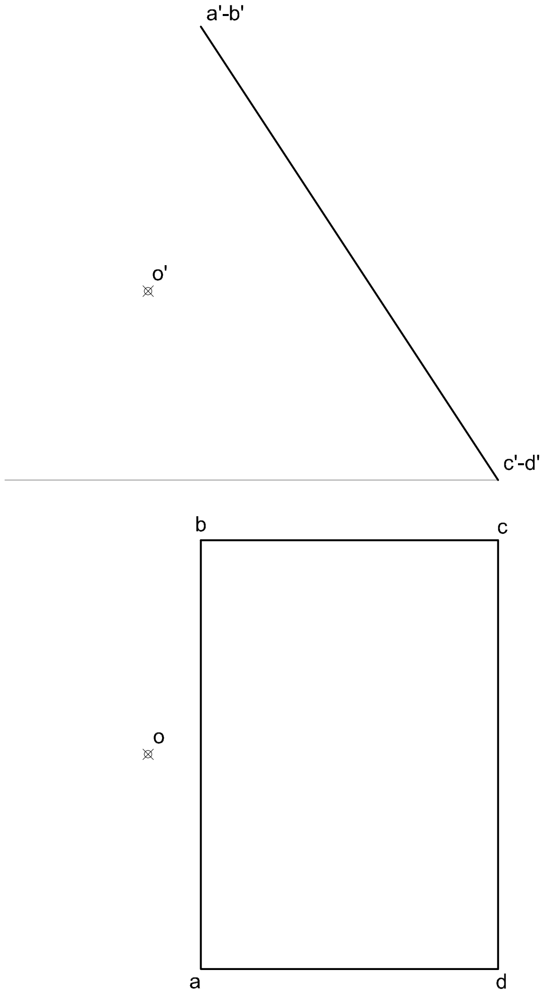




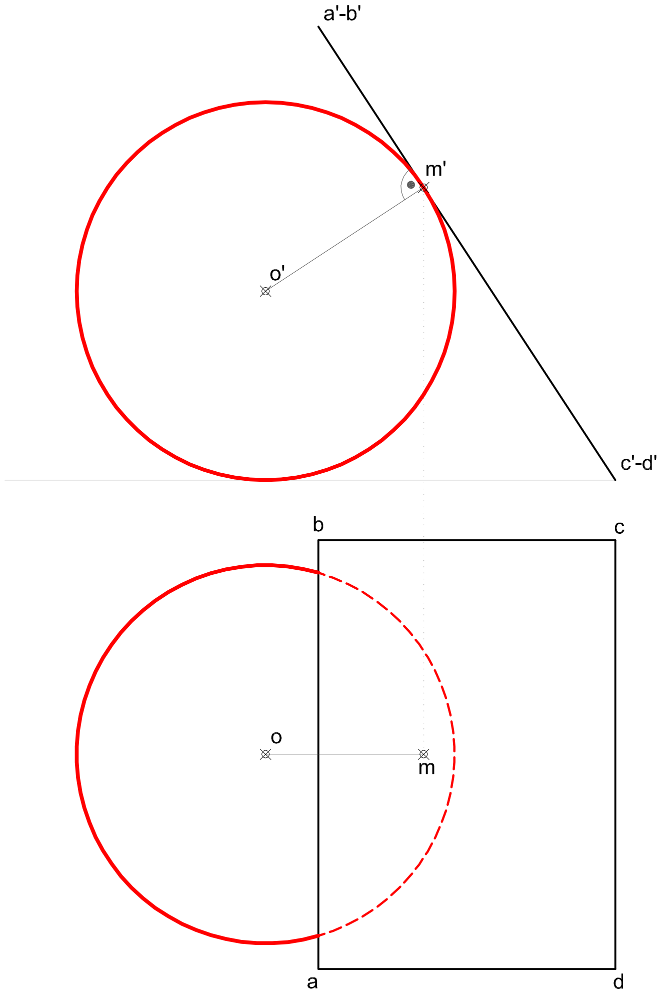
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***TRAZADO DE ESFERA DE CENTRO CONOCIDO Y TANGENTE A UN PLANO DADO (PARALELOGRAMO ABCD).***

Como ya enunciamos en los conceptos básicos***, si un plano es tangente a una esfera es perpendicular a uno de sus radios, siendo el extremo de este el punto de tangencia con la esfera.*** Por tanto, este tipo de ejercicios se reducen generalmente a casos de perpendicularidad y equidistancias.



DATOS



SOLUCIÓN

Pasos a seguir:

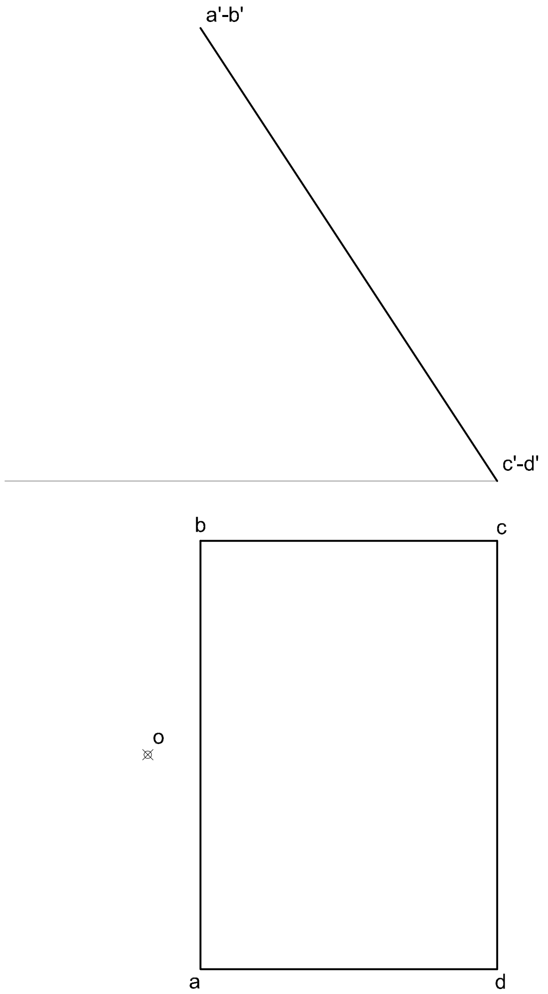
1. Trazar desde (**O**) una recta perpendicular al plano y hallar la intersección (**M**) con él.

2. El segmento (**OM**) es el radio de la esfera pedida.

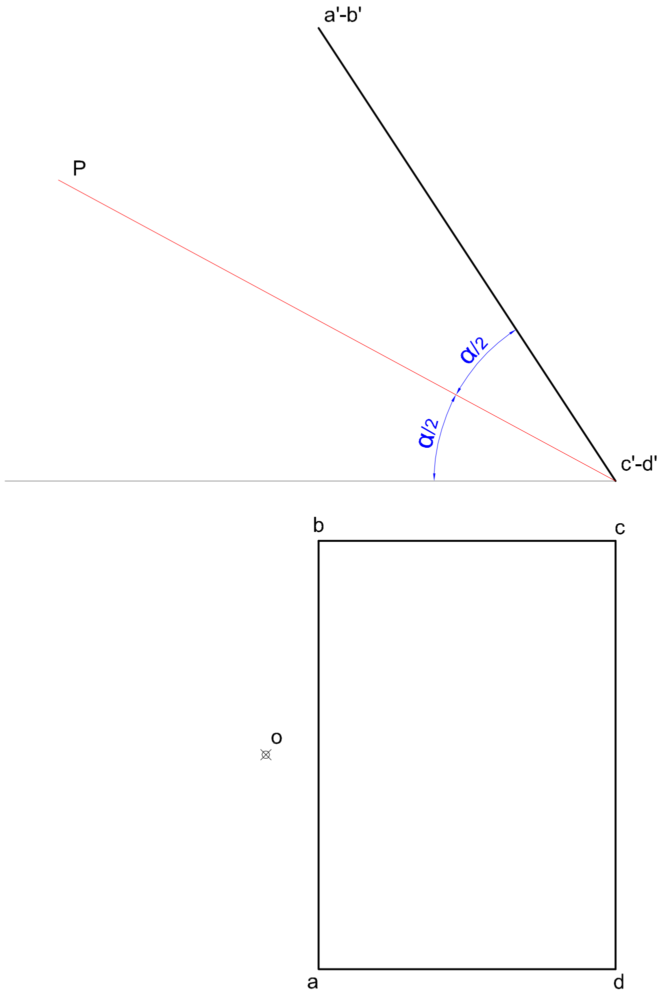
En este ejemplo al ser el plano de canto, tanto el trazado de la perpendicular, como el punto de intersección y la verdadera magnitud del radio se calculan de forma inmediata.
En casos de planos oblicuos recurriremos al cambio de plano para colocar los datos en una posición favorable.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

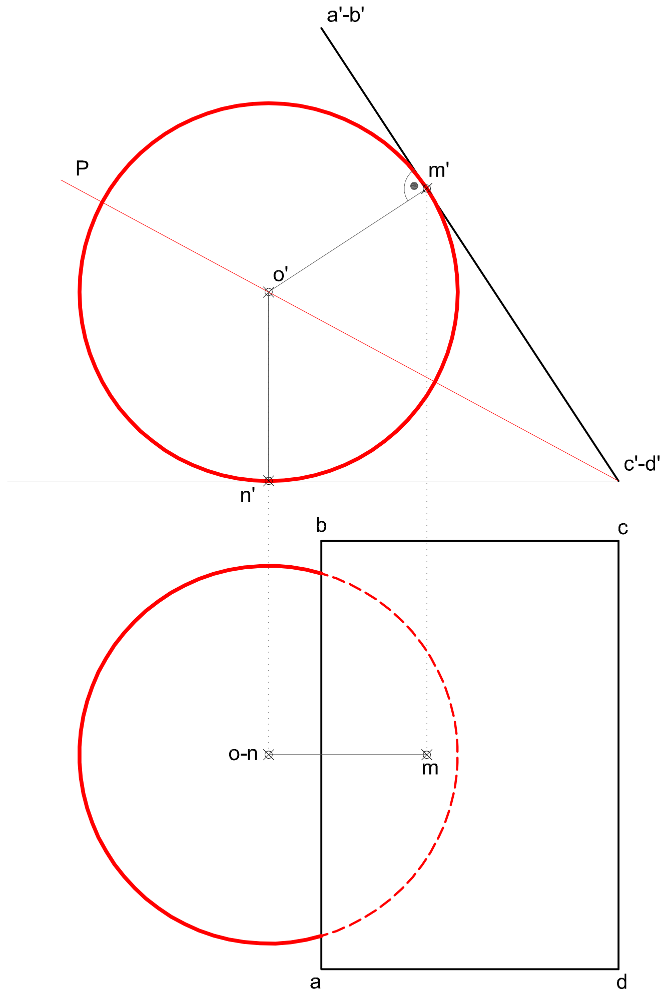
- ***TRAZADO DE ESFERA TANGENTE A DOS PLANOS. (PARALELOGRAMO ABCD Y PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN)***



DATOS: Planos y proyección horizontal del centro.



Paso 1.- Trazamos el plano (**P**) bisector de los planos datos, ya que el centro de la esfera debe equidistar de estos.

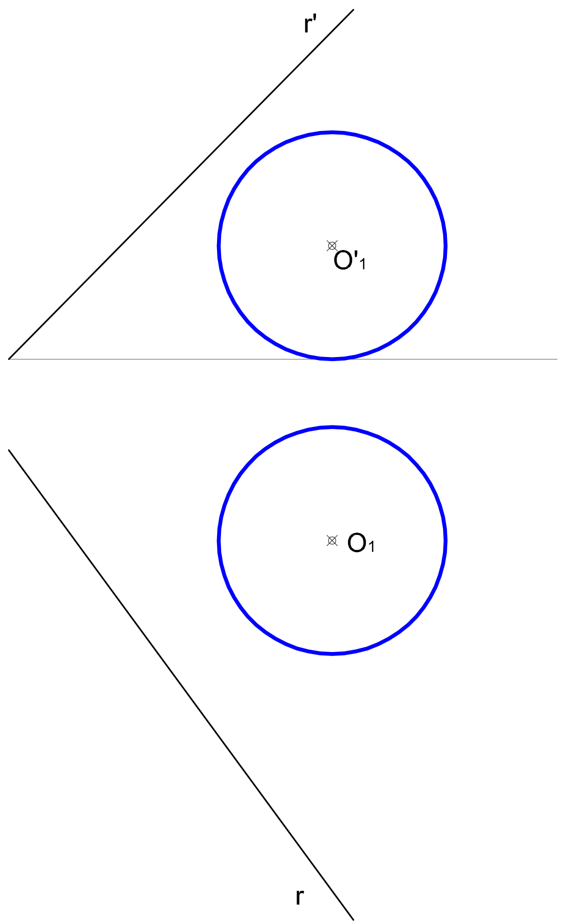


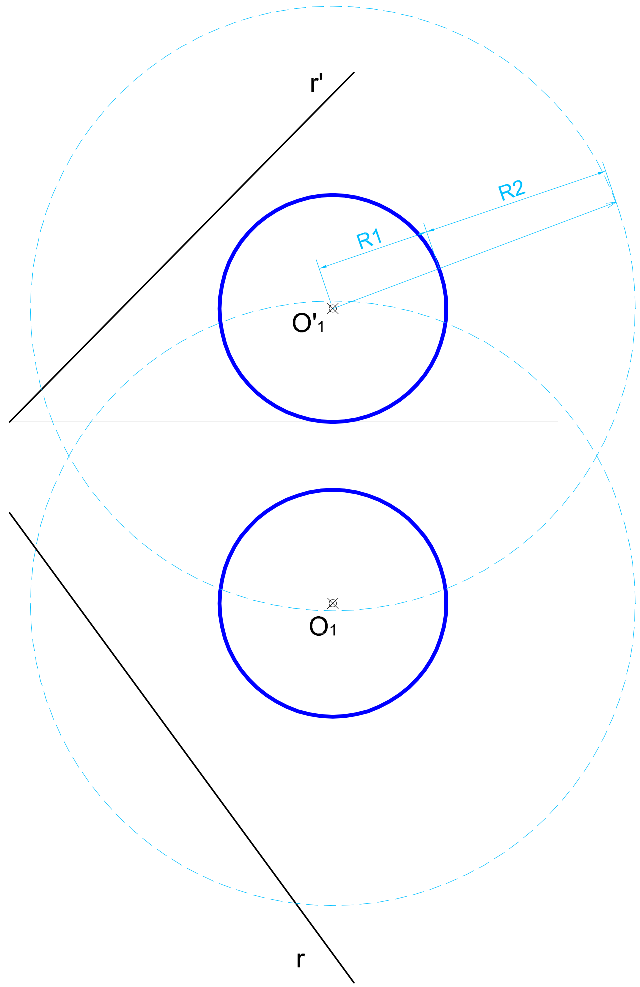
Paso 2.- Hallamos la proyección vertical del punto (**O**) y a partir de aquí procedemos como en el caso de esfera de centro conocido y tangente a un plano.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***TRAZADO DE ESFERA DE RADIO (R2) CONOCIDO, CUYO CENTRO SE ENCUENTRE SOBRE UNA RECTA (R) Y SEA TANGENTE A UNA ESFERA DADA.***

- Para la resolución de estos casos nos apoyamos en los conceptos básicos de esferas tangentes que decía "***Si dos esferas de radios (R1) y (R2) son tangentes entre sí, la distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios, encontrandose el punto (A) de tangencia a una distancia de cada centro igual al radio correspondiente".***

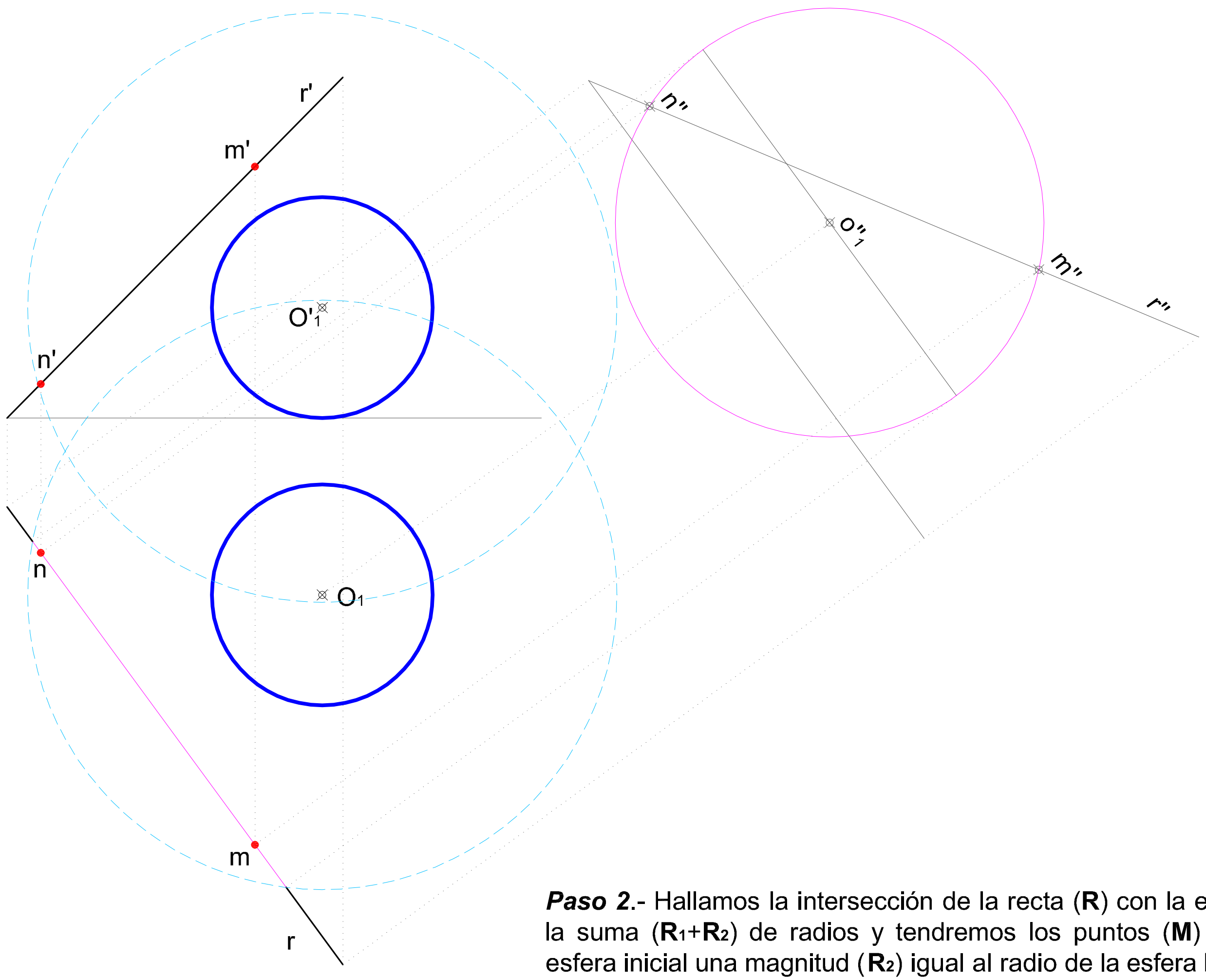




DATOS:
- * Esfera de centro (**O_1**) y radio (**R_1**).
- * Recta **R**.
- * Valor del radio (**R_2**) de la esfera buscada.

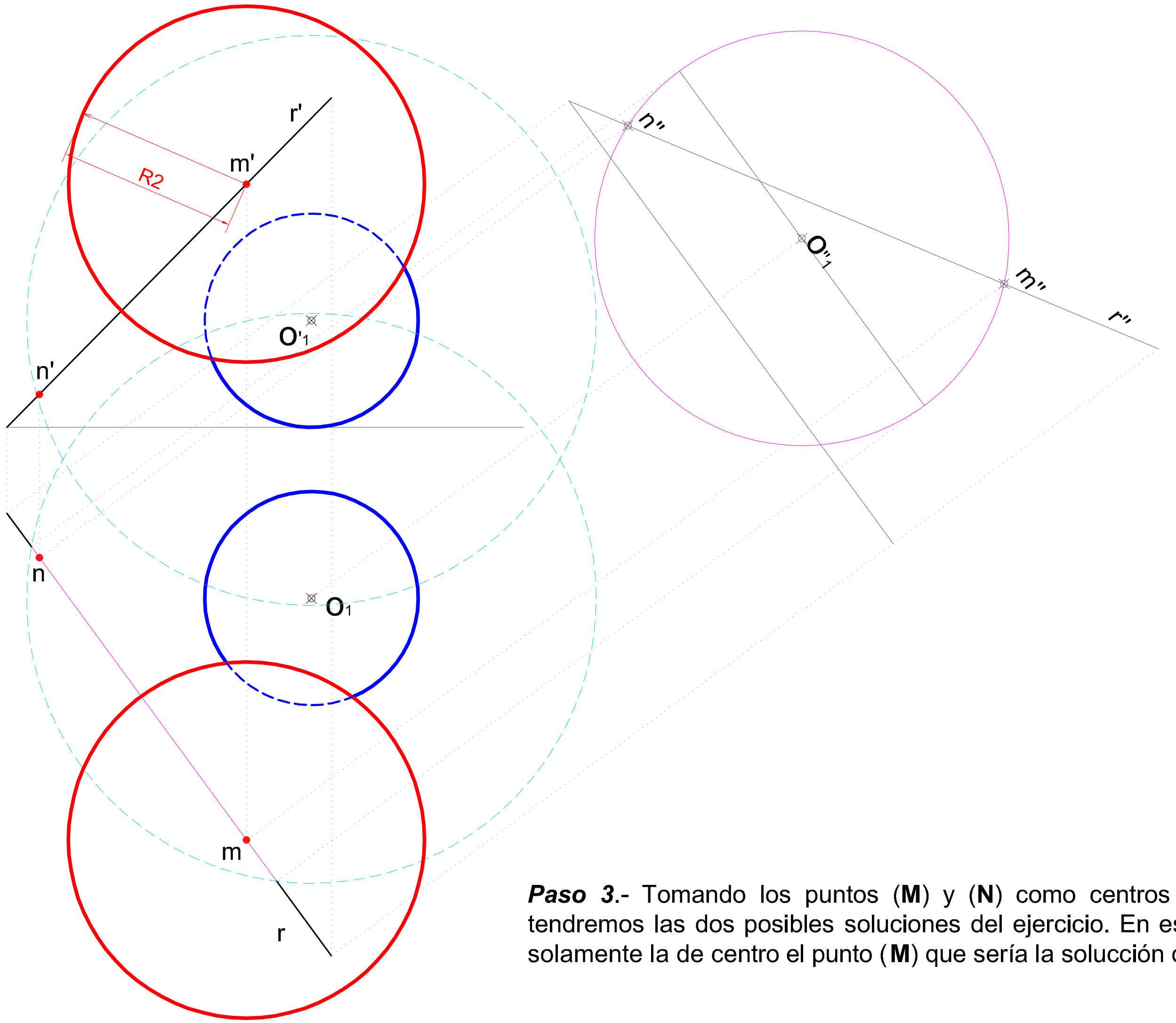
Paso 1.- Trazamos con centro en (**O_1**) una esfera de radio la suma de radios (**R_1+R_2**) que será el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidisten de la esfera dato la magnitud la del radio (**R_2**) de la esfera buscada.

- *TRAZADO DE ESFERA DE RADIO (R2) CONOCIDO, CUYO CENTRO SE ENCUENTRE SOBRE UNA RECTA (R) Y SEA TANGENTE A UNA ESFERA DADA.*



Paso 2.- Hallamos la intersección de la recta (**R**) con la esfera de centro (**O1**) y radio la suma (R_1+R_2) de radios y tendremos los puntos (**M**) y (**N**) que equidistan de la esfera inicial una magnitud (R_2) igual al radio de la esfera buscada.

- ***TRAZADO DE ESFERA DE RADIO (R2) CONOCIDO, CUYO CENTRO SE ENCUENTRE SOBRE UNA RECTA (R) Y SEA TANGENTE A UNA ESFERA DADA.***



Paso 3.- Tomando los puntos (**M**) y (**N**) como centros de esferas de radio (**R**$_2$), tendremos las dos posibles soluciones del ejercicio. En este ejemplo se ha dibujado solamente la de centro el punto (**M**) que sería la solucción de mayor cota.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Un cono recto como **superficie**, es la superficie de revolución generada por dos rectas secantes al girar una alrededor de la otra, siendo en este caso:

  * **Vértice**: el punto de corte de las dos rectas.

  * **Eje**: la recta sobre la que se gira

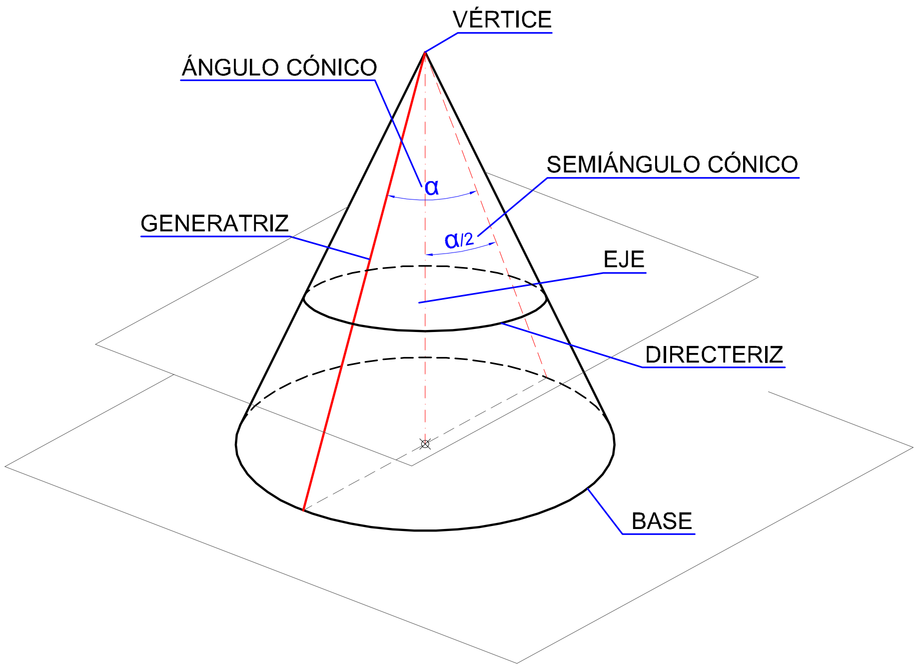
  * **Generatriz**: la recta que gira.

  * **Directriz**: la circunferencia que genera un punto de la generatriz al girar sobre el eje.

  * **Plano de la base**: plano que limita al cono recto de revolución.

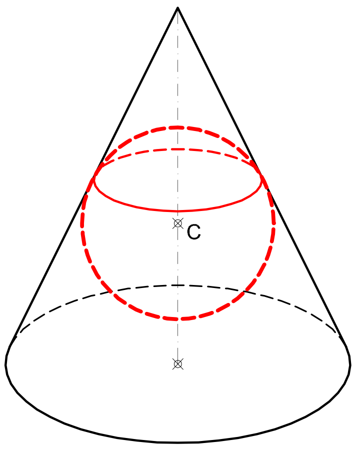
  * **Ángulo cónico**: el ángulo que forman dos generatrices diametralmente opuestas

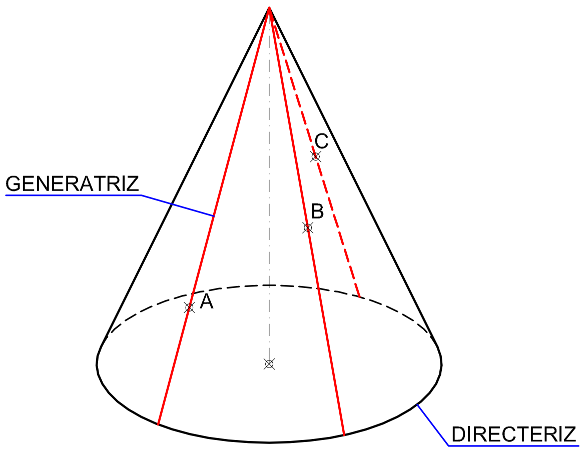
  * **Semiángulo cónico**: el ángulo que forma una generatriz con el eje.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- En todo cono de revolución es posible inscribir una **esfera** de centro en el eje del cono, teniendo en común una circunferencia perpendicular al eje.





- Todo punto de la **superficie cónica**, pertenece a una de sus generatrices.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Todo plano secciona a un cono de revolución según **una cónica**, siendo la tipología de la misma:

Figura .1.- **Dos generatrices** (cónica degenerada) y resultan de seccionar al cono por planos que contengan al vértice.

Figura. 2.- **Circunferencias** resultantes de seccionar al cono por planos perpendiculares al eje (secciones rectas).

Figura. 3.- **Elipses**, se producen al seccionar al cono por planos que cortan a todas sus generatrices.

Figura. 4.- **Parábolas**, resultantes de seccionar al cono por planos paralelos a una de sus generatrices.

Figura.5.- **Hipérbolas**, que resultan de seccionar al cono por planos paralelos a dos generatrices.

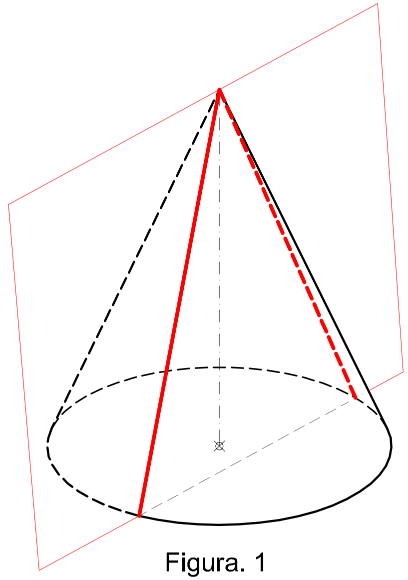


Figura. 1

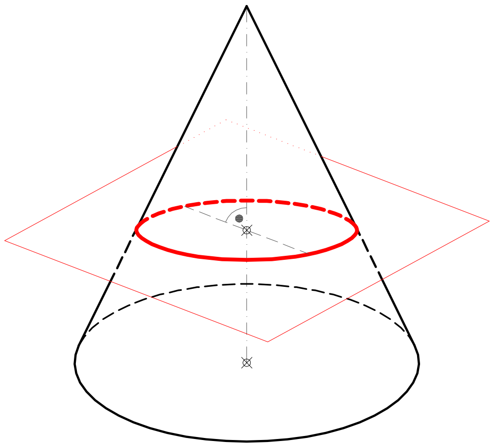


Figura. 2

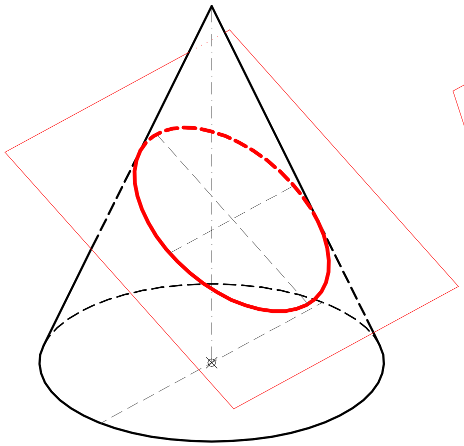


Figura. 3

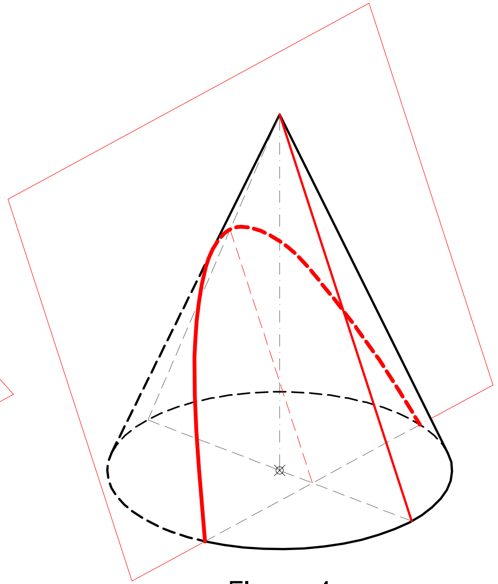


Figura. 4

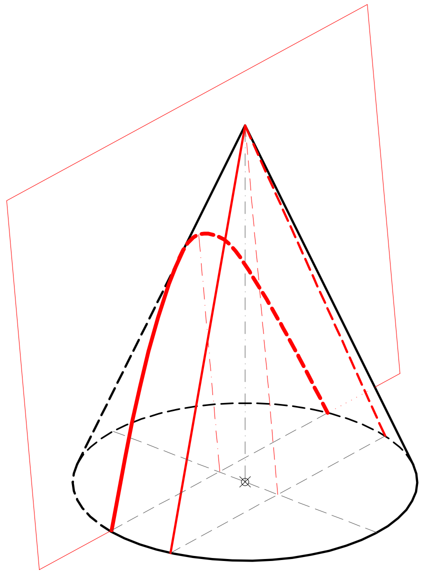
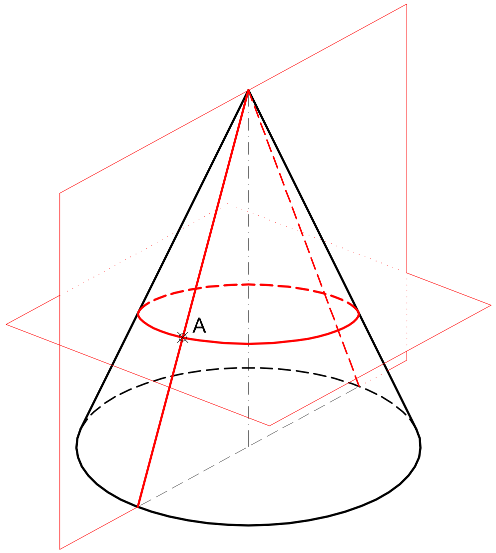
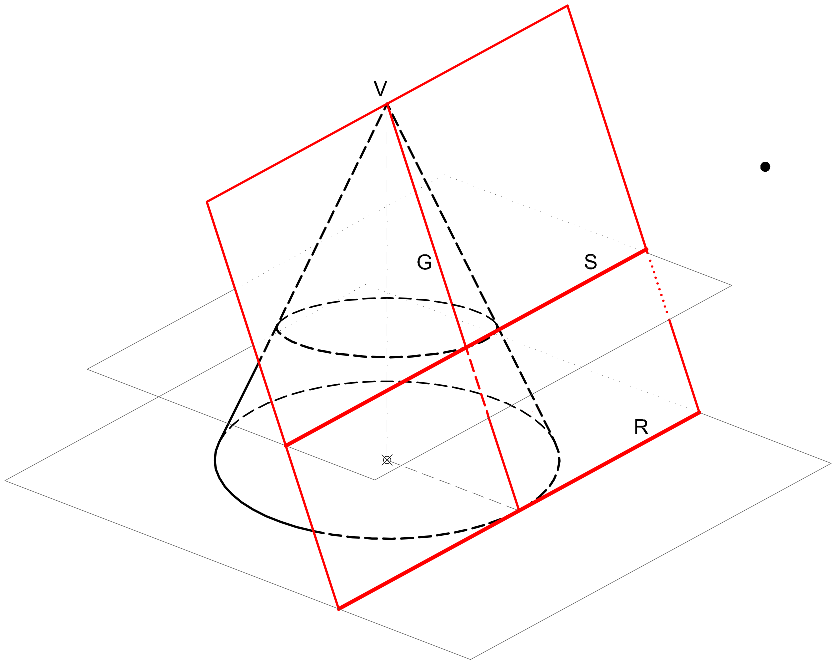


Figura. 5

- Todo **punto** perteneciente a la superficie cónica, se encuentra en una de sus secciones, siendo las más inmediatas las secciones generatrices o las secciones circunferencias siempre y cuando estas últimas estén en una posición favorable.





- Todo **plano tangente** a un cono contiene a una de sus generatrices y por lo tanto al vértice, y las rectas intersección del plano tangente con el plano de una directriz son tangentes a esta.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

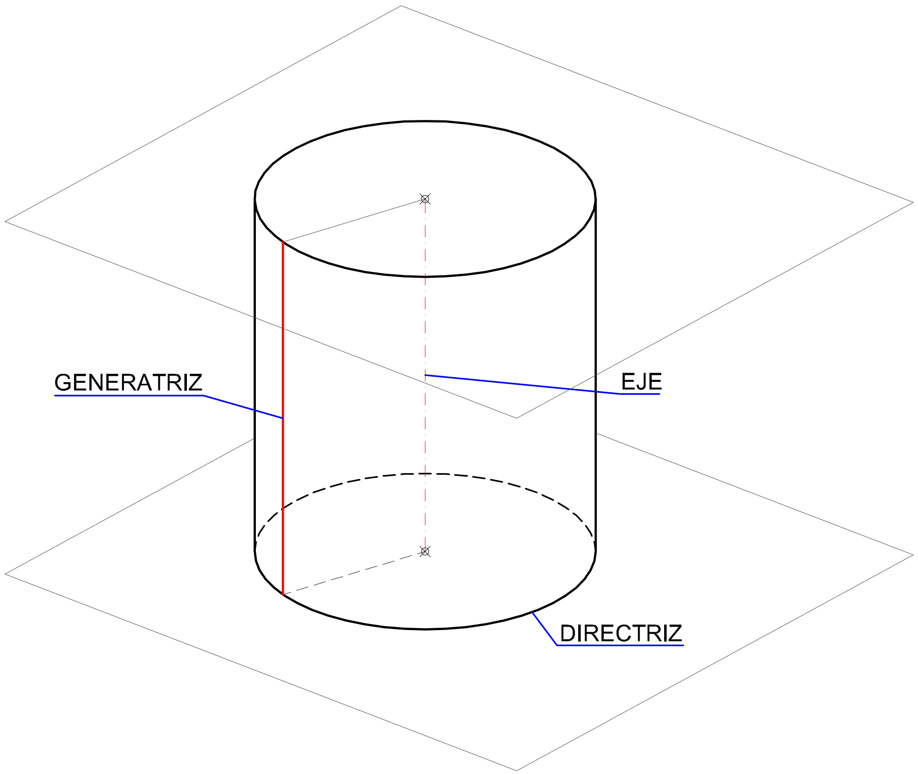
- Un cilindro recto como **superficie**, es la superficie de revolución generada por dos rectas paralelas al girar una alrededor de la otra, siendo en este caso:

  * **Eje**: la recta sobre la que se gira

  * **Generatriz**: la recta que gira.

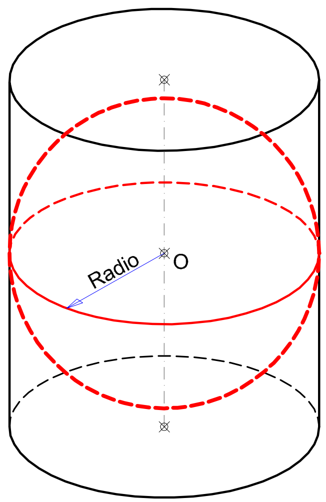
  * **Directriz**: la circunferencia que genera un punto de la generatriz al girar sobre el eje.

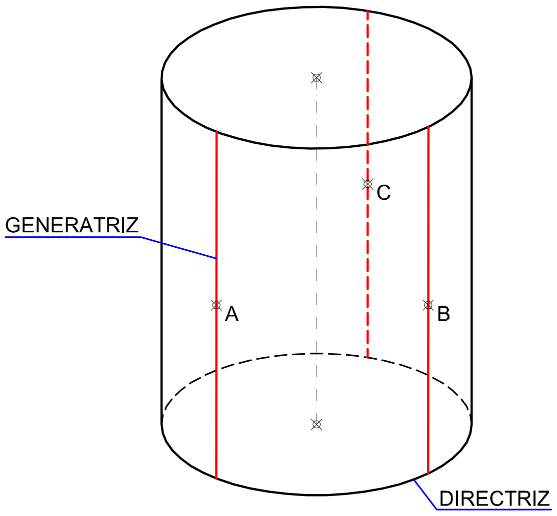
  * **Planos de las bases**: planos que limitan al cilindro.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- En todo cilindro de revolución es posible inscribir una **esfera** de centro en el eje del cilindro, teniendo en común una circunferencia perpendicular al eje y de centro y radio el de la esfera.





- Todo punto de la **superficie cilíndrica**, pertenece a una de sus generatrices.

- En un cilindro de revolución nos podemos encontrar tres tipos de ***secciones planas***:

Figura .1.- **Dos generatrices** que resultan de seccionar al cilindro por planos paralelos al vértice.

Figura. 2.- **Circunferencias** resultantes de seccionar al cilindro por planos perpendiculares al eje (secciones rectas).

Figura. 3.- **Elipses**, se producen al seccionar al cilindro por planos que cortan a todas sus generatrices.

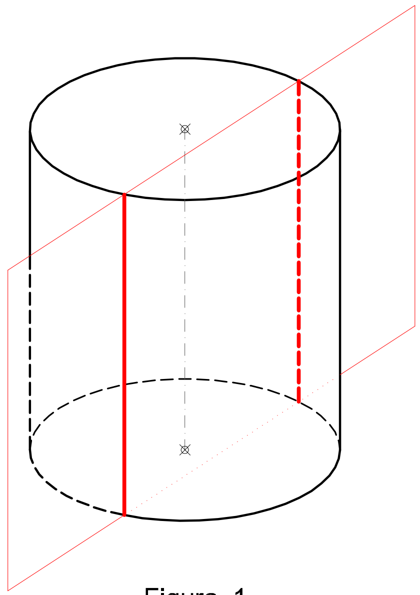


Figura. 1

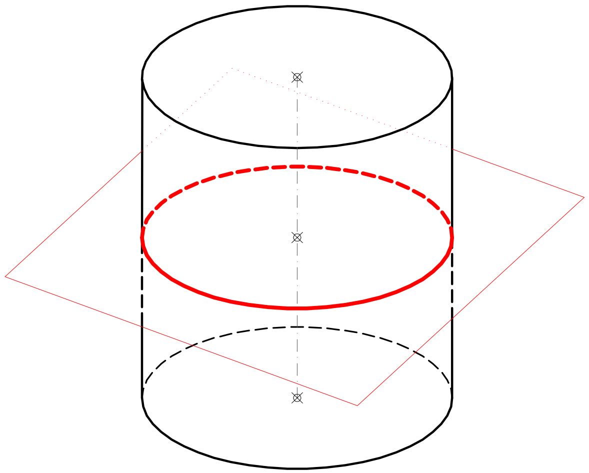


Figura. 2

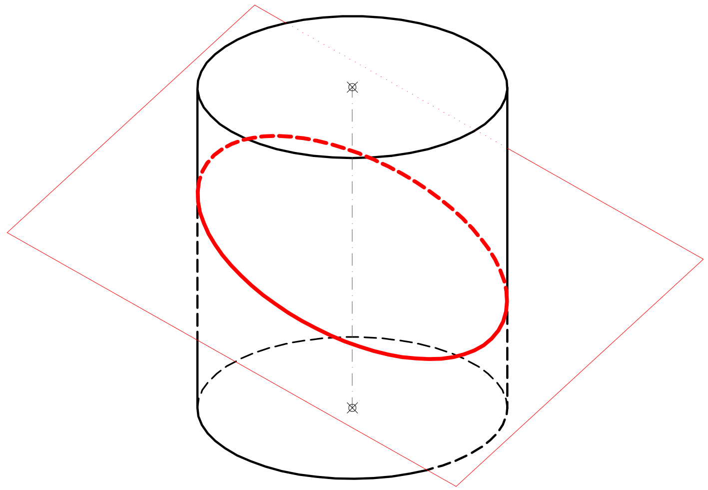
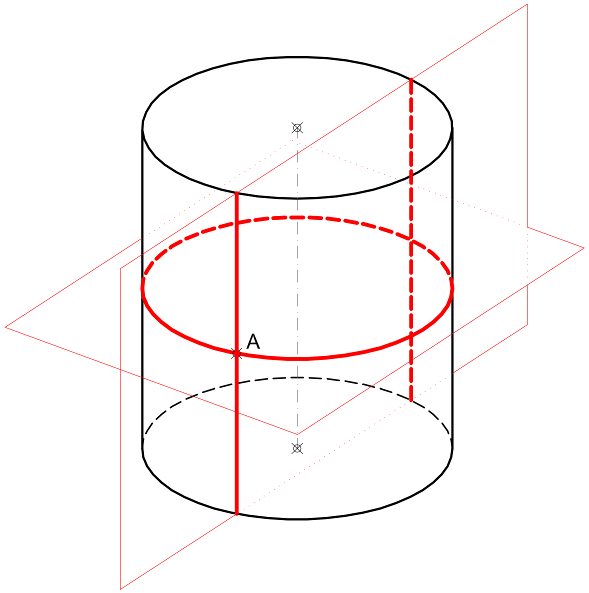
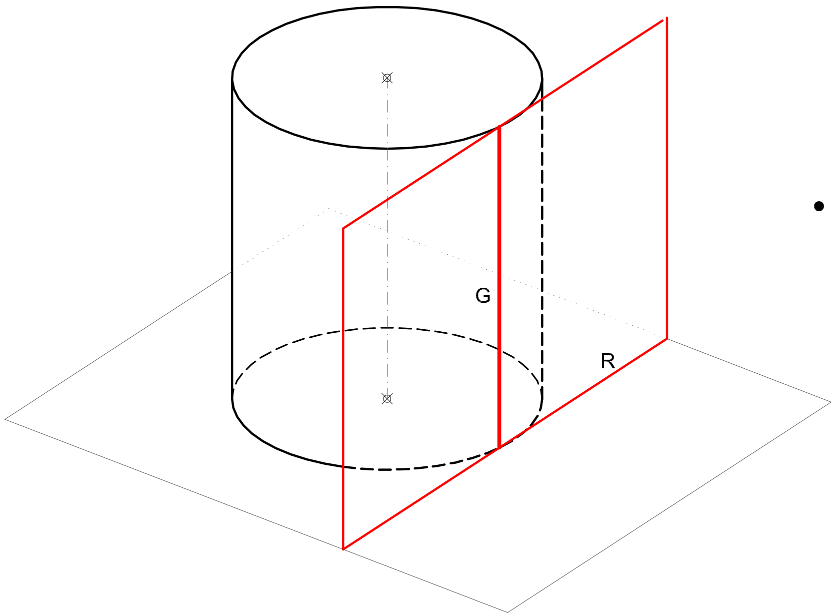


Figura. 3

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Todo **punto** perteneciente a la superficie cilíndrica, se encuentra en una de sus secciones, siendo las más inmediatas las secciones generatrices o las secciones circunferencias siempre y cuando estas últimas estén en una posición favorable.





- Todo **plano tangente** a un cilindro contiene a una de sus generatrices y las rectas intersección del plano tangente con el plano de una directriz son tangentes a esta.

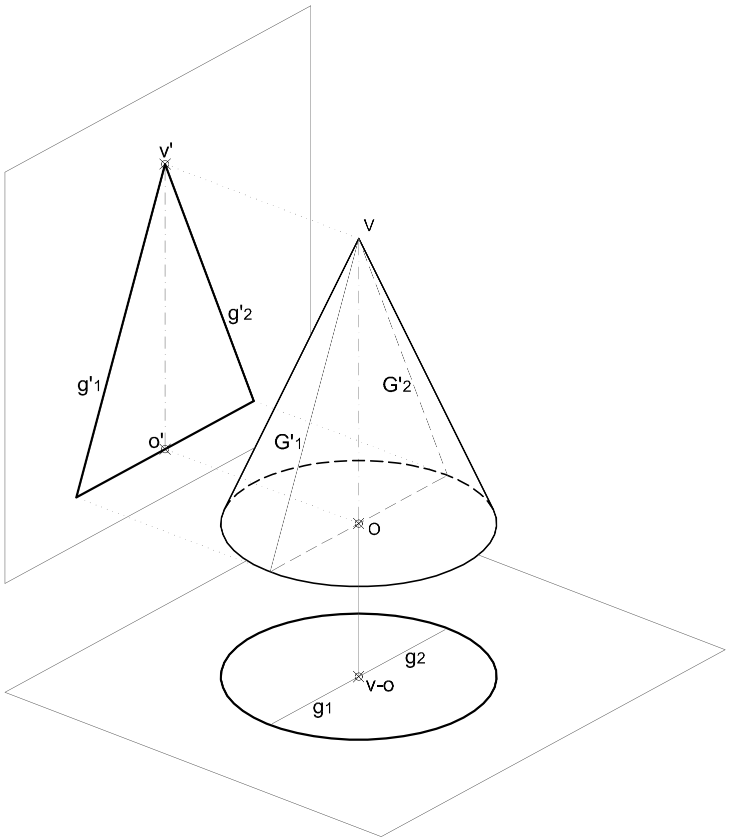
• *REPRESENTACIÓN DEL CONO RECTO DE REVOLUCIÓN EN SISTEMA DIÉDRICO .*

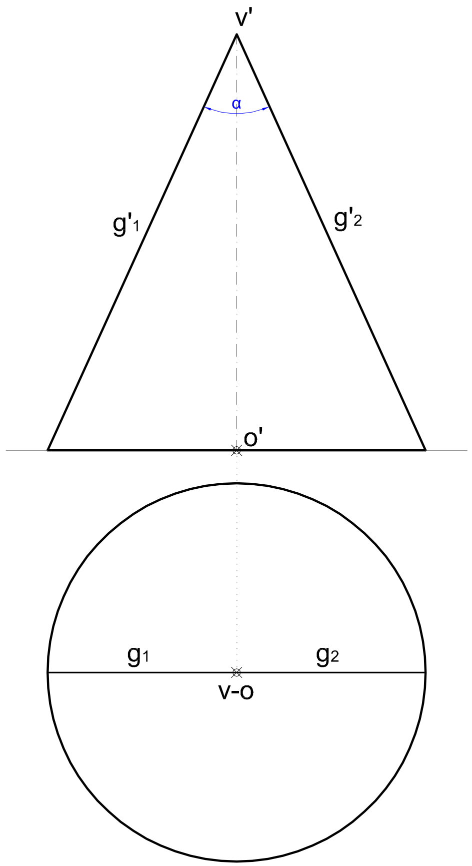
Un cono de revolución queda definido por su vértice y por su base o, en su defecto, por los datos que nos permitan conocer estos. Por consiguiente en proyecciones diédricas el cono estará representado por las proyecciones de su vértice y su base, siendo los contornos aparentes las tangentes desde las proyecciones del vértice a las proyecciones de la base.

La mayor dificultad que nos encontraremos en los ejercicios de representación de conos, será la de su posición espacial y que vamos a desarrollar con algunos ejemplos.

• *REPRESENTACIÓN DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE VERTICAL .*

.





Este caso junto con conos de ejes de punta, sería el más inmediato.

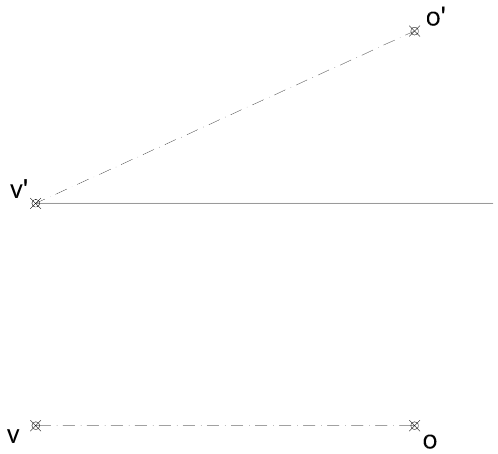
- El contorno aparente horizontal se corresponde con la proyección horizontal de la base.
- El contorno aparente vertical es un triángulo isósceles de lados (**G**$_1$ y **G**$_2$) las proyecciones verticales de las dos generatrices frontales y el otro lado el diámetro de la base.
- El ángulo cónico (**α**) se ve en verdadera magnitud en P.V.

CONO DE REVOLUCIÓN. REPRESENTACIÓN Y TRAZADOS.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

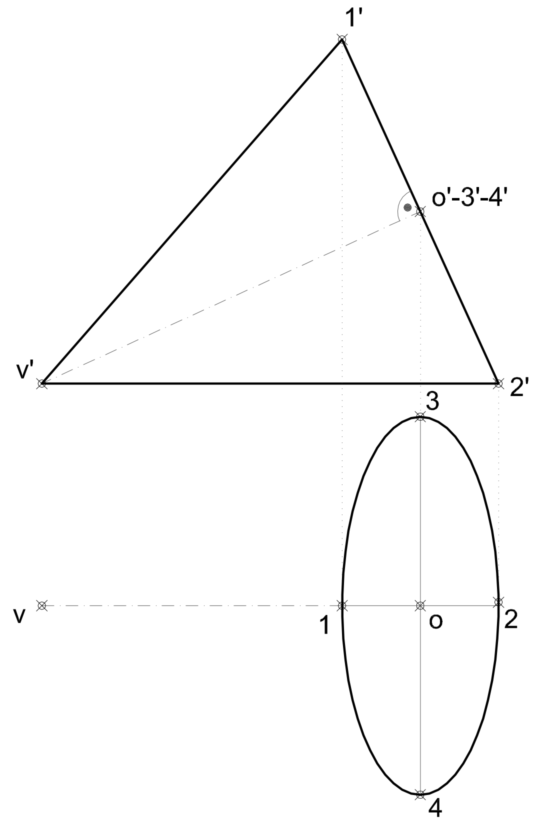
• *REPRESENTACIÓN DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE FRONTAL .*

En este caso vamos a calcular las proyecciones de un cono de revolución en una posición del eje frontal. La otra condición para que el cono quedara definido podría ser su ángulo cónico, el radio de su base o cualquier otra condición que nos permitiera conocer alguna de las anteriores

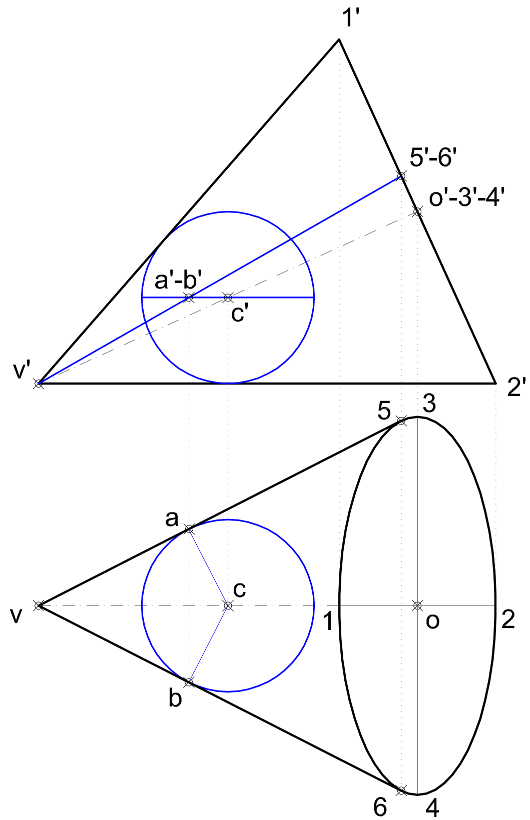


DATOS:
Segmento **(VO)** frontal, como eje de un cono tangente al plano horizontal en el que**:**

- V = Vértice del cono.
- O = Centro de la base.



PASO 1:
Representamos la base para lo que se traza desde (**O**) centro de la misma un plano perpendicular al eje, que contendrá a esta y cuyo radio queda definido por la posición de la generatriz (**V-2**) que según el enunciado debe ser horizontal.



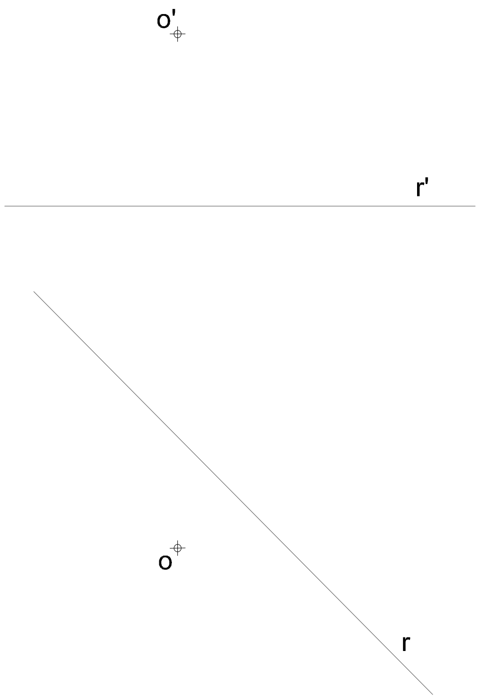
PASO 2.
Para encontrar con exactitud las generatrices (**V-5**) y (**V-6**) nos apoyamos en una esfera inscrita en el cono, teniendo en cuenta que estas generatrices son también tangentes a la esfera en los puntos (**A**) y (**B**) de su ecuador.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

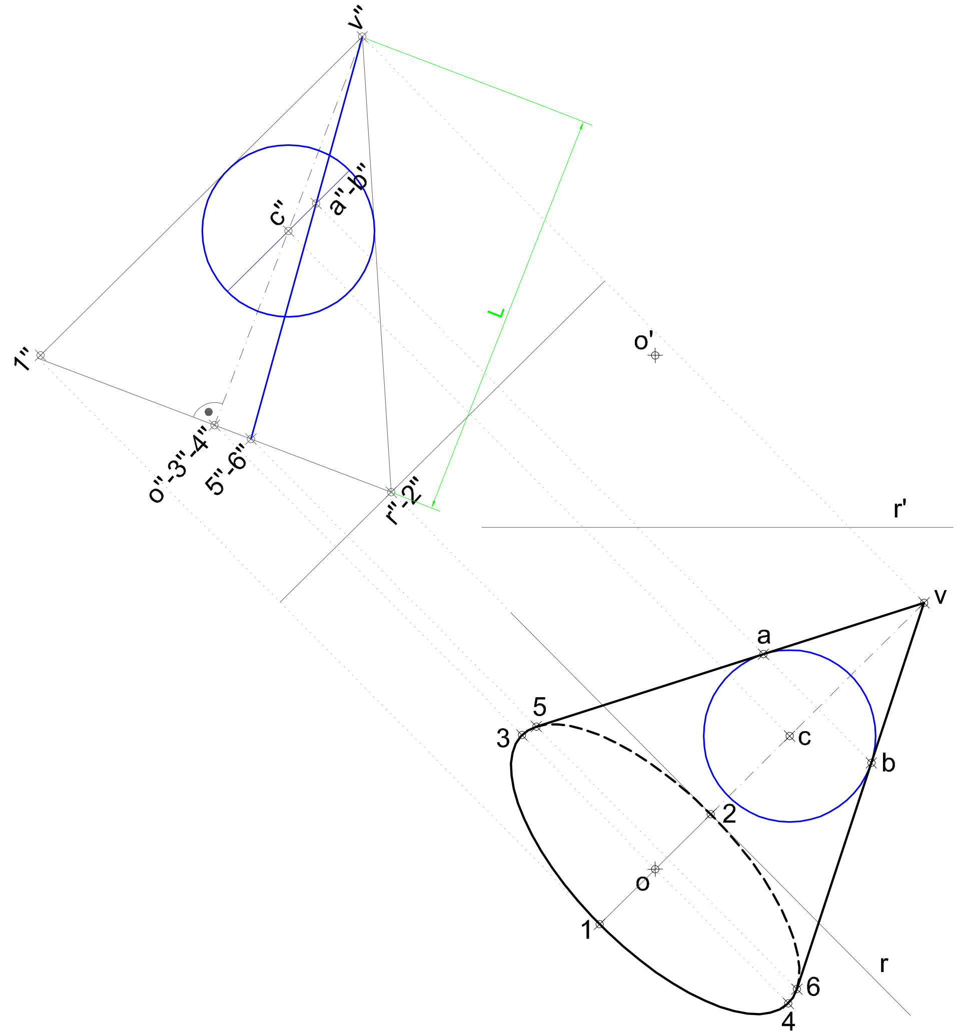
- ***REPRESENTACIÓN DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE OBLICUO.***

DATOS: Sobre el plano definido por el punto (**O**) y la recta (**R**), se encuentra situada la base de un cono recto de revolución de altura (**L**). Representar el cono en su posición de mayor cota, sabiendo que (**O**) es centro de la base y que esta es tangente a la recta (**R**).

PASO 1.- Mediante cambio de plano, situamos el plano de la base de canto para que al trazar la altura (L) esta quede en posición frontal y dibujar la proyección horizontal del ejercicio basándonos en lo visto en el caso anterior de eje frontal.



DATOS



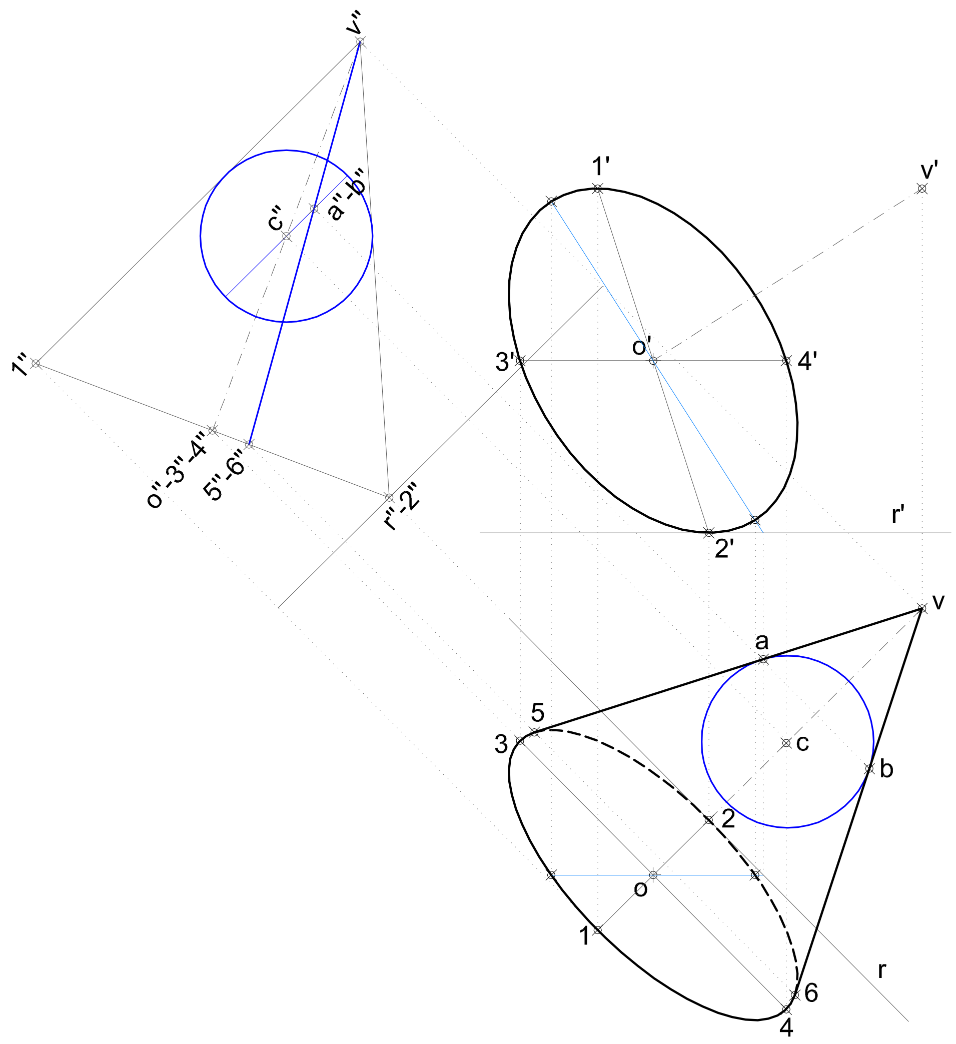
PASO 1.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***REPRESENTACIÓN DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE OBLICUO.***

PASO 2.- Dibujamos las proyecciones verticales de la base y del vértice recordando que las cotas de los elementos se mantienen en la vista original y en la auxiliar.

Los puntos (**5**) y (**6**) que son los de tangencia en proyección horizontal, en proyección vertical no son esenciales.



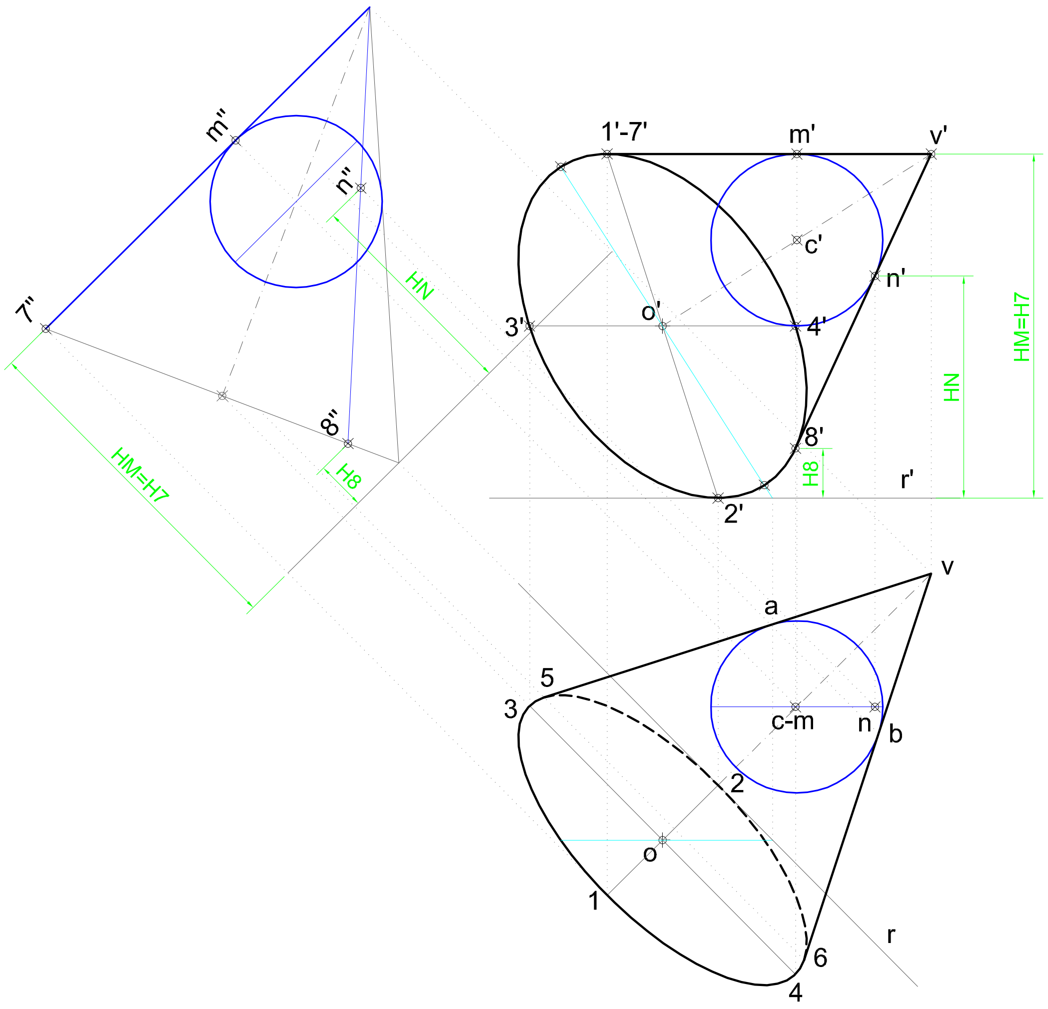
PASO 2.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***REPRESENTACIÓN DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE OBLICUO.***

PASO 3.- Para hallar con exactitud las generatrices (**V-7**) y (**V-8**) de tangencia del contorno aparente vertical así como los puntos (**7**) y (**8**) de tangencia, nos apoyamos en la esfera inscrita, teniendo en cuenta que estas generatrices son tangentes a la esfera en su meridiano principal en los puntos (**M**) y (**N**).

En este caso el punto (7) coincide con el (1) del eje.



PASO 3.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

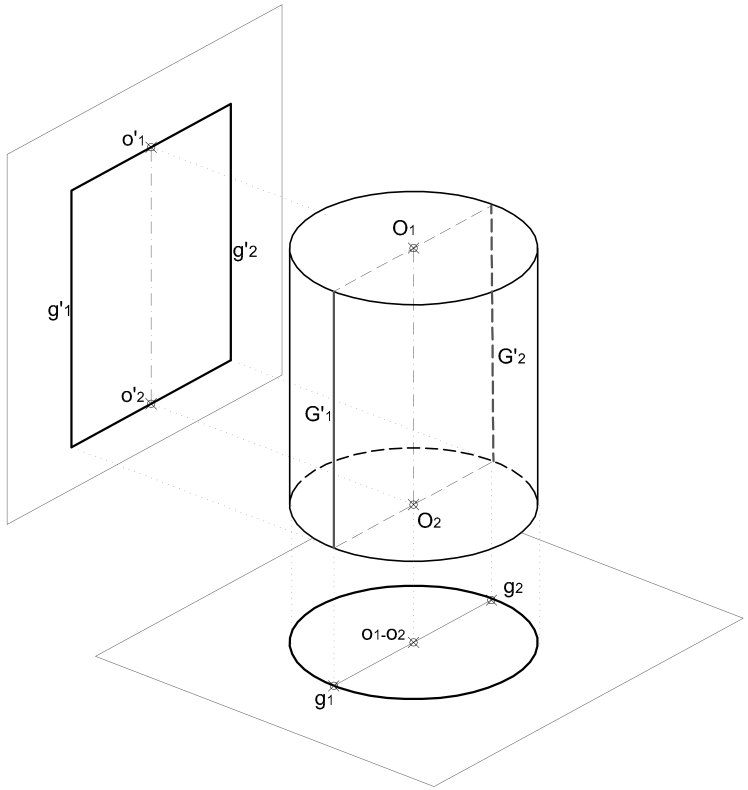
- ***REPRESENTACIÓN DEL CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN EN SISTEMA DIÉDRICO .***

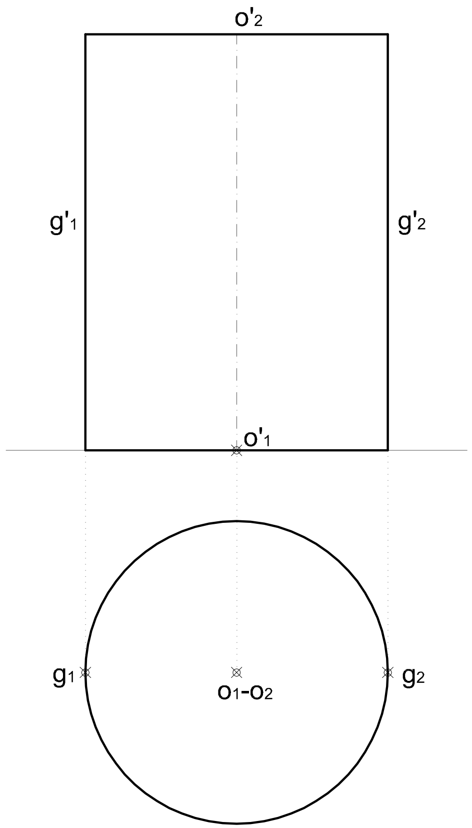
Un cilindro de revolución queda definido por su base y su eje o, en su defecto, por los datos que nos permitan conocer estos. Por consiguiente en proyecciones diédricas el cilindro estará representado por las proyecciones de sus bases, siendo los contornos aparentes las tangentes a las proyecciones de la base y son paralelas al eje.

La mayor dificultad que nos encontraremos en los ejercicios de representación de cilindros, será la de su posición espacial y que vamos a desarrollar con algunos ejemplos.

- ***REPRESENTACIÓN DE UN CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE VERTICAL .***

.





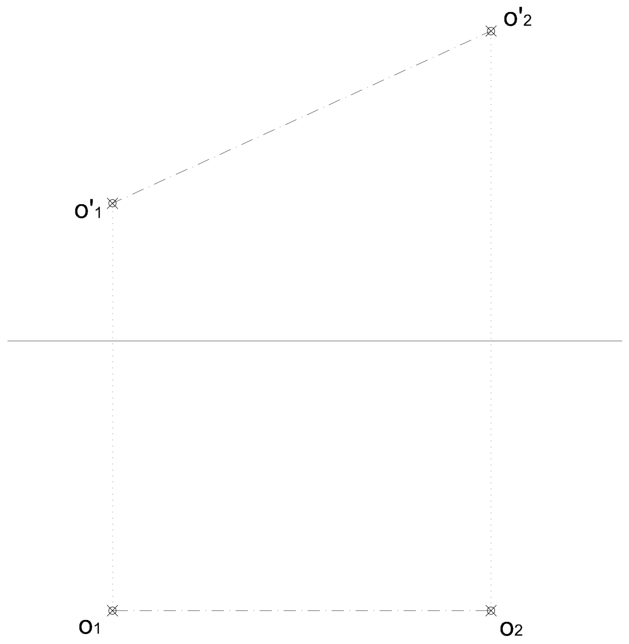
Este caso junto con conos de ejes de punta, sería el más inmediato.

- El contorno aparente horizontal se corresponde con la proyección horizontal de las bases.
- El contorno aparente vertical es un rectángulo de lados (**G_1** y **G_2**) las proyecciones verticales de las dos generatrices que se encuentran en el plano frontal que contiene al eje los otros lados el diámetro de las bases.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

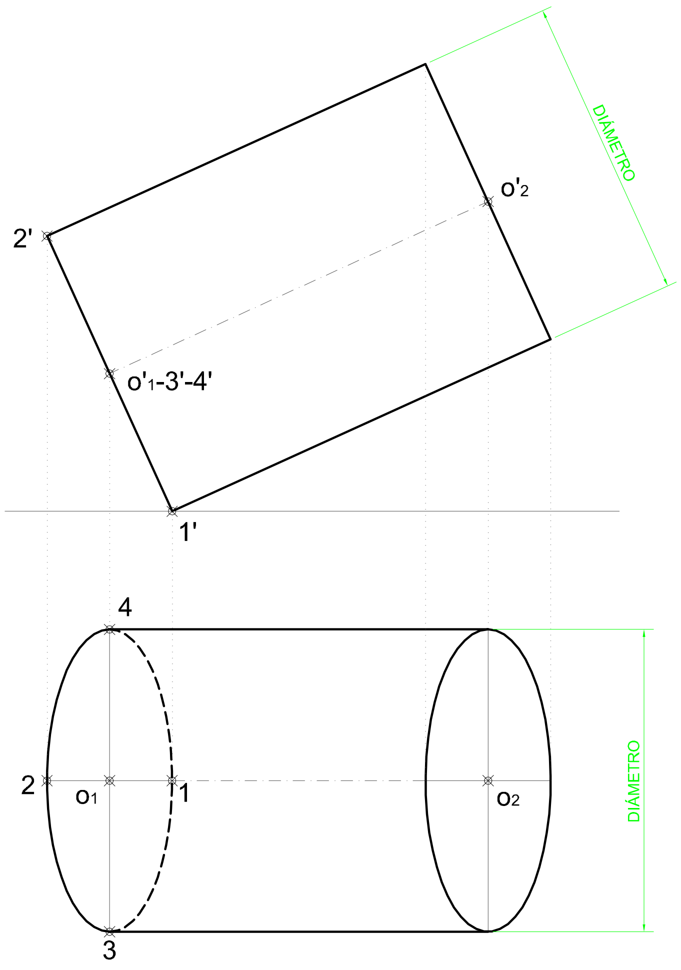
- ***REPRESENTACIÓN DE UN CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE FRONTAL .***

Al ser el eje frontal, las bases se encuentran en planos de canto, por consiguiente este caso se reduce a representar las proyecciones de las circunferencias de las bases en esta posición.



DATOS

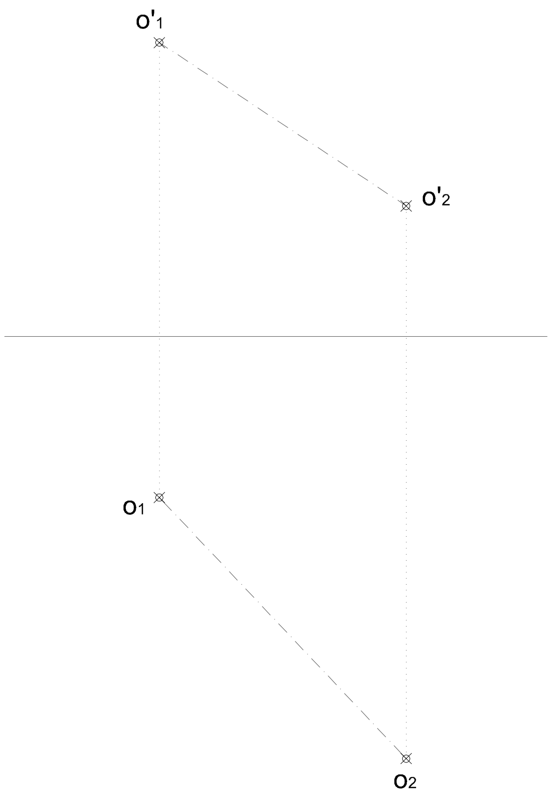
En los casos de cilindros de revolución, independientemente de la posición del eje, la separación tanto de las generatrices de contorno aparente vertical como horizontal, es la correspondiente al diámetro de la base.



SOLUCIÓN

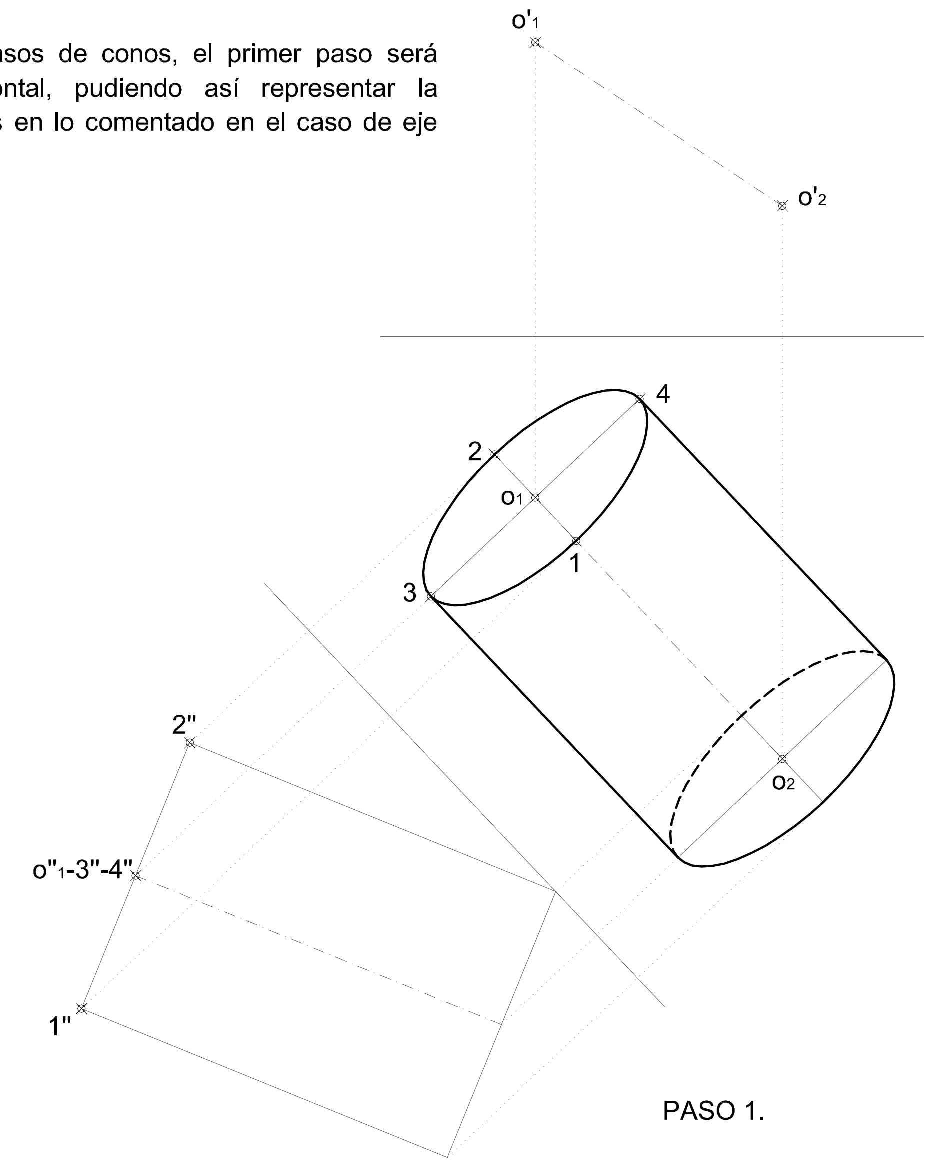
- ***REPRESENTACIÓN DE UN CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE OBLICUO.***

DATOS: En este ejemplo vamos a representar un cilindro recto de revolución de eje oblicuo y radio conocido.



DATOS

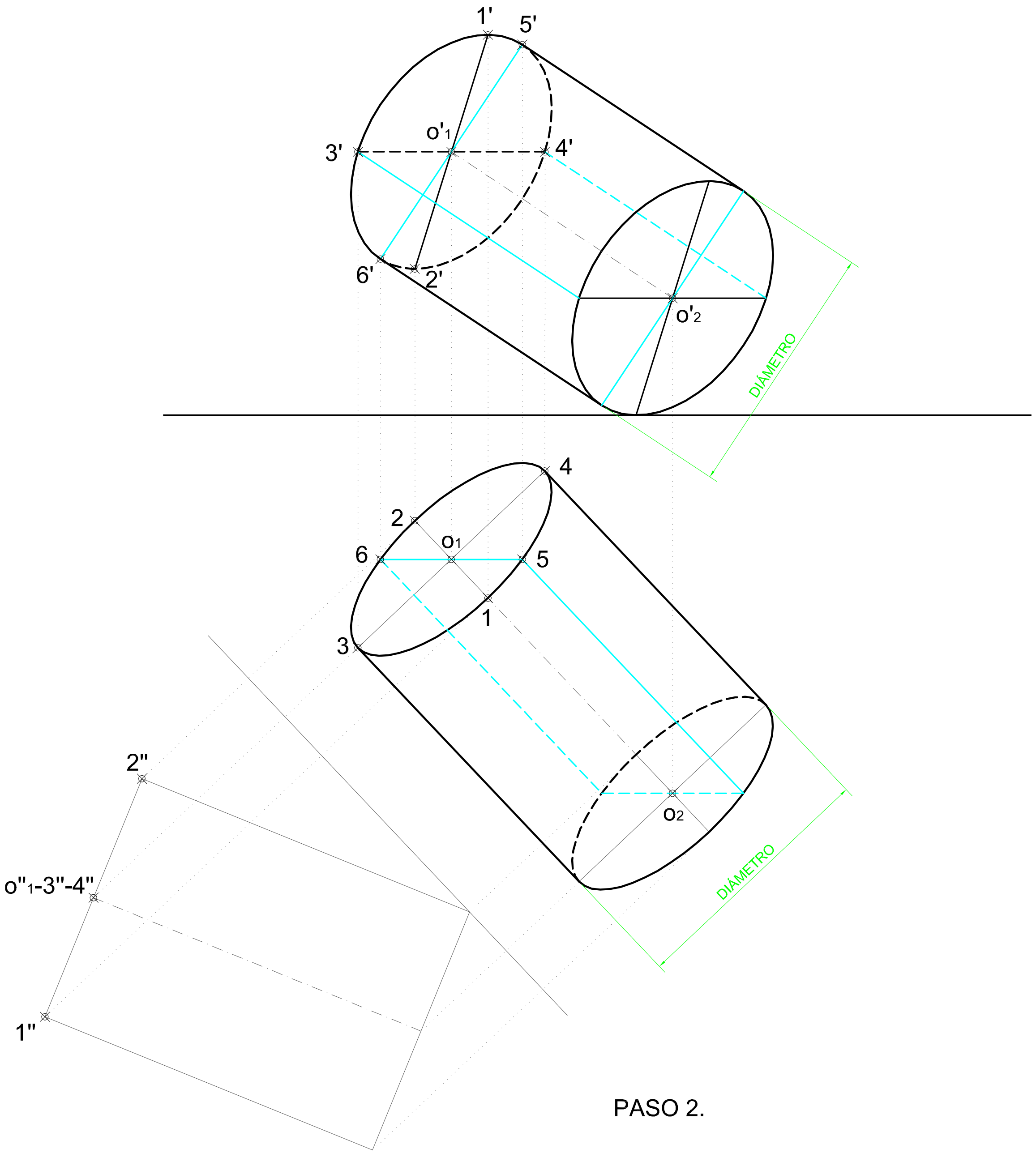
PASO 1: Al igual que en los casos de conos, el primer paso será colocar el eje en posición frontal, pudiendo así representar la proyección horizontal basándonos en lo comentado en el caso de eje frontal.



PASO 1.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***REPRESENTACIÓN DE UN CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN DE EJE OBLICUO. .***



PASO 2.

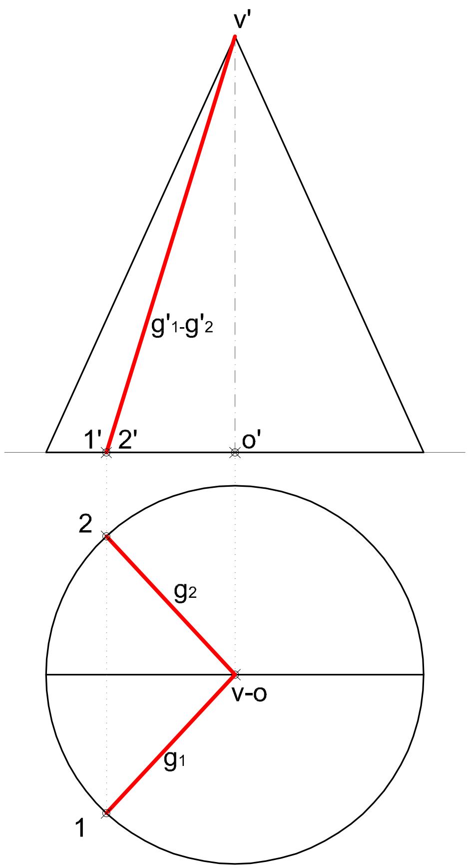
PASO 2: Para representar la proyección vertical del cilindro nos apoyamos en las cotas de los ejes (**1-2**) y (**3-4**).

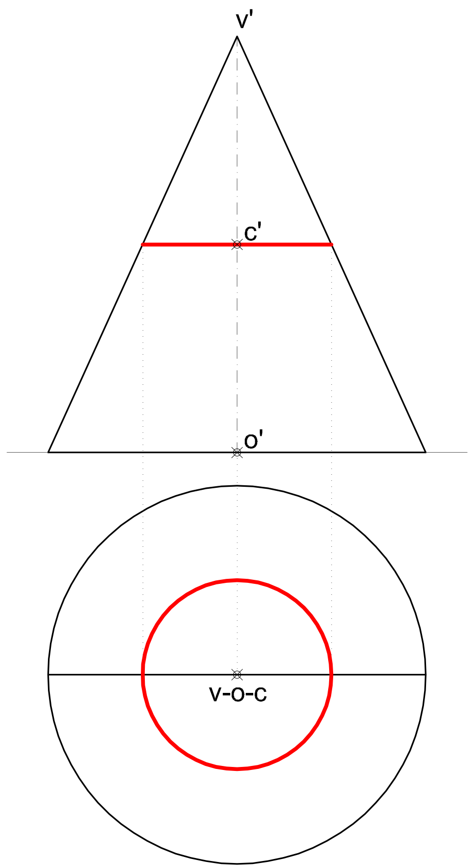
Las generatrices de contorno aparente vertical que parten de los puntos (**5** y **6**) se dibujan llevando paralelas al eje y separadas de él, el radio del cilindro ya que como se ha comentado, en los cilindros de revolución la separación de las generatrices de contornos aparentes se corresponde con el diámetro.

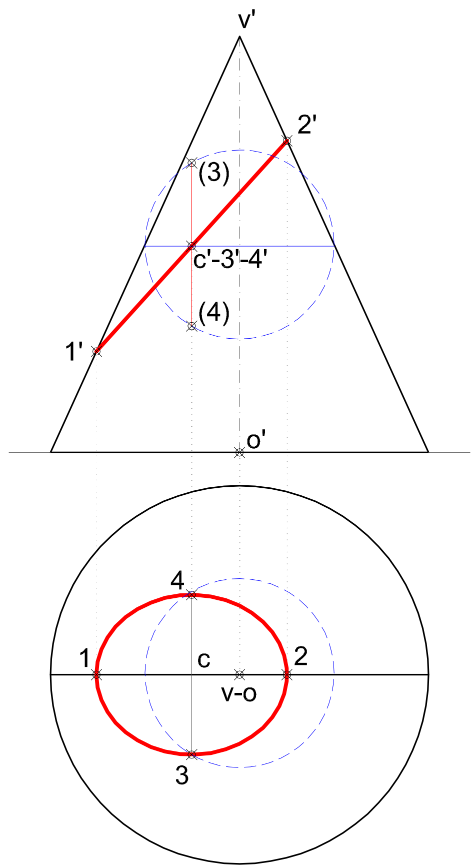
CONO DE REVOLUCIÓN. SECCIONES PLANAS.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Como ya comentamos en los conceptos básicos, dentro del cono de revolución nos podemos encontrar cinco tipo de secciones planas y que dependen de la posición del plano con respecto al cono y que vamos a enumerar con planos de canto ya que será a esta vista a la que recurriremos en todos los casos de secciones planas.







SECCIÓN DOS GENERATRICES:

El plano contiene al vértice del cono y corta a la base en los puntos (**1**) y (**2**).

- La solución son las generatrices (**G_1**) y (**G_2**) resultantes de unir los puntos con el vértice.

SECCIÓN CIRCUNFERENCIA:

Secciones producidas por planos perpendiculares al eje del cono.

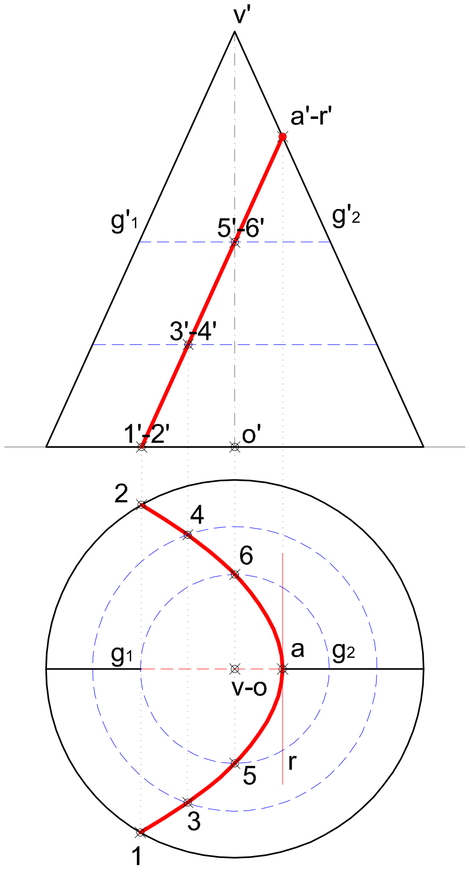
- El centro (**C**) de la circunferencia sección se encuentra en la intersección del plano con el eje, siendo el radio la distancia de este punto al punto de intersección del plano con una generatriz.

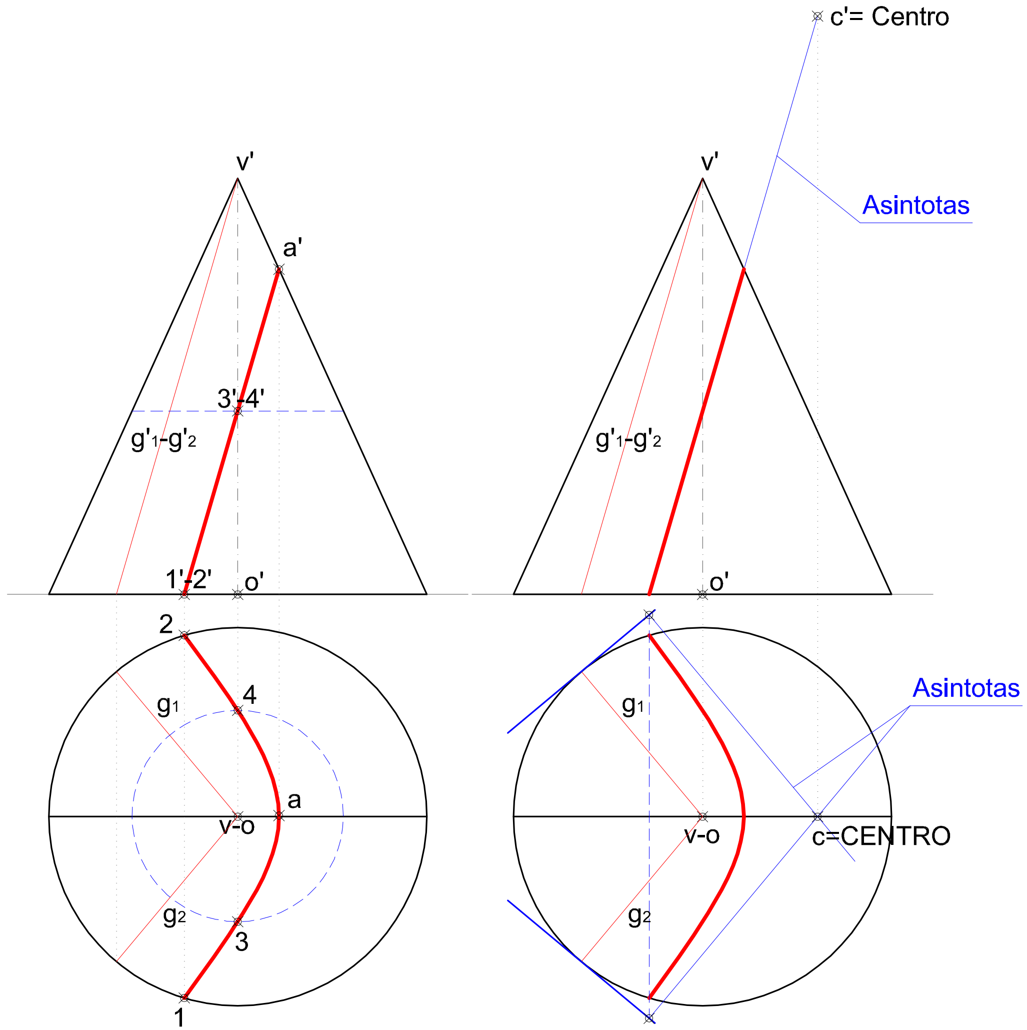
SECCIÓN ELIPSE:

Secciones producidas por planos que cortan a todas las generatrices.

- La magnitud del eje (**3-4**) la hallamos por la sección circunferencia producida por un plano que pasa por el punto medio del eje (**1-2**), siendo la cuerda de la circunferencia el valor del eje.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez





SECCIÓN PARÁBOLA:

Secciones producidas por planos paralelos a una de las generatrices (**G1**) del cono.

- El eje de la parábola es la recta intersección del plano con el plano que contiene a la generatriz (**G**$_1$) y al eje del cono.
- Los puntos (**1**) y (**2**) son dos puntos simétricos con respecto al eje de la parábola.
- El vértice (**A**) de la parábola se encuentra en la intersección del plano sección con la generatriz (**G**$_2$) diametralmente opuesta a la paralela.

SECCIÓN HIPÉRBOLA:

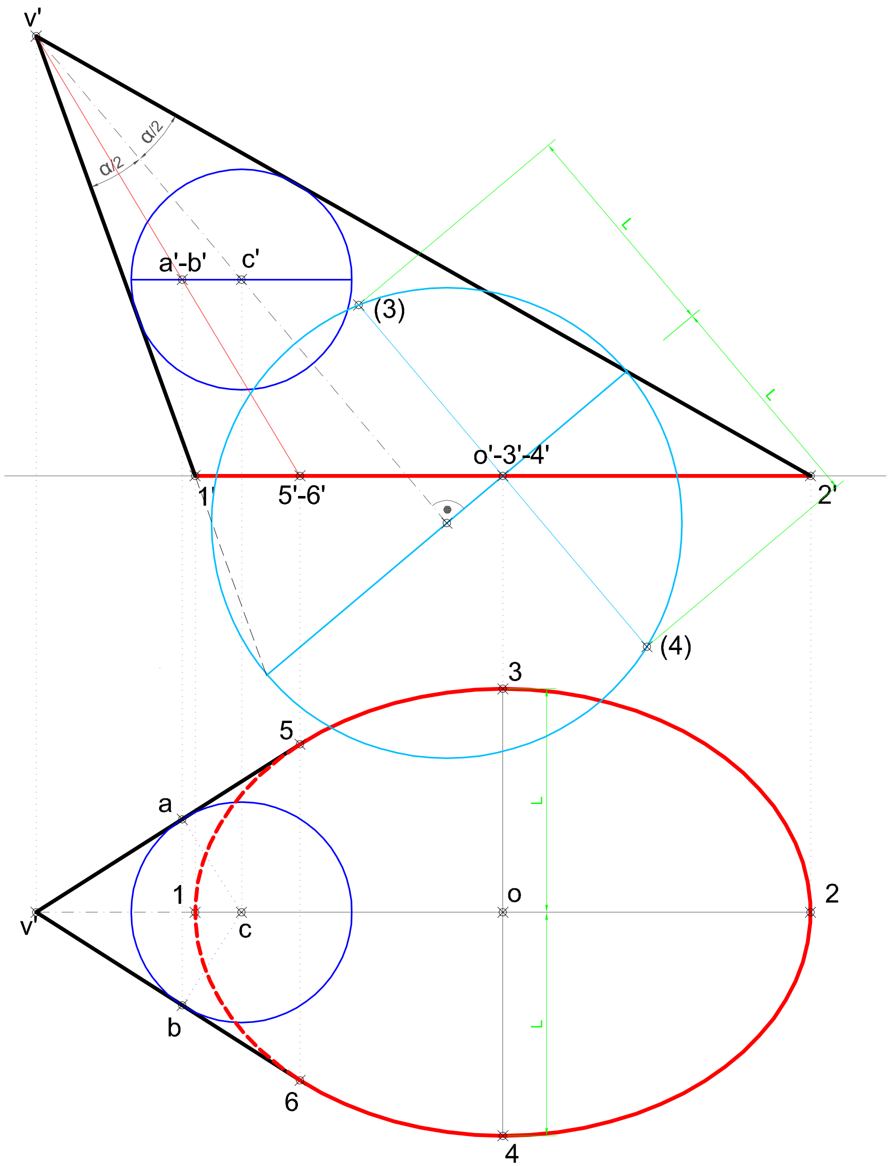
Secciones producidas por planos paralelos a dos generatrices del cono.

- Los puntos (**1**) y (**2**) son simétricos respecto del eje transversal de la hipérbola.
- El eje transversal resulta de la intersección del plano mediador de (**1-2**) con el plano sección.
- El vértice (**A**) es se encuentra en la intersección del eje transversal con el cono.
- Las asintotas son las intersecciones del plano sección con los planos tangentes al cono que contienen a las generatrices (**G**$_1$ y **G**$_2$).

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***TRAZA DE UN CONO RECTO DE REVOLUCIÓN .***

Se denomina traza de un cono a la sección que le produce el plano horizontal de proyección y es como toda sección plana del cuerpo una cónica.

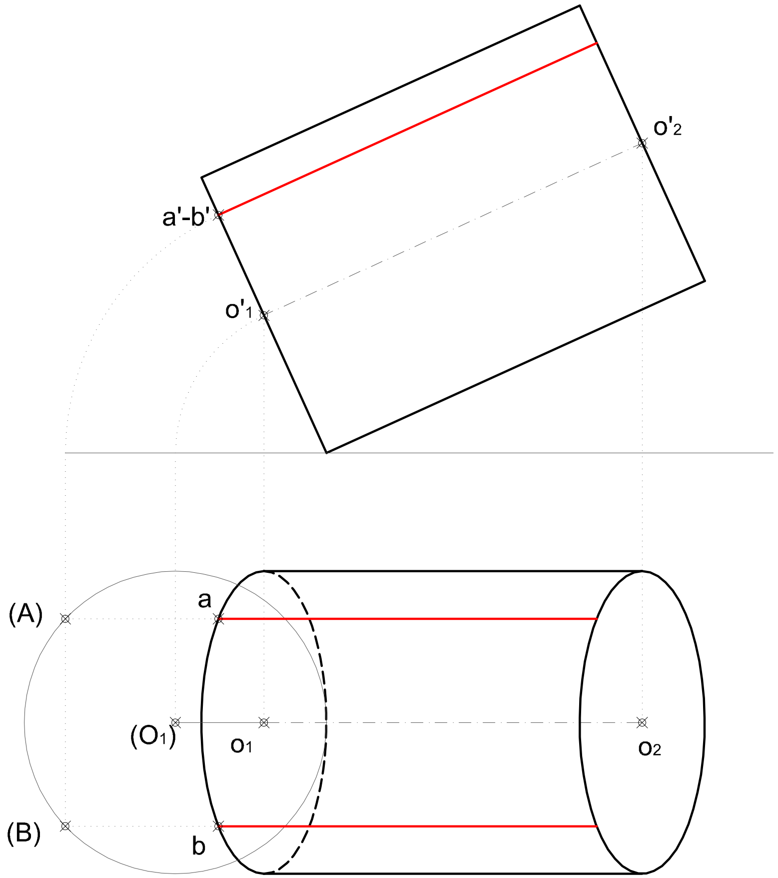


En el caso del ejemplo, vamos a calcular la traza de un cono recto de revolución con su eje en posición frontal.

- El plano horizontal corta a todas las generatrices y por consiguiente la sección es una elipse y cuya proyección vertical se corresponde con un segmento.
- El eje (**1-2**) se halla por la intersección de las generatrices de contorno aparente vertical y que se encuentran en el plano frontal que contiene al eje del cono.
- El punto (**O**) centro de la elipse está en el punto medio del eje (**1-2**).
- La magnitud del eje (**3-4**) se calcula por la cuerda de la sección recta que produce al cono un plano perpendicular al eje pasando por (**O**).
- Para hallar las generatrices de contorno aparente horizontal, así como sus puntos (**5**) y (**6**) de tangencia, nos apoyamos de una esfera inscrita en el cono.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- Como ya comentamos en los conceptos básicos, dentro del cilindro de revolución nos podemos encontrar tres tipo de secciones planas y que dependen de la posición del plano con respecto al cilindro y que vamos a enumerar con planos de canto ya que será a esta vista a la que recurriremos en todos los casos de secciones planas.

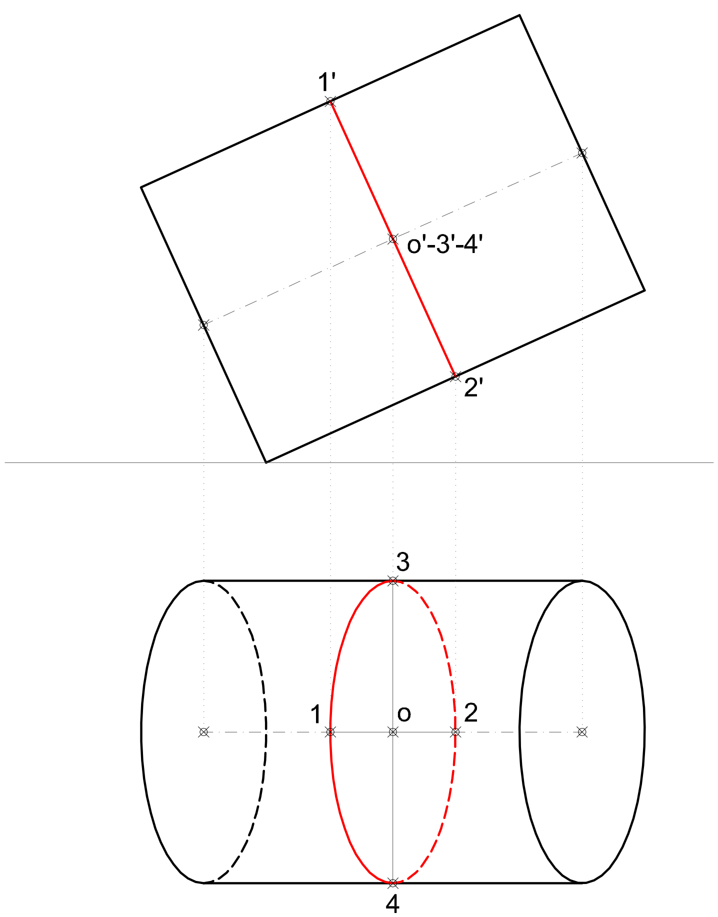


SECCIÓN DOS GENERATRICES:

El plano es paralelo al eje del cilindro.

- La solución son las generatrices que parten de los puntos (**A**) y (**B**).
- Para encontrar con total exactitud estos puntos nos apoyamos en el abatimiento de una de sus bases.

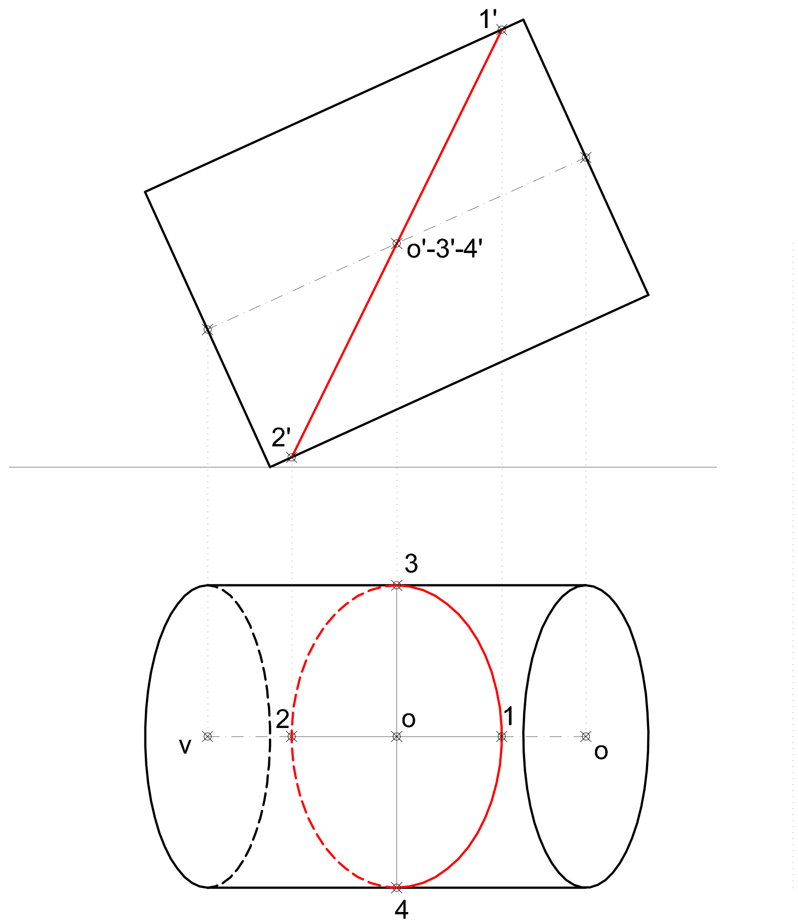
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez



SECCIÓN CIRCUNFERENCIA:

Secciones producidas por planos perpendiculares al eje del cilindro.

- El centro (**C**) de la circunferencia sección se encuentra en la intersección del plano con el eje, siendo el radio de la circunferencia sección el radio del cilindro.



SECCIÓN ELIPSE:

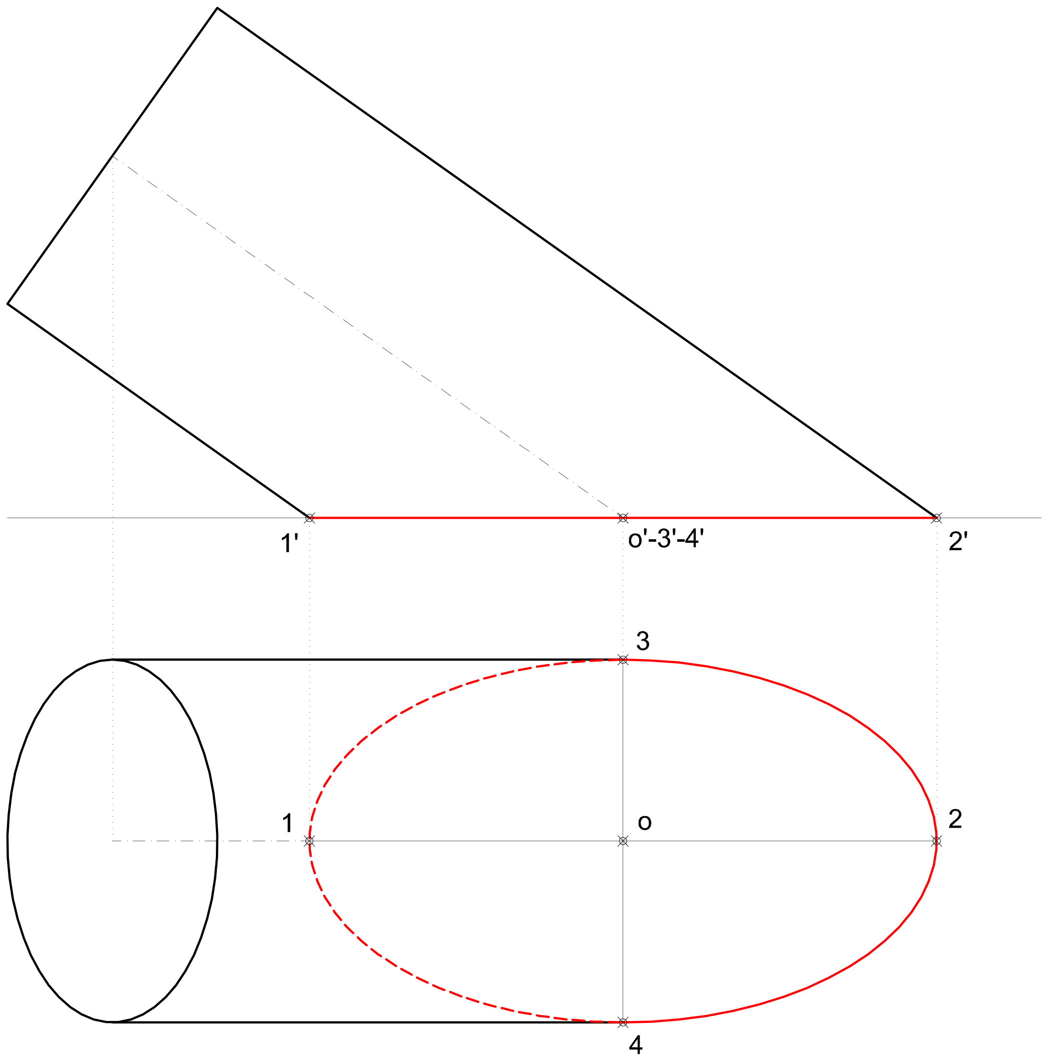
Secciones producidas por planos que cortan a todas las generatrices.

- La magnitud del eje (**3-4**) como ya hemos comentado coincide con el diámetro del cilindro y por consiguiente son puntos de las generatrices de contorno aparente horizontal.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

- ***TRAZA DE UN CILINDRO RECTO DE REVOLUCIÓN .***

Se denomina traza de un cilindro a la sección que le produce el plano horizontal de proyección y su tipología va a depender de como esté el plano con respecto al cilindro.



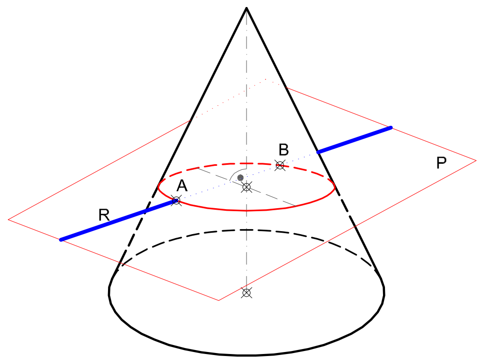
En el caso del ejemplo, vamos a calcular la traza de un cilindro recto de revolución con su eje en posición frontal.

- El plano horizontal corta a todas las generatrices y por consiguiente la sección es una elipse y cuya proyección vertical se corresponde con un segmento.
- El eje (**1-2**) se halla por la intersección de las generatrices de contorno aparente vertical y que se encuentran en el plano frontal que contiene al eje del cilindro.
- El punto (**O**) centro de la elipse se encuentra en el eje.
- La magnitud del eje (**3-4**) coincide con el diámetro del cilindro.

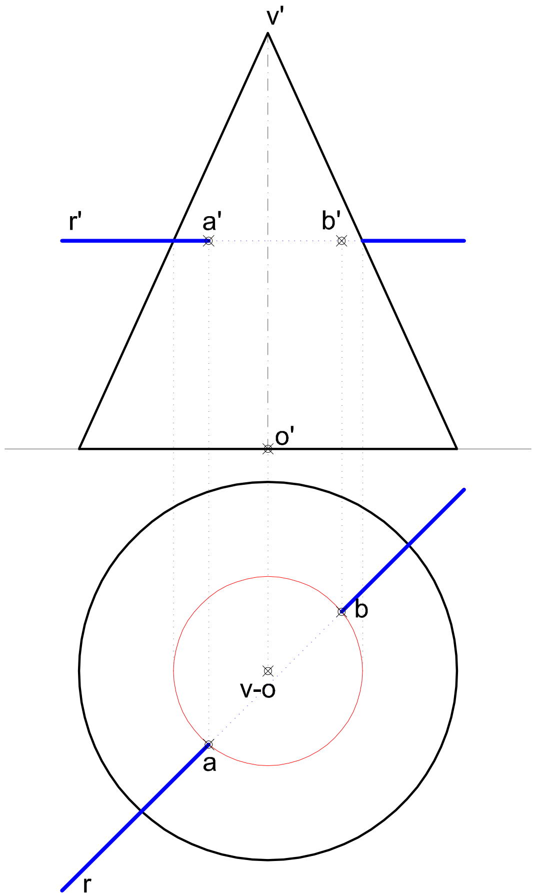
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Partiendo de la premisa de que la intersección que produce una recta en un cono son dos puntos, estos casos los resolveremos aplicando el método general de intersección de recta con otro elemento y que consiste en apoyarnos en un plano auxiliar que contenga a la recta.

En estos casos y por lo visto en secciones planas, el plano auxiliar que se debe tomar es aquel cuya sección con el cono sea la más elemental posible.



- ***PLANOS AUXILIARES DEL TIPO PROYECTANTES***

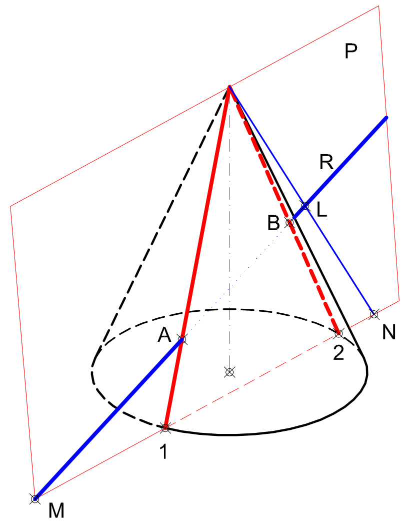


Tomaremos como auxiliares **planos proyectantes** en aquellos casos en que la sección que producen estos al cono sean circunferencias y que estas se proyecten como tales sobre alguno de los planos de proyección.

Por tanto son casos adecuados para:

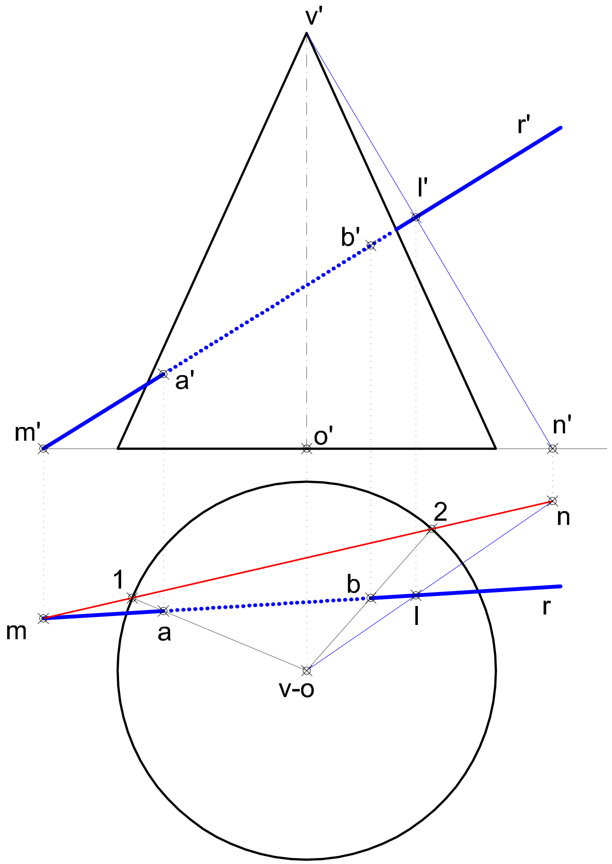
- Intersección de rectas horizontales con conos de eje vertical.
- Intersección de rectas frontales con conos de eje de punta.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez



- ***PLANOS AUXILIARES QUE CONTENGAN AL VÉRTICE DEL CONO.***

En estos casos y por lo visto en secciones planas, el plano auxiliar que contenga al vértice del cono su sección se reduce a dos rectas generatrices.



Vamos a continuación a enumerar los pasos para la realización de este caso en sistema diédrico.

1. El plano auxiliar es el que definen la recta (**R**) e el vértice (**V**).

2. Hallamos la intersección del plano con el de la base del cono mediante uniendo las trazas, (**M**) de la recta (**R**) y (**N**) de la recta resultante de unir el vértice con un punto (**L**) de la recta.

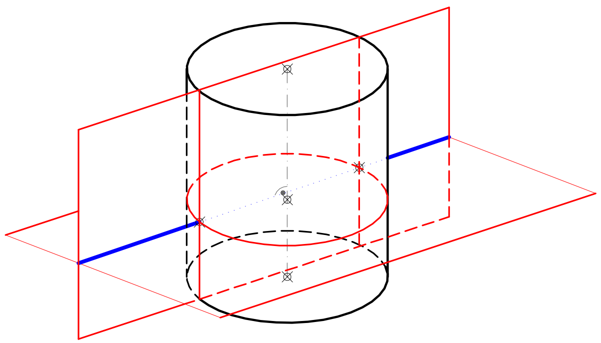
3. Los puntos (**1** y **2**), intersección de la traza (**M-N**) del plano con la base del cono, unidos con el vértice nos dan las generatrices sección.

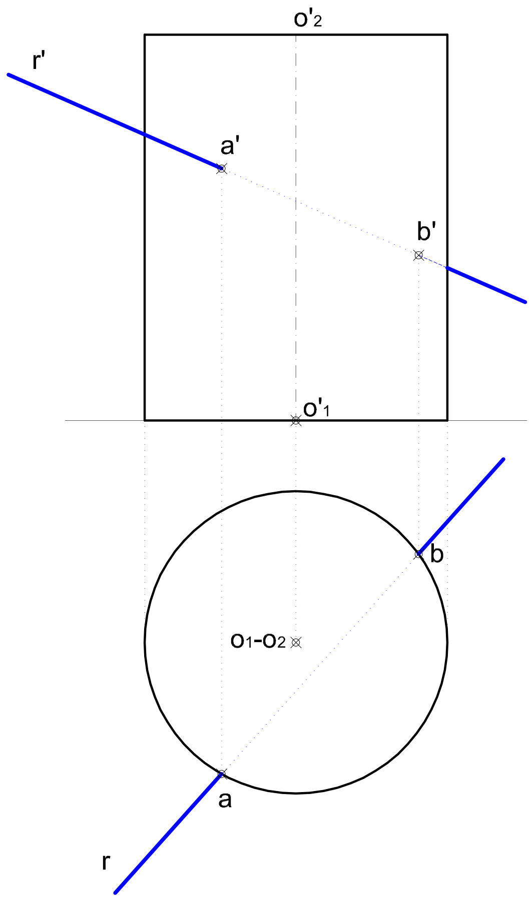
4. Los puntos (**A** y **B**) comunes a las generatrices y a la recta son los puntos buscados.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Partiendo de la premisa de que la intersección que produce una recta en un cilindro son dos puntos, estos casos los resolveremos aplicando el método general de intersección de recta con otro elemento y que consiste en apoyarnos en un plano auxiliar que contenga a la recta.

En estos casos y por lo visto en secciones planas, el plano auxiliar que se debe tomar es aquel cuya sección con el cilindro sea la más elemental posible.





- ***INTERSECCIÓN DE RECTA CON CILINDRO VERTICAL.***

Este caso se puede considerar como directo ya que al proyectarse el cilindro horizontalmente como una circunferencia, los puntos (**A** y **B**) de intersección se encuentran donde la proyección horizontal de la recta corta a la circunferencia.

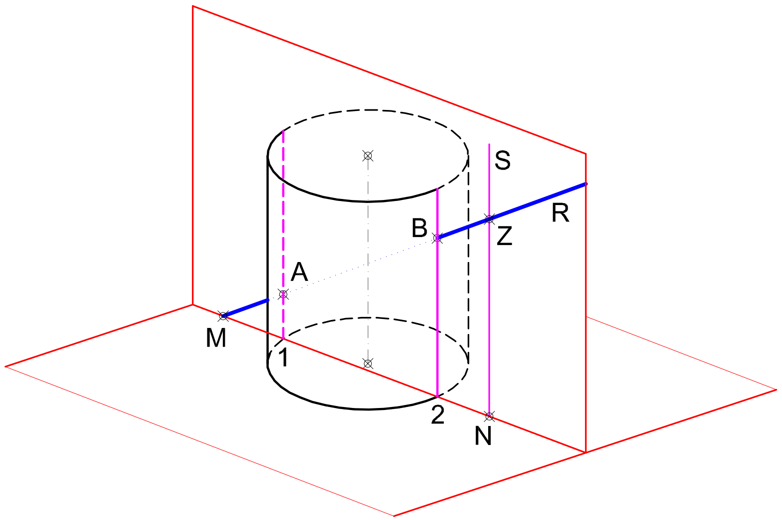
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

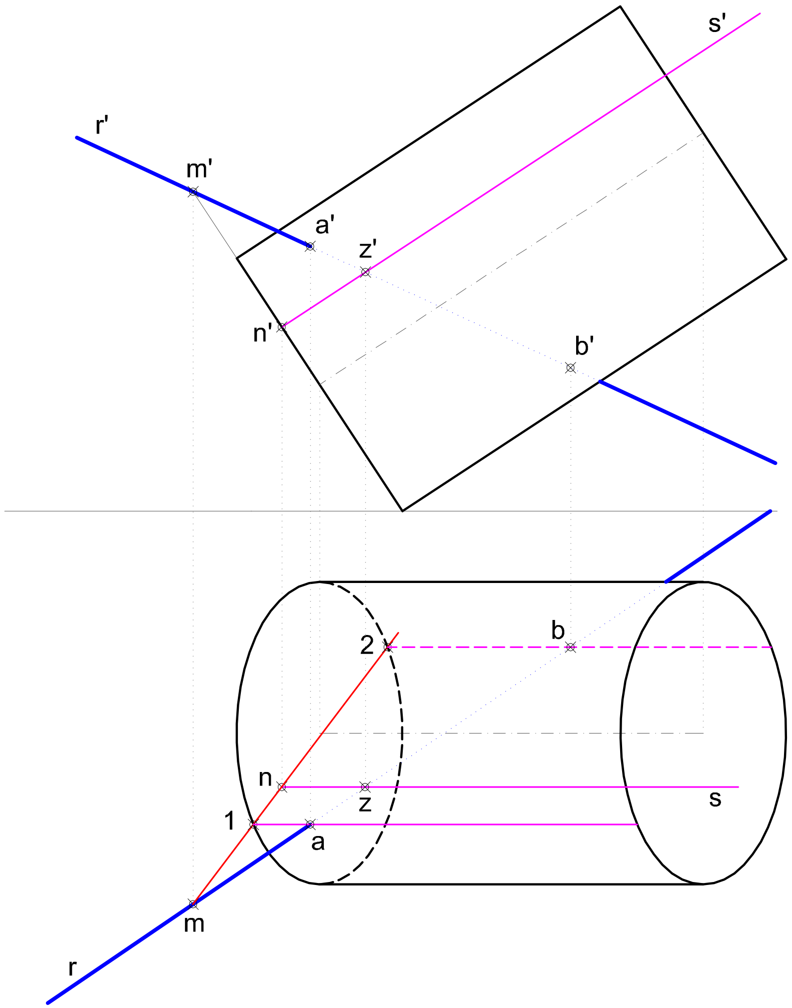
En el resto de casos de intersección recta con cilindro, vamos a aplicar el método general y que consiste en definir un plano que conteniendo a la recta corte al cilindro según generatrices. Este plano vendrá definido por la recta y por una paralela a las generatrices.

Vamos a continuación a enumerar los pasos en un caso de cilindro frontal y que nos servirá como base para cualquier cilindro.

- ***INTERSECCIÓN DE RECTA CON CILINDRO FRONTAL.***

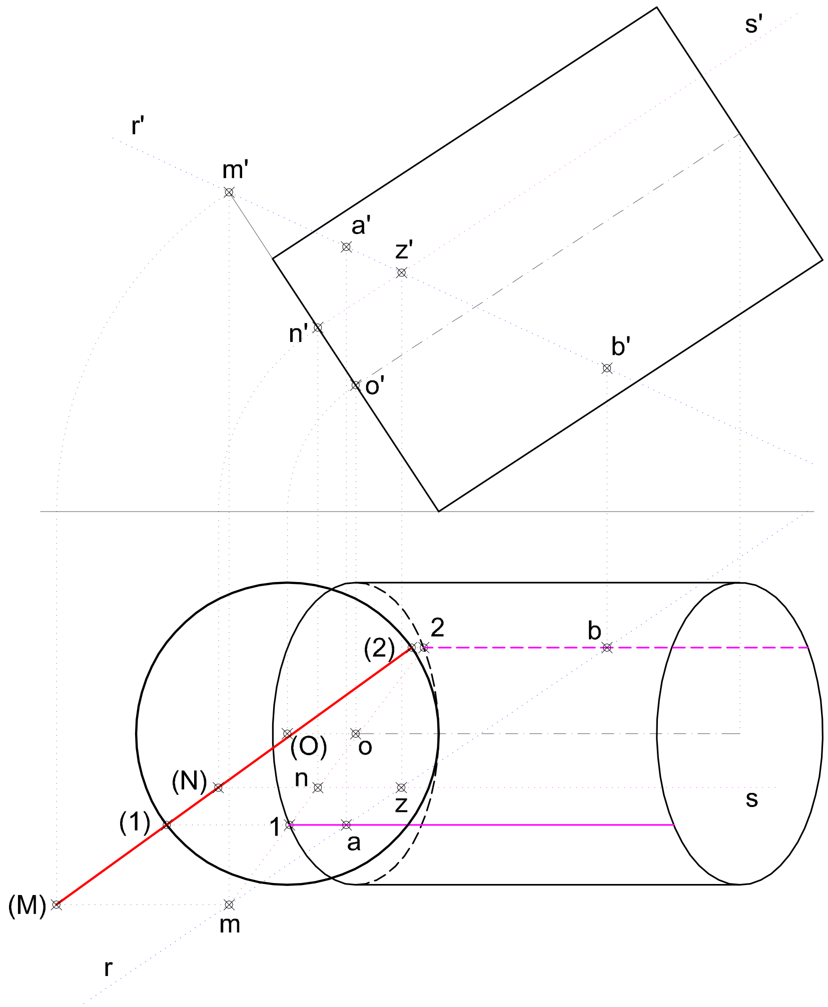
1. Por un punto (**Z**) de la recta (**R**) trazamos una recta (**S**) paralela a las generatrices.
2. Hallamos la intersección del plano que definen (**R** y **S**) con el plano de una de las bases del cilindro, en nuestro caso la recta (**M-N**) resultante de unir los puntos de corte de las rectas (**R** y **S**) con el plano de la base.
3. Donde la recta (**M-N**) corta a la base (puntos **1** y **2**), parten las generatrices sección del plano que definen (**R** y **S**) con el cilindro.
4. Los puntos (**A** y **B**) de intersección de la recta (**R**) con las generatrices que parten de los puntos (**1** y **2**) son la solución buscada.





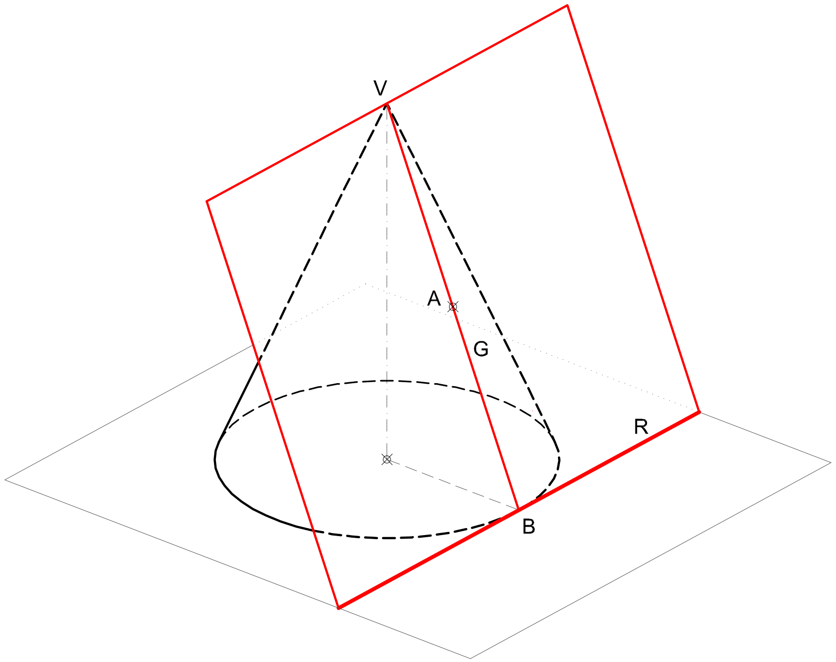
Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

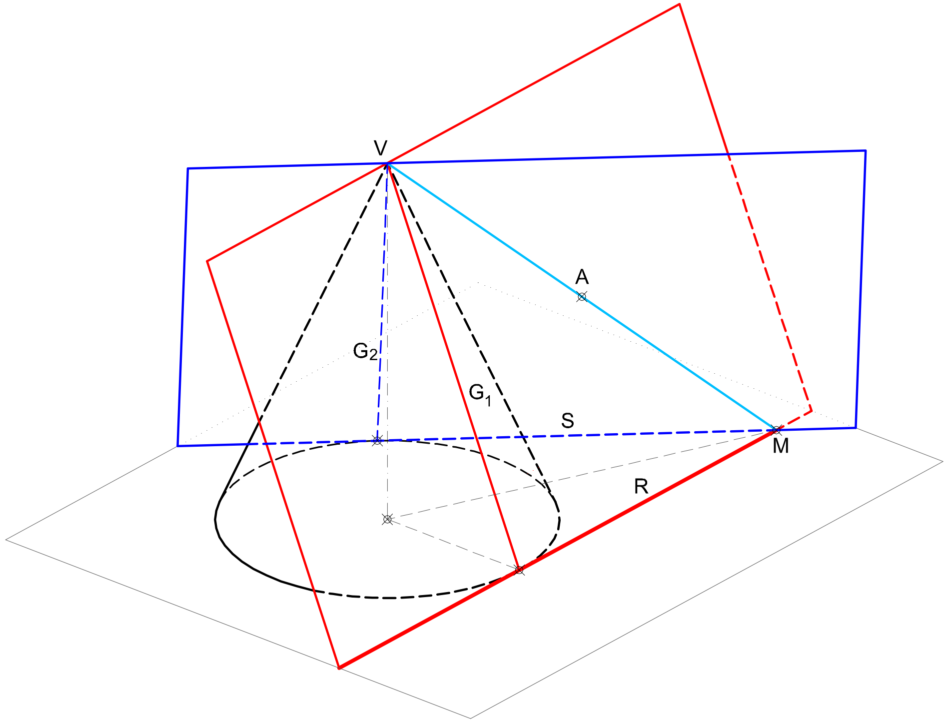
Para hallar con exactitud los puntos (**1** y **2**) de partida de las generatrices sección, nos apoyamos en el abatimiento de la **circunferencia base** y la recta **(M-N)**.



Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Como ya se comento en los conceptos básicos, " ***todo plano tangente** a un cono contiene a una de sus generatrices y por lo tanto al vértice y la recta intersección del plano tangente con el plano de una directriz es tangente a esta*" .





PLANO TANGENTE EN UN PUNTO DE LA SUPERFICIE:

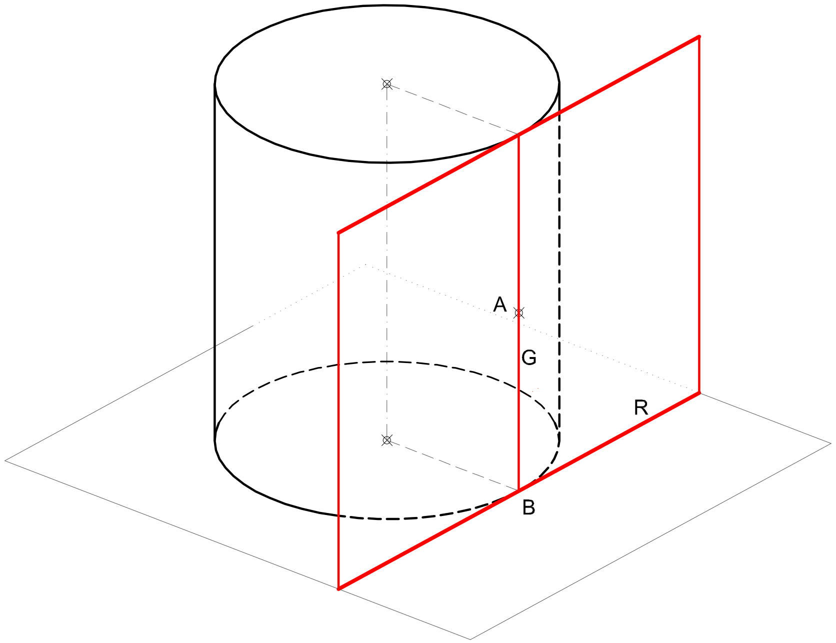
- El plano tangente, contiene a la generatriz (**G**) que pasa por el punto (**A**).
- El plano tangente contiene a la recta (**R**), tangente a la directriz en el punto (**B**) pié de la generatriz de tangencia.
- El plano queda definido por las rectas (**G**) y (**R**).

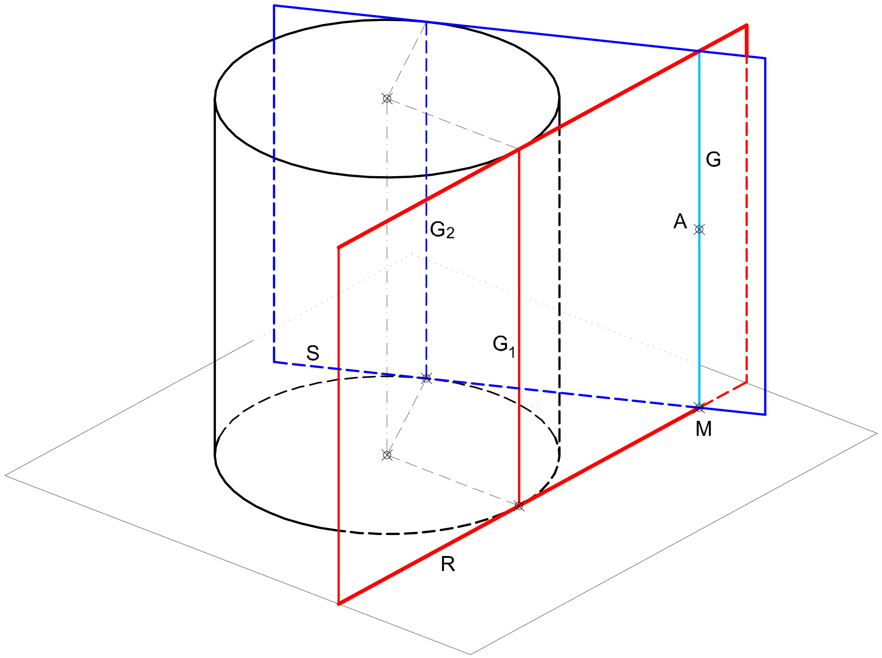
PLANOS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR:

- Los planos tangentes contienen a la recta (**V-A**) resultante de unir el vértice con el punto (**A**).
- Los planos tangentes contienen a las rectas (**R**) y (**S**) tangentes a la directriz desde el punto (**M**) de intersección de la recta (**V-A**) con el plano de la citada directriz.
- Las generatrices (**G_1** y **G_2**) de tangencia son las resultantes de unir los puntos de tangencia anteriores con el vértice.

Pascual Marín Moreno
Inmaculada G. Gutiérrez

Como ya se comento en los conceptos básicos, " ***todo plano tangente a un cilindro contiene a una de sus generatrices y la recta intersección del plano tangente con el plano de una directriz es tangente a esta"*** .





PLANO TANGENTE EN UN PUNTO DE LA SUPERFICIE:

- El plano tangente, contiene a la generatriz (**G**) que pasa por el punto (**A**).
- El plano tangente contiene a la recta (**R**), tangente a la directriz en el punto (**B**) pié de la generatriz de tangencia.
- El plano queda definido por las rectas (**G**) y (**R**).

PLANOS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR:

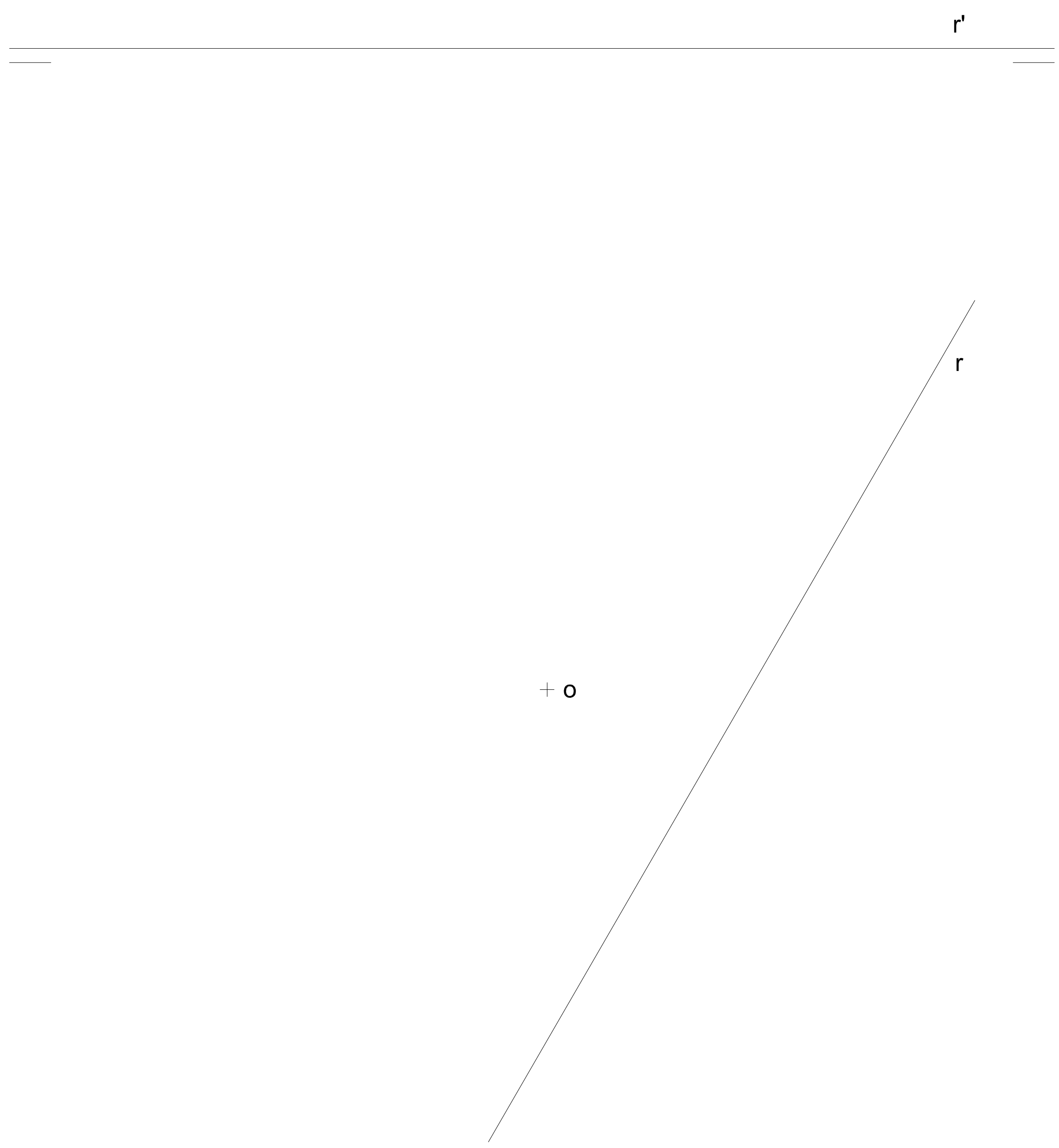
- Los planos tangentes contienen a la recta (**G**) paralela a las generatrices por el punto (**A**).
- Los planos tangentes contienen a las rectas (**R**) y (**S**) tangentes a la directriz desde el punto (**M**) de intersección de la recta (**G**) con el plano de la citada directriz.
- Las generatrices (**G_1** y **G_2**) de tangencia son las que parten de los puntos de tangencia anteriores.

APELLIDOS .... NOMBRE .... Grupo ....

En el plano definido por el punto **O** y la recta **R** y cuyo ángulo de pendiente es de **60º**, se encuentra la base de una pirámide regular cuadrada, siendo **O** el centro de la base y estando el lado de menor cota de la misma sobre la recta **R**.
Se pide:

1. Dibujar la **pirámide** de mayor cota posible sabiendo que su vértice está en el plano horizontal de proyección.
2. Representar la **sección** que produce en la pirámide el plano que contiene a la recta **R** y al punto medio de la altura.

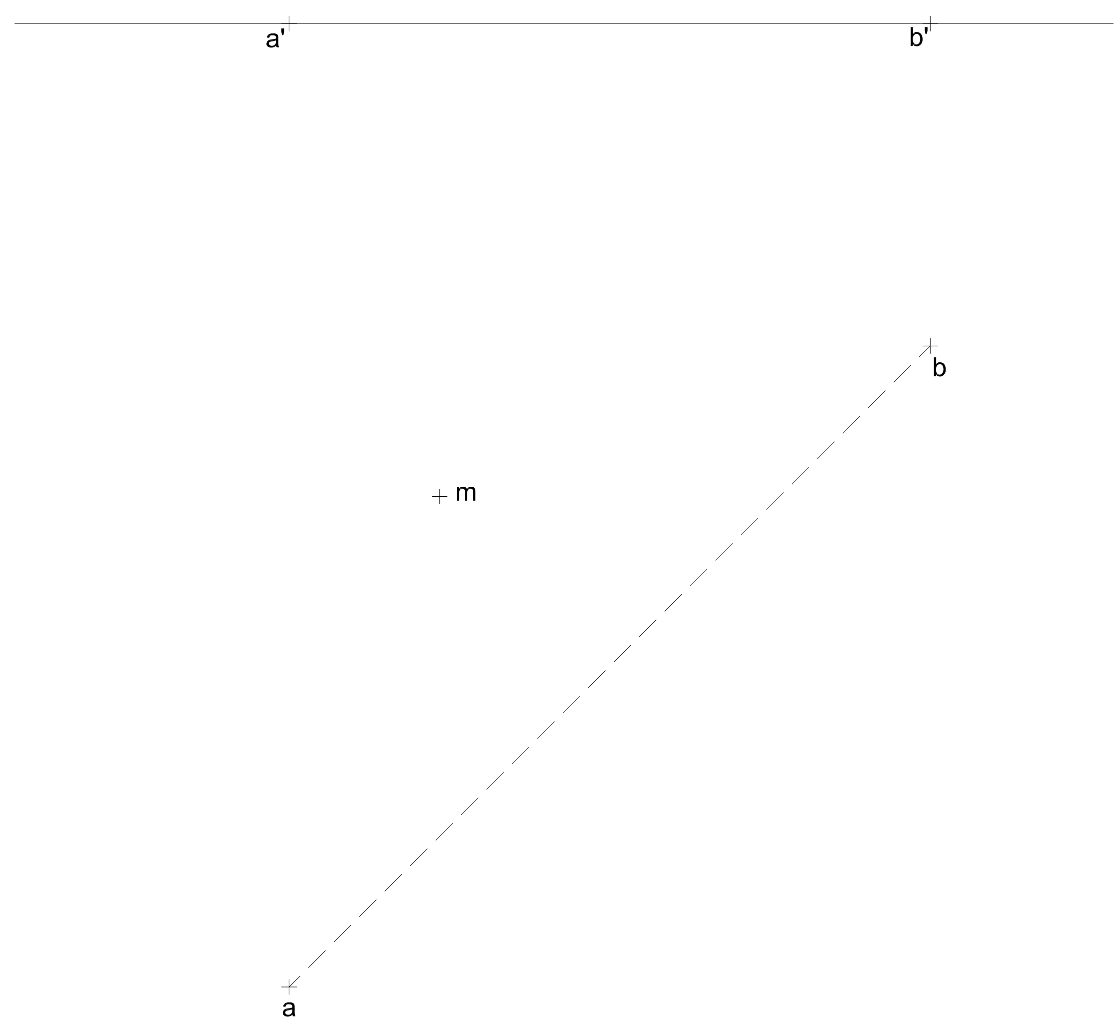
Puntuación: 3 puntos. Tiempo: 40 minutos.



El segmento **AB** es la arista de menor cota de un tetraedro regular, siendo **M** el punto medio de la arista opuesta. Se pide:

1. Dibujar el **poliedro**.
2. Hallar la **sección cuadrada** que tiene dos de sus lados paralelos a la arista AB.
3. Representar la **esfera** tangente a las aristas.

Puntuación: 3'5 puntos. Tiempo: 40 minutos.



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE EDIFICACIÓN - Universidad Politécnica de Madrid | Curso 2020-2021

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA I | Sistema Diédrico | Evaluación Final Ordinaria (febrero 2021)

APELLIDOS .... NOMBRE .... Grupo ......

Los puntos **A** y **B** pertenecen a una esfera cuyo centro se encuentra sobre la recta **R** dada, se pide:

1. Representar la **esfera**.
2. Dibujar otra esfera de **3 cm** de radio tangente a la anterior cuyo centro se encuentra en la recta **R** con la mayor cota posible.
3. Hallar la **intersección** de la recta **R** con ambas esferas estudiando la visibilidad del conjunto (**recta y esferas**).

Puntuación: 3'5 puntos. Tiempo: 40 minutos.