CRISSER
Centro de Estudios Universitarios

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS

TEMARIO

TEMA 1: LDT.
TEMA 2: PARÁMETROS S.
TEMA 3: ADAPTACIÓN.
TEMA 4: GUÍAS DE ONDA CONDUCTORAS.
TEMA 5: GUÍAS DE ONDA DIELÉCTRICAS Y FIBRA ÓPTICA.

LABORATORIO ⇒ 3 PRÁCTICAS

EVALUACIÓN

30% LABORATORIO (≥ 5)

70% 3 PARCIALES (TEST) Y EXAMEN FINAL (≥ 5)

RAÚL

679 833 504

raulcrisser@yahoo.es

Últimas Clases

Domingo 22 Diciembre 9:30 - 11:30

Sábado 11 Enero 8:30 - 11:30

Miércoles 15 Enero 15:30 - 19:30

- Índice

- Líneas de transmisión y Parámetros S -

- Test TPO Primer día
- Teoría ldt 2-9
- Teoría Parámetros S 10-15
- Ejemplos Parámetros S 16-19
- Problema 1 Febrero 2008
- Problema 1 Febrero 2009
- Enero 2012
- Problema 3 Febrero 2006
- Problema 2 Junio 2006
- 1º Test 2012-2013
- Chuletario ldt + Param. S.

- Adaptación

- Guía Adaptación 33-50
- Problema 2 Septiembre 2000
- Problema 3 Septiembre 2003
- Problema 3 Febrero 2003
- Problema 1 Junio 2002
- Problema 2
- Problema 2007
- Problema 1
- Problema 1 Septiembre 2004
- Teoría banda ancha 71-74
- Problema 3 Febrero 2011
- Problema 3 Diciembre 2004
- Problema 1 Septiembre 2006
- Problema 1 Febrero 2005
- Problema 3 Septiembre 2005
- Problema 1 Septiembre 2004
- Problema 1 Septiembre 2008
- Politécnica Superior.
- Problema 2 Febrero 2010
- Problema 2 Mayo 2005.

- Guías de onda

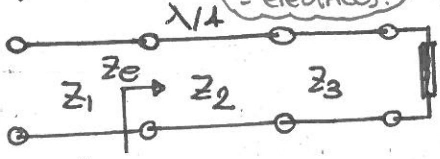
- Teoría Guías 1-10
- Teoría FO
- Resumen Guías.
- Problema 5 Febrero 2000
- Problema 2 ~~Febrero~~ Diciembre 2004
- Problema 1 Junio 2006
- Problema 3 Septiembre 2005
- Problema 3 Febrero 2006
- Problema 1 Septiembre 2006
- Problema 1 Febrero 2007
- Problema 6 Junio 2002
- Problema 2 Septiembre 2007
- Problema 1 Julio 2003
- Problema 1 Diciembre 2010
- 3º Test TPO 2012-2013

- ...nodos

- ... Septiembre 2006
- Problema 2
- Problema 3 Septiembre 2007
- Problema Guía circular.
- Problema 5 Febrero 2006
- 2º Test TPO 2013-2014

Adaptación $z=R+jX$ → R: Resistencia, X: Reactancia $y=G+jB$ → G: Conductancia, B: Susceptancia $0\le|\rho(z)|\le 1$; $0\le\phi\le 2\pi$

Adaptador λ/4 (l/λ se expresa en º eléctricos.)

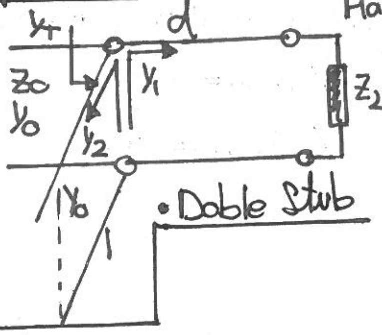


• Si hay adaptación → $z_2=\sqrt{z_1 z_3}$ (donde $z_e=z_1$) {Hacia generador: horario; Hacia carga: antihorario.}

• $z_e=\dfrac{z_2^2}{z_3}$ → ésto se cumple siempre.

• z_1 y $z_3 \in \mathbb{R}$

Simple Stub

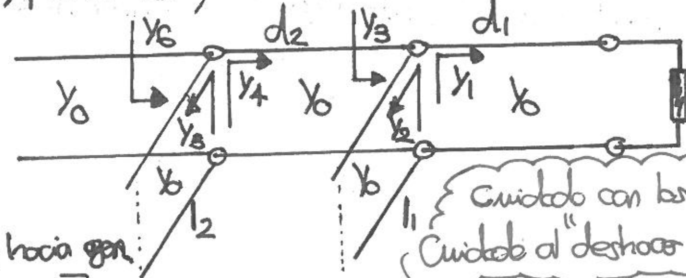


Hay que hallar d para que $Re(y_1)=y_0$ ó lo que es igual $Re(\bar{y}_1)=1$.

Tiene 2 soluciones: d', l' ó d'', l''.

$\bar{y}_4=\bar{y}_1+\bar{y}_2$; $\bar{y}_1=1+jB$; $\bar{y}_2=-jB$

• Doble Stub



d_1 suele ser dato. l_1, l_2 suelen ser incógnitas.

{Cuidado con los pasos 3 y 4 → claves. Cuidado al "deshacer el giro" →}

Consideraciones

y_1 se puede obtener girando y_L d_1 hacia gen.

Para conseguir adaptación: $y_6=y_0$; $\bar{y}_6=1$

y_2 e y_5 son imaginarias puras: $Re[\bar{y}_3]=Re[\bar{y}_1]=1$; $Re[y_4]=Re[y_6]=y_0$ → $Re[\bar{y}_4]=Re[\bar{y}_6]=1$

y_3 debe tener un valor tal que al girarlo una distancia d_2 hacia el generador debe obtenerse una y_4 con $Re[\bar{y}_4]=1$

Generalmente aparecen 2 sol y_3.

Pasos

$\bar{z}_L \to \bar{y}_L \to$ Giramos d_1 hacia generador, hallando $\bar{y}_1$.

. Se dibuja la circunferencia $Re[\,]=1$ girada la distancia d_2 hacia la carga. ↑ Problema sol. única No.

. y_3 se obtiene como inter-sección de esta circunferencia $Re[\,]=1$ girada, con la circunferencia de $Re[\,]=Re[\bar{y}_1]$.

· Una vez obtenido y_3, y_4 se obtiene girando y_3 la distancia d_2 hacia el generador. Con las condiciones impuestas a y_3, y_4 debe resultar sobre la circunferencia $Re[\,]=1$ → Parte real 1.

· $\bar{y}_1=G_1+jB_1$; $\bar{y}_3=G_3+jB_3$; $\bar{y}_4=1+jB_4$

· La longitud l_1 se obtendrá a partir del valor necesario en y_2 para que se cumpla: y_3 se ha obtenido sobre la circunferencia $Re[\bar{y}_1]$ → $\bar{y}_2=jB_3-jB_1=jB_2$.

$\bar{y}_2=\bar{y}_3-\bar{y}_1=G_3+jB_3-(G_1+jB_1)$ → y_3 se ha obtenido sobre la circunferencia $Re[\bar y_1]$

· La longitud se obtendrá a partir del valor necesario en y_5 para que se anule la parte imaginaria de y_4:

$\bar{y}_6=1=\bar{y}_4+\bar{y}_5=1+jB_4+jB_5$; $jB_5=-jB_4=-Im[\bar{y}_4]=l_2$

Normalización de impedancias: $\bar{z}(z)=\dfrac{z(z)}{z_0}=\dfrac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$; Desnormalizar impedancia: $z(z)=z_0\cdot\bar{z}(z)$

Normalización de admitancias: $\bar{y}(z)=y(z)\cdot y_0$; Desnormalización impedancia: $y(z)=\bar{y}(z)/y_0$

Adaptación Banda Ancha

Transformador Binomial $N\to$ nº Secciones.

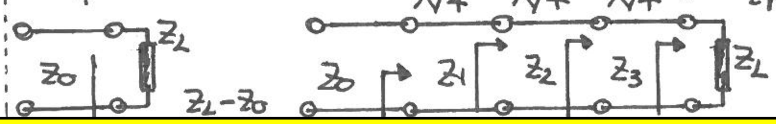
1er paso: $A=\rho_L\cdot 2^{-N}=\dfrac{z_L-z_0}{z_L+z_0}2^{-N}$

2º ... $N!$ ... $z=z_0$ ... $1+\rho_0$

• Transformador Chebyshev (ó de rizado cte en la banda de paso)

– Esquema inicial: – Esquema final

$\rho_n=\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}+z_n}$



$\rho_L=\dfrac{z_L-z_0}{z_L+z_0}$ ... ρ_1 ... ρ_2 ... ρ_3 ... $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{}$

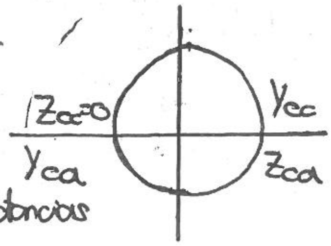
0 ... π/4 ... π/2 ... 3π/4 ... π

Ancho de banda relativo ... $(1/\rho_m)^{1/N}$

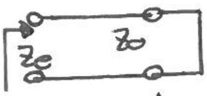
Valor máximo coef. reflexión a la entrada

Anotaciones

- Grados del coeficiente de reflexión no son los grados eléctricos de la ldt. → (Se expresa normal).
- Al calcular potencia usar $Re[Z]$. Para tensión $|Z|$.
- • Para medir longitudes.

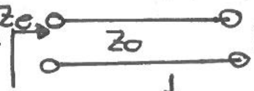


Cortocircuito ($Z_L=0$)



$Z_e = j Z_0 \, tg \, kz$

• **Circuito abierto** ($Z_L=\infty$)



$Z_e = -j Z_0 \, cotg \, kz$

Los arcos de circunferencia que se encuentran por encima del eje real corresponden a reactancias inductivas (partes imaginarias positivas). ← En impedancia →
Los arcos de circunferencia que se encuentran por debajo del eje real corresponden a reactancias positivas (partes img −)

Stubs serie → impedancia • Stubs paralelo → admitancia.

Cuidado con la impedancia característica de cada línea.

$Z_{bobina} = \overbrace{j\omega L}^{+}$ $\quad Y_{bobina} = -\dfrac{j}{\underbrace{\omega L}_{+}}$

$Z_{condensador} = -\dfrac{j}{\underbrace{\omega C}_{-}}$ $\quad Y_{condensador} = j\omega C$

Casos Especiales

Carga Adaptada

$Z_L = Z_0$; $\rho_L = 0$; $SWR = 1$; $z(d) = z_0$; $\rho(d) = 0$

Circuito Abierto

$Z_L = \infty$; $\rho_L = 1$; $SWR = \infty$

ldt con pérdidas: $z(d) = z_0 \coth(\gamma d)$; $\rho(d) = e^{-2\alpha d} e^{-j2\beta d}$

ldt sin pérdidas: $z(d) = -j z_0 \cot(\beta d)$; $\rho(d) = e^{-j2\beta d}$

Carga imaginaria pura

$|\rho_L| = 1$; $\phi_L = \arctg\left[\dfrac{2 x_L z_0}{x_L^2 - z_0^2}\right]$

ldt con pérdidas: $z(d) = z_0 \cdot \dfrac{j x_L + z_0 \tanh(\gamma d)}{z_0 + j x_L \tanh(\gamma d)}$; $\rho(d) = e^{-2\alpha d} e^{-2j\beta d} e^{j\phi_L}$

ldt sin pérdidas: $z(d) = z_0 \cdot \dfrac{z_L + j z_0 \tg(\beta d)}{z_0 + j z_L \tg(\beta d)}$; $\rho(d) = e^{-2j\beta d} e^{j\phi_L}$

Cortocircuito

$\rho_L = -1$; $Z_L = 0$; $SWR = \infty$

ldt con pérdidas: $z(d) = z_0 \tanh(\gamma d)$; $\rho(d) = -e^{-2\alpha d} e^{-2j\beta d}$

ldt sin pérdidas: $z(d) = j z_0 \tg(\beta d)$; $\rho(d) = -e^{-2j\beta d}$

Parámetros S

• **Definición de ondas de Potencia**

$a_i = \dfrac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}}$ onda entrante al dispositivo; $P_{in} = \frac{1}{2}|a_i|^2$

$V_i = V_i^+ + V_i^-$

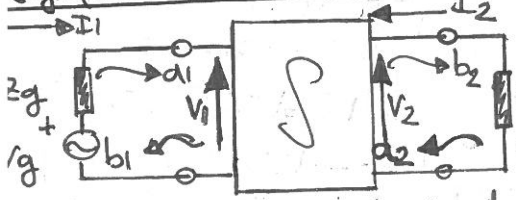
$I_i = I_i^+ + I_i^- = \dfrac{V_i^+}{Z_{0i}} - \dfrac{V_i^-}{Z_{0i}}$

$b_i = \dfrac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}}$ onda saliente del dispositivo; $P_{ref} = \frac{1}{2}|b_i|^2$

Módulos $|a_i|^2$ y $|b_i|^2$

Norma general → $Z_0 = 50\,\Omega$

Significado de los Parámetros S



$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$ → Matriz Scattering: $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$; $S_{ij}(dB) = 20 \log|S_{ij}|$

$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$

• $S_{11} = \dfrac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \dfrac{V^-}{V^+} = \rho_{ent}$ → Coeficiente de reflexión puerta 1 con $Z_2 = Z_{ref}$ → $\rho = \dfrac{Z_{ent/sal} - Z_0}{Z_{ent/sal} + Z_0}$

• $S_{22} = \dfrac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \dfrac{V_2^-}{V_2^+} = \rho_{sal}$

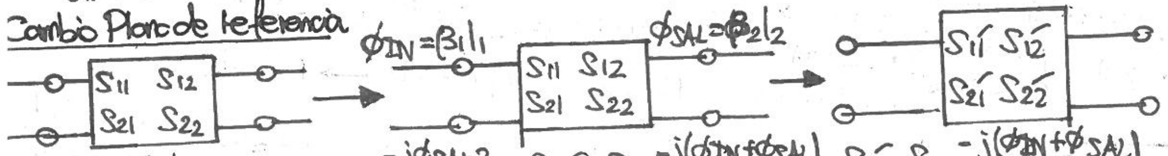
$S_{12} = \dfrac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0}$ → Ganancia compleja (puerta 2 con 1 con $Z_1 = Z_{ref}$.

$S_{21} = \dfrac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0}$

*Nota: Al ir calculando los parámetros, poner siempre su esquema.

Cambio Plano de referencia

$\phi_{IN} = \beta_1 l_1$; $\phi_{SAL} = \beta_2 l_2$



$S_{11}' = S_{11} e^{-j2\phi_{IN}}$; $S_{22}' = S_{22} e^{-j\phi_{SAL} 2}$; $S_{12}' = S_{12} e^{-j(\phi_{IN}+\phi_{SAL})}$; $S_{21}' = S_{21} e^{-j(\phi_{IN}+\phi_{SAL})}$ matriz S traspuesta y conjugada.

Propiedades

Si la red es pasiva → $|S_{ii}| \leq 1$; $|S_{ij}| \leq 1$

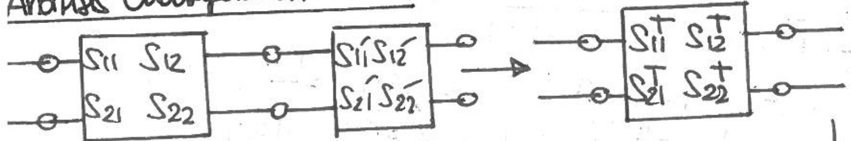
Si la red es recíproca ó simétrica → $S = S^T$ $\left\{ S_{ij} = S_{ji} \left\{ \begin{matrix} S_{11} = S_{22} \\ S_{12} = S_{21} \end{matrix} \right. \right.$ (En un cuadripolo)

Si la red no tiene pérdidas: $S^{T*} \cdot S = I$

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* & S_{31}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{32}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & S_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|S_{ii}|^2 = S_{ii}^* \cdot S_{ii}$

Análisis Cuadripolos en Cascada



1er Paso

Se calcula para cada cuadripolo $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ donde: $x_{11} = \dfrac{1}{S_{21}}$; $x_{12} = \dfrac{-S_{22}}{S_{21}}$; $x_{21} = \dfrac{S_{11}}{S_{21}}$; $x_{22} = S_{12} - \dfrac{S_{11} S_{22}}{S_{21}}$

Obtendremos así 2 matrices: $X^{(1)}$ y $X^{(2)}$ para cada cuadripolo.

*Nota: Si tenemos N cuadripolos en cascada, el paso 1 hay ... N veces y el paso 2 es: $X^T = X^{(1)} \cdot X^{(2)} \cdots X^{(N)}$

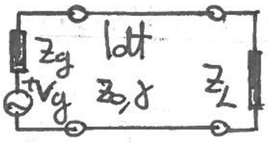
Parámetros ABCD de una ldt sin pérdidas:

• Al hacer un divisor de tensión, en el numerador ... la Z que queremos.

Chuletario TPO

LDT Parámetros Primarios → L, C, G, R

Parámetros Secundarios → $Z_0, V_\phi, \gamma=\alpha+j\beta$

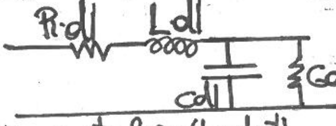


Ecuaciones Diferenciales

ldt sin pérdidas: $V(x)=V_i \cdot e^{-j\beta x}+V_r e^{+j\beta x}$; $I(x)=I_i e^{-j\beta x}+I_r e^{j\beta x}=\frac{1}{Z_0}(V_i e^{-j\beta x}-V_r e^{j\beta x})$

ldt con pérdidas: $V(x)=V_i e^{-\gamma x}+V_r e^{\gamma x}=V_i e^{-\alpha x-j\beta x}+V_r e^{\alpha x+j\beta x}$

$I(x)=I_i e^{-\gamma x}+I_r e^{\gamma x}=I_i e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\beta x}+I_r e^{-\alpha x} e^{j\beta x}=\frac{1}{Z_0}(V_i e^{-\gamma x}-V_r e^{+\gamma x})$



$Z=R+jL\omega$; $Y=G+jC\omega$

$\gamma=\alpha+j\beta$; $\gamma \to$ cte propagación (m^{-1}) ; $\alpha \to$ cte. atenuación $(Np\,m^{-1})$; $\beta \to$ cte fase $(rad\,m^{-1})$

$G\neq 0 \to$ pérdidas dieléctrico

$R\neq 0 \to$ pérdidas conductor

$V(z,t)=Re(V(z)e^{j\omega t})$; $I(z,t)=Re(I(z)e^{j\omega t})$

Parámetros Secundarios

ldt sin pérdidas: $Z_0=\sqrt{L/C}$; $\gamma=j\omega\sqrt{LC}$; $\alpha=0$; $\beta=\omega\sqrt{LC}$; $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{LC}$; $V\phi=1/\sqrt{LC}$

ldt con pérdidas: $Z_0=\sqrt{Z/Y}$; $\gamma=\sqrt{Z\cdot Y}$; $\alpha=Re(\gamma)$; $\beta=Im(\gamma)$; $\lambda=2\pi/\beta$; $V\phi=\omega/\beta$

Condiciones para ldt bajas pérdidas: $(R\ll L\omega)$ y $(G\ll C\omega)$

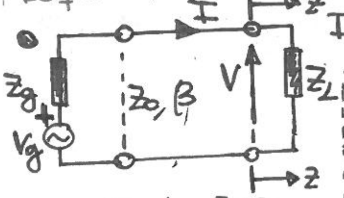
ldt bajas pérdidas: $Z_0=\sqrt{L/C}$; $\alpha=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}+\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$; $\beta=\omega\sqrt{LC}$; $\lambda=2\pi/\omega\sqrt{LC}$; $V\phi=1/\sqrt{LC}$

D.O.E → Diagrama onda Estacionaria

Parám. Primarios → $L=\frac{Z_0}{V\phi}$ (H/m) ; $C=\frac{1}{Z_0 V\phi}$ (F/m) ; $G=\frac{\omega\varepsilon''}{\varepsilon'}C=\frac{2\alpha_d}{Z_0}$ (S/m) ; $R=2\alpha_c Z_0$ (Ω/m)

Esquemas de trabajo

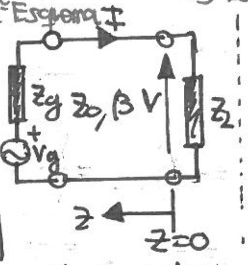
1º Esquema $(z<0)$



$V(z)=V_L^+ e^{-j\beta z}+V_L^- e^{+j\beta z}$

$I(z)=\frac{1}{Z_0}(V_L^+ e^{-j\beta z}-V_L^- e^{+j\beta z})$

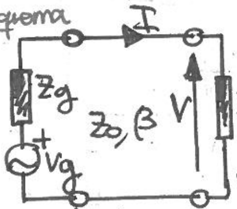
•2º Esquema



$V(z)=V_L^+ e^{+j\beta z}+V_L^- e^{-j\beta z}$

$I(z)=\frac{1}{Z_0}(V_L^+ e^{j\beta z}-V_L^- e^{-j\beta z})$

•3º Esquema



$V(z)=V_G^+ e^{-j\beta z}+V_G^- e^{+j\beta z}$

$I(z)=\frac{1}{Z_0}(V_G^+ e^{-j\beta z}-V_G^- e^{+j\beta z})$

* Nota: $V_G^+, V_G^-, V_L^+, V_L^-$ pueden ser complejos.

Relación onda Estacionaria

$ROE=COE=SWR=S=\frac{V_{máx}}{V_{mín}}=\frac{I_{máx}}{I_{mín}}=\frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|}$

→ Tx Total

$1\leq ROE\leq\infty$ → Reflex. total

* ROE sólo mide el módulo del coef. reflex.

Coeficiente de Reflexión

$\rho_L=|\rho_L|e^{j\phi_L}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}$; $Z_L=\infty \to$ C.A. ; $Z_L=0 \to$ C.C.

Esquema 1: $\rho(z)=\frac{V_L^-}{V_L^+}e^{+2j\beta z}=|\rho_L|e^{j(2\beta z+\phi_L)}$

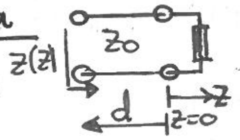
Esquema 2: $\rho(z)=|\rho_L|e^{-2\alpha z}e^{j(\phi_L-2\beta z)}$

$0\leq\rho\leq 1$; → Tx. Total → $(Z_L=Z_0)$; → Reflex. Total

El coeficiente de reflexión a una distancia "d" de la carga: $\rho_d=\rho_L\cdot e^{-j2\beta d}$; $\rho_L=\frac{V_{ref}}{V_{inc}}$

En una ldt sin pérdidas → $|\rho_L|$ cte

Impedancia en la línea



Impedancia de onda en una ldt: $Z(z)=\frac{V(z)}{I(z)}$

$Z_L=Z_0\cdot\frac{1+\rho_L}{1-\rho_L}$

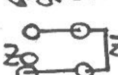
$Z_{máx}=\frac{V_{máx}}{I_{mín}}=Z_0 ROE \to \bar{Z}_{máx}=ROE$

$Z_{mín}=\frac{V_{mín}}{I_{máx}}=\frac{Z_0}{ROE} \to \bar{Z}_{mín}=\frac{1}{ROE}$

ldt sin pérdidas: $Z(z)=Z_0\cdot\frac{Z_L+jZ_0\,tg(\beta d)}{Z_0+jZ_L\,tg(\beta d)}$

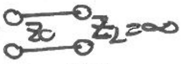
ldt con pérdidas: $Z(z)=Z_0\cdot\frac{Z_L+Z_0\tanh(\gamma z)}{Z_0+Z_L\tanh(\gamma z)}$

* Si la línea acaba en CC:



$Z(z)=jZ_0\,tg(\beta d)\in Im$

* Si la línea acaba en CA:



$Z(z)=-jZ_0\,cotg(\beta d)\in Im$

$\cos(2\beta z\pm\phi_L)=+1\to 2\beta z\pm\phi_L=2n\pi$

Tensión y Corriente en la ldt → Respecto esquema1/Esquema2.

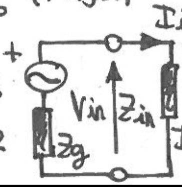
$|V(z)|=|V_L^+|\sqrt{1+|\rho_L|^2+2|\rho_L|\cos(2\beta z\pm\phi_L)}$; $|I(z)|=\frac{|V_L^+|}{Z_0}\sqrt{1+|\rho_L|^2-2|\rho_L|\cos(2\beta z\pm\phi_L)}$

Máximos de $|V(z)|$ ó mínimos de $|I(z)|$ se dan: $\cos(2\beta z\pm\phi_L)=+1\to V_{máx}=|V_L^+|(1+|\rho_L|)$ / $I_{mín}=\frac{|V_L^+|}{Z_0}(1-|\rho_L|)$

Mínimos de $|V(z)|$ ó máximos de $|I(z)|$ se dan: $\cos(2\beta z\pm\phi_L)=-1\to V_{mín}=|V_L^+|(1-|\rho_L|)$ / $I_{máx}=\frac{|V_L^+|}{Z_0}(1+|\rho_L|)$

La separación entre máx/mín consecutivos es de $\lambda/2$ en $|V(z)|$

La separación entre un máx y el siguiente mín en $|V(z)|$ y en $|I(z)|$ es $\lambda/4$



$V_{in}=V_G\cdot\frac{Z_{in}}{Z_G+Z_{in}}$

$I_{in}=V_G\cdot\frac{1}{Z_G+Z_{in}}$

Potencia en la ldt. Máxima potencia si $Z_G=Z_{in}^*$

Pérdidas por desadaptación.

Potencia incidente en la carga: $P_i=\frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2$. Potencia reflejada en la carga: $P_{rL}=|\rho_L|^2\cdot\frac{1}{2Z_0}|V_{iL}|^2$

$1dB=0{,}115Np$

Pérdidas de retorno:

Guía Rectangular → Modos TE: $E_z=0$; $H_z\neq 0$; Modos TM: $E_z\neq 0$; $H_z=0$

Modos $TM_{m,n}$ → Desde TM_{11}

$E_z=E_0\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$H_z=0$

$E_x=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$E_y=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$H_x=\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\cdot\frac{n\pi}{b}E_0\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$H_y=-\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\cdot\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

Modos $TE_{m,n}$ → $m=0, n=0$ → no válido

$E_z=0$

$H_z=H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$E_x=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\cdot\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$E_y=-\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\cdot\frac{m\pi}{a}H_0\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$H_x=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\cdot\frac{m\pi}{a}H_0\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

$H_y=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\cdot\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$

• Fórmulas Importantes $a\to$ anchura, $b\to$ altura

$\beta_0=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$; $\omega=2\pi f$ trabajo

$\beta_c=\omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}$; $\omega=2\pi f$ corte

$\gamma=\sqrt{\beta_c^2-\beta_0^2}=2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2-f_{trabajo}^2}$

$\beta\to$ desfase ó nº de onda. cuidado!

$\gamma\to$ de propagación del modo

$V_f\to$ velocidad de fase. $[\alpha]=Npm^{-1}$

$V_g\to$ velocidad de grupo ó propagación del modo

$\lambda\to$ longitud de onda. $[\lambda]=m$

$f>f_c\to\gamma=j\beta_g=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\sqrt{1-(f_c/f)^2}\ [m^{-1}]$ • $f<f_c\to\gamma=\alpha=2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2-f^2}\ [Npm^{-1}]$

Además: No vale para guía circular

$\lambda_0=\frac{2\pi}{\beta_0}$; $\lambda_c=\frac{2\pi}{\beta_c}$; $\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta_g}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$; $\frac{1}{\lambda_0^2}=\frac{1}{\lambda_g^2}+\frac{1}{\lambda_c^2}$

$\beta_c=\sqrt{\beta_x^2+\beta_y^2}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}=2\pi f_c\sqrt{\mu\varepsilon}\ [m^{-1}]$

$V_f=\frac{\omega}{\beta_g}=\frac{V_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\ [ms^{-1}]$, siendo $V_0=\frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\ [ms^{-1}]$

$V_g=\frac{\partial\omega}{\partial\beta_g}=V_0\cdot\sqrt{1-(f_c/f)^2}\ [ms^{-1}]$

Impedancia del modo TM: $Z_{TM}=\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}\ [\Omega]$

→ se propaga.

Si $f>f_{cTM}\to Z_{TM}=\eta\cdot\sqrt{1-(f_c/f)^2}$; $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$

Si $f<f_{cTM}\to Z_{TM}=\frac{\alpha}{j\omega\varepsilon}=\frac{-j\alpha}{\omega\varepsilon}$; capacitiva

Impedancia del Modo TE: $Z_{TE}=\frac{j\omega\mu}{\gamma}\ [\Omega]$

• Si $f>f_{cTE}\to Z_{TE}=\frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ • Si $f<f_{cTE}\to Z_{TE}=\frac{j\omega\mu}{\alpha}$ inductiva

$\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ MF 1er sup ... f

$TE\begin{cases}m=0,1,2,3\dots\\ n=0,1,2,3\dots\end{cases}\to m=0=n$ No!

Frecuencias de corte: $f_{cTE_{m,n}}=f_{cTM_{m,n}}=\frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}=\frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\ [Hz]$ $TM\begin{cases}m=1,2,3\dots\\ n=1,2,3\dots\end{cases}\to m$ ó $n=0$ No!

Truco para hallar un modo: $f_{cTE_{0n}}=f_{cTE_{01}}\cdot n$ / $f_{cTE_{m0}}=f_{cTE_{10}}\cdot m$; Truco para $f_{trabajo}=\frac{f_{cMF}+f_{c1er\,sup}}{2}$

Potencia transmitida si la guía no tiene pérdidas

Estas fórmulas de P_T sólo si $f>f_c$

$P_T=\iint_S\frac{1}{2}Re\left[\vec{E_t}\times\vec{H_t^*}\right]d\vec{s}$

• Modos TM: $P_T=\frac{Z_{TM}}{2\eta^2}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2|E_0|^2\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$

• Modos TE: $P_T=\frac{2\eta^2}{Z_{TE}}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2|H_0|^2\frac{a}{\delta m}\cdot\frac{b}{\delta n}$ $\left\{\delta_p=\begin{cases}1 \text{ si } p=0\\ 2 \text{ si } p\neq 0\end{cases}\right.$

Pérdidas en los conductores: $\alpha_c\neq 0$

Pérdidas en los dieléctricos: $\alpha_d\neq 0$

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}$

Al calcular P_T, exponenciales $\vec{E_t}$ y $\vec{H_t}$ se anulan

Atenuación $At(dB)=\alpha_d(Npm^{-1})8{,}68(dBNp^{-1})long(m)$

$\varepsilon_c=\varepsilon_r\varepsilon_0-j\frac{\sigma_D}{\omega}=\varepsilon-j\frac{\sigma_D}{\omega}=\varepsilon'-j\varepsilon''$

Pérdidas debidas al dieléctrico: ε_c en el dieléctrico $\sigma_D\neq 0\to tg\delta=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}=\frac{\sigma_D}{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}$

Si el dieléctrico tiene bajas pérdidas ($tg\delta<<1$ ó $\varepsilon''<<\varepsilon'$ ó $\frac{\sigma_D}{\omega\varepsilon}<<1$):

* Las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ vienen multiplicados por $e^{-\alpha_d z}$ y las de P_T por $e^{-2\alpha_d z}$

$\alpha_d=\frac{\beta_0(\varepsilon''/\varepsilon')}{2\sqrt{1-(f_c/f)^2}}=\frac{1}{2}\beta_0\frac{tg\delta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\ [Npm^{-1}]$; $\beta_0=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{2\pi f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c_0}\ [m^{-1}]$

Pérdidas debidas a los conductores.

$R_S=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\ [\Omega]$ → Resistencia Superficial del conductor.

Impedancia del dieléctrico ← $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ [\Omega]$

$E_z=H_y=E_x=0$ $H_x=\frac{j\beta_{g10}}{\beta_{c10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_{g10}z}$ siendo $\beta_{c10}=\frac{\pi}{a}$

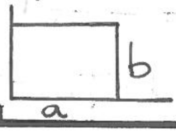
Notas • Ancho de banda monomodo: $BW_{monomodo} = f_{c\,1er\,sup} - f_{c\,MF}$ → margen de frecuencias en las que sólo se prop el MF.
Para indicar BW monomodo → "Desde f_{cMF} a $f_{c\,1er\,sup}$" → evitar corchete. → Preguntar en examen.

Si $f > f_c$, el modo se propaga ($\gamma = j\beta_g$) | Si $f < f_c$, el modo no se propaga o está al corte ($\gamma = \alpha$) → se atenúa.

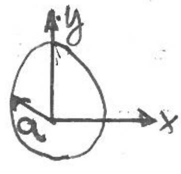
Si 2 modos tienen = f_c → modos degenerados.

Guía óptima → $a = 2b$ → Esta guía tiene máximo $BW_{monomodo}$ posible, reduce At conductores y $P_T \uparrow\uparrow$ por el TE_{10}.

Maxwell → $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ → Conocer totalmente los campos. Añadirle pérdidas al final $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$
$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$



Guía Circular • **Fórmulas Importantes** → = que Guía Rectangular. $\beta_c = \frac{\chi_{mn}}{a}$; $J_m'(x) = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$



Modos $TM_{m,n}$ $\begin{cases} m = 0,1,2\ldots \\ n = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$E_z = J_m(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$H_z = 0$

$E_\rho = -\frac{j\beta_g}{\beta_c} J_m'(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$E_\varphi = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$H_\rho = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c} J_m'(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

Modos $TE_{m,n}$ $\begin{cases} m = 0,1,2,3\ldots \\ n = \text{''} \end{cases}$ $\beta_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$

$E_z = 0$

$H_z = J_m(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\cdot\frac{m}{\rho} J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{\beta_c} J_m'(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$H_\rho = -\frac{j\beta_g}{\beta_c} J_m'(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

$H_\varphi = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho} J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$

Frecuencias de Corte: En la guía circular siempre ocurre que: MODO FUNDAMENTAL: TE_{11} → $f_{cTE_{11}} = \frac{1{,}841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

1er MODO SUPERIOR: TM_{01} → $f_{cTM_{01}} = \frac{2{,}405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$f_{cTE_{mn}} = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$ * TE_{11} modo fundamental siempre.

$f_{cTM_{mn}} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$ * Todos los TM_{0n} → sus campos no dependen de φ.

$BW_{monomodo} = \frac{0{,}564}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$\frac{f_{cTM_{01}}}{f_{cTE_{11}}} = 1{,}3$

Potencia transmitida si la guía no tiene pérdidas.

$P_T = \iint_S \frac{1}{2}\text{Re}[\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*]d\vec{s} = \frac{1}{2}\text{Re}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*)\rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{z}$ [W]

Esta fórmula sólo es válida si el modo se propaga ($f > f_c$) y además si hay pérdidas en los conductores y el dieléctrico viene multiplicada respectivamente por $e^{-2\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z}$.

Atenuación

$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$ → Resistencia superficial conductor.

Pérdidas debidas al dieléctrico: → Como en Guía Rectangular.

$\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ → Impedancia dieléctrico

Pérdidas debidas a los conductores

Modos TM → $\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ • Modos TE: $\alpha_c = \frac{2R_s}{a\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\left[\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{(\chi'_{mn})^2 - m^2}\right]$

Cuando hay pérdidas, las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, así como la potencia P_T vienen multiplicadas por $e^{-\alpha_d z}\cdot e^{-\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z}\cdot e^{-2\alpha_c z}$ respectivamente.

J_m → Función Bessel 1ª especie y orden m.

χ_{mn} → n-ésimo cero de J_m

Funciones de Bessel

J_m' → Derivada de J_m.

Modos TM → χ_{mn} • Modos TE_{mn} → χ'_{mn}

4	11,792	13,324	14,796	\	\	\	4	13,324	11,706	13,170	\	\

• Caso Particular (Guía rectangular con $a>b$ ⟷ Modo fundamental TE_{10})

• Expresiones de los campos

$E_z = 0 = H_y = E_x$

$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z}$

$H_x = \frac{j\beta_{g10}}{\beta_{c10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot H_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z}$

$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{c10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot H_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z}$

Campo eléctrico máximo del modo TE_{10}.

Llamamos $|E_{0y}| = \left|\frac{-j\omega\mu}{\beta_{c10}^2} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot H_0\right| = \frac{\omega\mu a}{\pi}|H_0|$

$\beta_{c10} = \frac{\pi}{a}$; $\beta_{g10} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \sqrt{1-(f_{cTE10}/f)^2}$

Expresiones Particularizadas

$f_{cTE10} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,a}$ (Hz) ; $Z_{TE10} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ (Ω) ; $P_T(TE_{10}) = \frac{|E_{0y}|^2\, a\, b}{4 \cdot Z_{TE10}}$ (W)

$\alpha_{cTE10} = \frac{R_s}{b\cdot\eta} \cdot \frac{\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2\right]}{\sqrt{1-(f_{c10}/f)^2}}$ (Npm^{-1}) ; $\alpha_{dTE10} = \frac{1}{2}\beta_0 \cdot \frac{tg\delta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ (Npm^{-1})

Anotaciones de ejercicios de guías

Para sacar el modo de un dibujo ver { - - - - → Líneas de $\vec{H}$ → Si se cierran, el modo es TM ; ——— → Líneas de $\vec{E}$ → no se cierran.

m = nº de veces que se repite en x el mismo dibujo
n = nº de veces que se repite en y el mismo dibujo

• Para aplicar Maxwell → Campo total
• Añadir pérdidas después de calcularlo

Maxwell: (campo armónico)

$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\vec{B} = -j\omega\mu_0\vec{H}$; $\vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}$ ....

• λ_g:

$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_t)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{f_t^2 - f_{c30}^2}}$; $f_c = \sqrt{f_t^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2}$

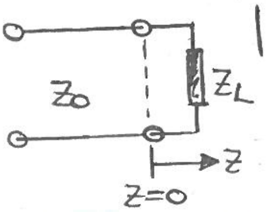
Si el campo no depende de y → $n=0$. Si no depende de x → $m=0$

Potencia:

$P_T = \frac{1}{2}\text{Re}\iint_{St} (\vec{E_t}\times\vec{H_t^*})\, ds_t =$ ↳ Cambiar todas las j de signo

$\int \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dt = \frac{a}{2\pi}\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]$

Expresiones del campo eléctrico debido a la superposición de onda incidente y reflejada



$|\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}| = \left|E_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\hat{y} + \rho_L E_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{+j\beta_g z} e^{j\omega t}\hat{y}\right| =$

$= \left|E_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t}\hat{y}\right| \cdot \left|1+\rho_L e^{+j2\beta_g z}\right| =$

Si $Z_L = 0$ → $\rho_L = -1$ → $\varphi_L = \pi$

• Si $Z_L=0 \longrightarrow \rho_L=-1 \begin{cases} |\rho_L|=1 \\ \varphi_L=\pi \end{cases}$

Encontrar $\frac{\lambda_g}{2} = 0$ mm

$$|\vec{E}_{TOTAL}| = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sqrt{1+1-2\alpha\cos(2\beta_g z)} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(2\beta_g z)} =$$

$$= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot|\operatorname{sen}(\beta_g z)| = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)|\operatorname{sen}(\beta_g z)|$$

Vectorialmente $\longrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}(\beta_g z) e^{j\omega t}\hat{y}$

• Si $Z_L=\infty \longrightarrow \rho_L=+1 \begin{cases} |\rho_L|=1 \\ \rho_L=0 \end{cases}$

$$|\vec{E}_{TOTAL}| = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_g z)$$

$$\vec{E}_{TOTAL} = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_g z) e^{j\omega t}\hat{y}$$

• Si $Z_L=Z_0 \longrightarrow \rho_L=0$

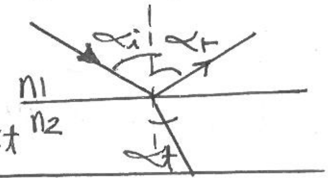
$$|\vec{E}_{TOTAL}| = \vec{E}_{inc} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t}\hat{y}$$

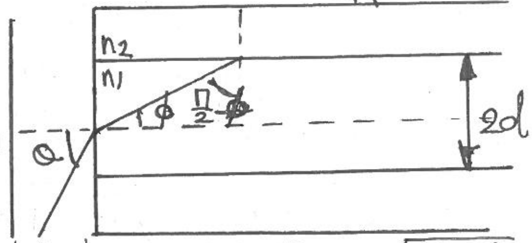
- Potencia media: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^*)$

• Leyes de Snell

$\alpha_i = \alpha_r$

$n_1 \operatorname{sen}\alpha_i = n_2 \operatorname{sen}\alpha_t$





Fibra óptica

Guía Dieléctrica Plana (Slab) $\longrightarrow n(\text{núcleo}) > n(\text{revestimiento})$

Apertura numérica: $AN = \operatorname{sen}\theta_{max} = \sqrt{n_1^2-n_2^2}$

Ángulo de aceptación máximo: $\alpha_a = \theta_{max} = \arcsin(NA) \longrightarrow$ Si el ángulo es pequeño: $\theta_{max} = \sqrt{n_1^2-n_2^2}$

Frecuencia de corte normalizada ó anchura normalizada: $V = kd\sqrt{n_1^2-n_2^2} = kdNA$ → radio del núcleo

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi f}{c_0}$$

- Número de modos propagados:

Si $V < \pi/2 \longrightarrow$ sólo se propaga el TE_0

$\pi/2 < V < \pi \longrightarrow$ se propagan los modos TE_0 (par) y TE_1 (impar)

$\pi < V < 3\pi/2 \longrightarrow$ se propagan los modos TE_0, TE_1 y TE_2

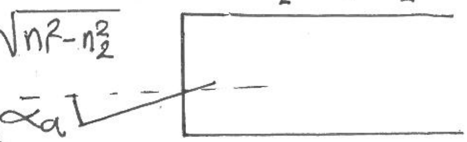
En general, el número de modos que soporta el SLAB es:

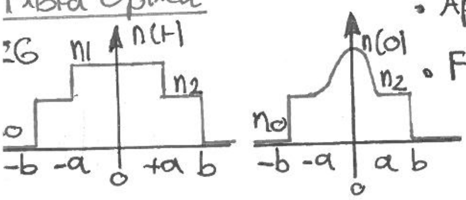
$$M = E + \left[\frac{2V}{\pi}\right] \quad \text{(E = entero)}$$

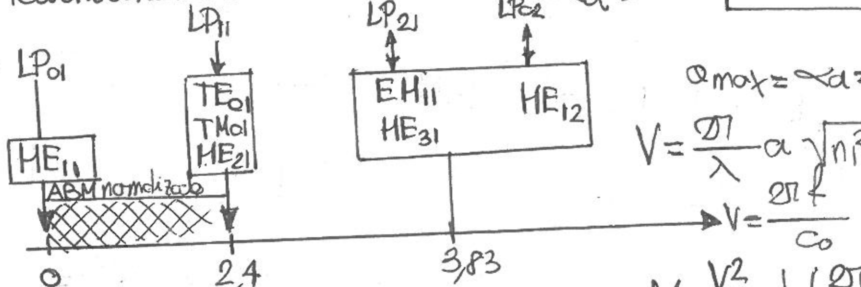
Fibra óptica

• Apertura numérica $\longrightarrow NA = n_0 \operatorname{sen}(\alpha_a) = \sqrt{n_1^2-n_2^2}$

• Frecuencia normalizada: $V = k \cdot NA \cdot a$







$\theta_{max} = \alpha_a = \arcsin(NA)$

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} a\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

$$V = \frac{2\pi f}{c_0}$$

Núcleo

$E_{z1} = A_1 J_m(u r) e^{jm\varphi} e^{-j\beta z}$

Ventanas

• Test TPO Primer Día •

1] $p = V \cdot I \longrightarrow$ esto no es la potencia instantánea.

La potencia instantánea viene dada por: $p(t) = V(t) \cdot I(t) \longrightarrow$ en cada instante de tiempo.

$V = 3 + j \quad |V| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \; ; \; \sphericalangle V = \text{arctg}\frac{1}{3} = 18{,}43^\circ$

$I = 1 - j \quad |I| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \; ; \; \sphericalangle I = \text{arctg}\frac{-1}{1} = -45^\circ$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$

$V(t) = \text{Re}\left[V e^{j\omega t}\right] = \sqrt{10}\,\cos(\omega t + 18{,}43^\circ)$

$I(t) = \text{Re}\left[I e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}\,\cos(\omega t - 45^\circ)$

$p(t) = V(t) \cdot I(t) = \sqrt{10}\,\cos(\omega t + 18{,}43^\circ) \cdot \sqrt{2}\,\cos(\omega t - 45^\circ) = \sqrt{20}\,\cos(\omega t + 18{,}43^\circ)\cos(\omega t - 45^\circ) =$

$= \sqrt{5}\left[\cos(63{,}43^\circ) + \cos(2\omega t - 26{,}57^\circ)\right]$

2] ¿Cuál es la potencia media?

Definición $\longrightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V(t) \cdot I(t)\, dt$

Nosotros lo haremos mediante la expresión: $P_m = \frac{1}{2}\text{Re}\left[V \cdot I^*\right] = \frac{1}{2}\text{Re}\left[(3+j)(1+j)\right]$

$= \frac{1}{2}\text{Re}\left[(2+4i)\right] = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5} \longrightarrow$ Módulo.

$\sphericalangle P_m = \text{arctg}\frac{4}{2} = 63{,}434^\circ$

$P_m = \sqrt{5}\cos(63{,}434^\circ)$

3] $\frac{\partial}{\partial r}\left(a \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}\right) = a\left(\frac{-jke^{-jkr} \cdot r - e^{-jkr}}{r^2}\right) = \frac{-ae^{-jkr}}{r^2}(1 + jkr)$

$1 = \cos^2 + \text{sen}^2$

$\cos 2x = \cos^2 - \text{sen}^2$

4] $\int_0^T \text{sen}^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \int_0^T \left[\frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)}{2}\right] dt = \int_0^T \frac{1}{2}\, dt + \int_0^T \cancel{\frac{\cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right)}{2}}\, dt = \frac{T}{2}$

(r, φ, θ)

6] vacío

$$\vec{E} = 10\cos(\omega t - kz)\hat{x} + 10\,\text{sen}(\omega t - kz)\hat{y} \ \ Vm^{-1}$$

$$E_x = 10\cos(\omega t - kz) = 10\,\text{sen}(\omega t - kz + \tfrac{\pi}{2})$$

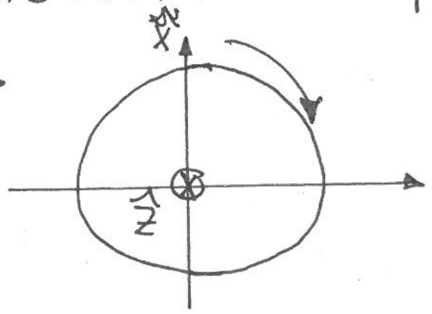
$$E_y = 10\,\text{sen}(\omega t - kz) = 10\,\text{sen}(\omega t - kz)$$

$\longrightarrow$ Desfase de $\frac{\pi}{2}$ entre componentes implica polarización circular.

Para ver hacia donde va girando, miramos en un instante determinado de tiempo. Por ejemplo:

$t = 3;\ z = 0 \longrightarrow E_x = 10\cos(\omega \cdot 3) > 0$

$E_y = 10\,\text{sen}(\omega t \cdot 3) > 0 \longrightarrow$



Polarización circular a derechas ó sentido horario

7] Calcule la densidad de energía eléctrica media.

$$\vec{E} = 10 e^{-jkz}\hat{x} + 10 e^{-jkz} e^{-j\pi/2}\hat{y} = 10 e^{-jkz}(\hat{x} - j\hat{y})$$

$$W_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}^* = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^* = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \longrightarrow \langle W_e\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon E^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0\cdot 200 \longrightarrow [W_e] = \frac{J}{m^3}$$

$$E^2 = \vec{E}\cdot\vec{E}^* = 10\cdot e^{-jkz}(\hat{x} - j\hat{y})\cdot 10 e^{+jkz}(\hat{x} + j\hat{y}) = 100\,[1+1] = 200\ Vm^{-1}$$

$(a\cdot b)^* = a^*\cdot b^*$

$(a+b)^* = a^* + b^*$

8] Calcule el campo magnético asociado a este campo eléctrico.

Por la ecuación de Maxwell: Campo armónico

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_0\vec{H} \longrightarrow \vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{jk10^{-jkz}}{\omega\mu_0}(-j\hat{y} + \hat{x})\ Am^{-1}$$

* La fórmula a usar es $\longrightarrow \vec{H} = \frac{\hat{z}\times\vec{E}}{\mu}$

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ & & \end{vmatrix} = \hat{y}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \hat{x}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -jk10e^{-jkz}\hat{y} - (-j)(-jk)10^{-jkz}\hat{x} =$$

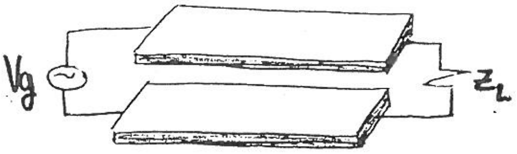
$\sqrt{j} = \sqrt{1_{|90^\circ}} = 1_{|45^\circ} = \frac{\quad}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{a_{|\alpha}\cdot a_{|\alpha}} = \sqrt{a^2_{|2\alpha}}$

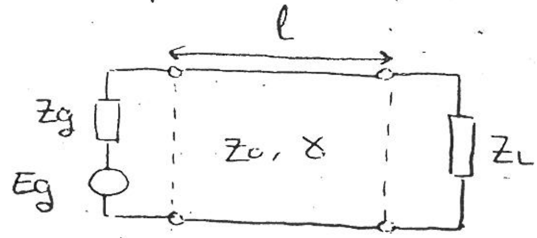
Tema 1: Líneas de Transmisión.

1. Introducción

Las l.d.t. sirven para tx energía de un punto a otro del espacio sin radiación.



El circuito representativo de una l.d.t. es:



Dentro de la l.d.t no se puede aplicar teoría de circuitos, ya que se producen fenómenos de propagación en alta frecuencia.

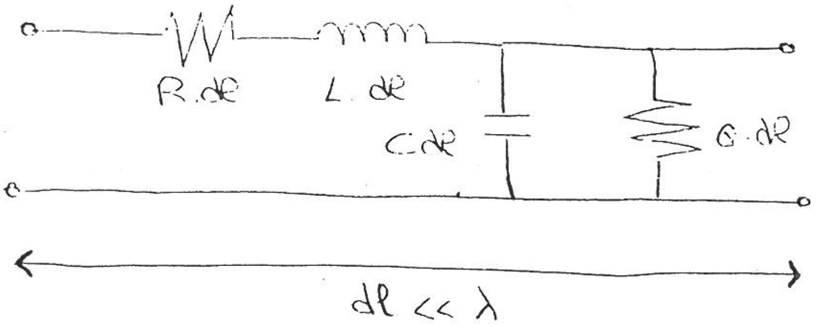
2. Parámetros característicos de las L.D.T. (cto equivalente).

" Parámetros { L = Autoinducción por unidad de longitud (H/m)

... en el dieléctrico.

Si $R \neq 0$ " " " los conductores

El circuito equivalente es:



Estos circuitos sirven para hacer modelados en laboratorio

A partir de los parámetros anteriores se definen:

(β y α están cambiados (al revés que en propagación)).

✓ $Z_0 \equiv$ Impedancia característica de la l.d.t.

* Z_0 suele ser un número real

Esta impedancia es real si la l.d.t no tiene pérdidas ⇒ $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ($R=0$, $G=0$)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} \quad (\Omega)$$

✓ $\gamma = \alpha + j\beta \ (m^{-1}) \equiv$ constante de propagación.

→ $\beta \equiv$ cte. de fase (rad/m)

→ $\alpha \equiv$ cte. de atenuación (Np/m).

$$\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$

Como la dirección de propagación siempre la velocidad de fase:

$$V = V_{fase} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{C_o}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \approx \frac{C_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{C_o}{n} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f \cdot \lambda \quad [m s^{-1}]$$

En l.d.t sin pérdidas, $\alpha = 0$ y $\beta = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\left(\frac{rad}{m}\right)$

3. L.D.T. SIN PÉRDIDAS. ECUACIONES DE ONDA EN R.P.S.

régimen permanente sinusoidal

A partir de ahora, $Z_0 \in \mathbb{R}^+$

$\gamma = j\beta = jk = j\frac{2\pi}{\lambda}$

Régimen permanente sinusoidal → fasores

Las ecuaciones de onda que hay que resolver para obtener las ondas de tensión $(V(z,t))$ y las de corriente $(I(z,t))$ dentro de una l.d.t son:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2}$$

↑ velocidad

es = siempre

$V(z,t) = Re(\underline{V(z)}\, e^{j\omega t})$

$I(z,t) = Re(\underline{I(z)}\, e^{j\omega t})$

es lo que importa.

$$\frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial t^2}$$

Al resolver estas ecuaciones obtendremos: $V(z,t)$ e $I(z,t)$ que tendrán la siguiente forma según el esquema dado.

Razonar la forma de la ecuación en función del valor de z para cada esquema.

a) 1er ESQUEMA.

I

$V(z) = V_1^+ e^{-j\beta z} + V_1^- e^{+j\beta z}$

onda incidente + onda reflejada

Siendo:

Intensidad "

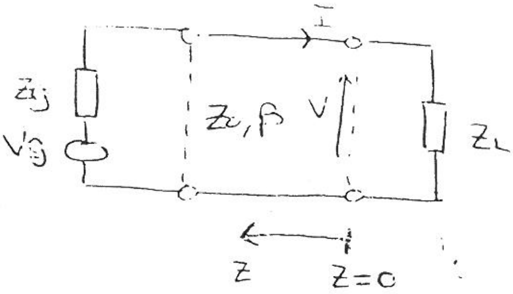
$V(z,t)$ e $I(z,t)$

$V^+ = $ onda incidente

$V(z,t) = Re[V(z)\, e^{j\omega t}]$

$V^- = $ onda reflejada

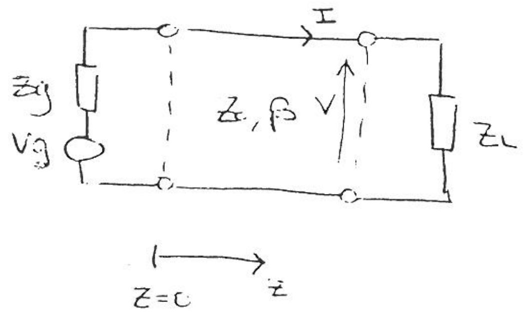
b) 2° ESQUEMA



$$V(z) = V_L^+ \, e^{+j\beta z} + V_L^- \cdot e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_L^+ \cdot e^{j\beta z} - V_L^- \, e^{-j\beta z} \right)$$

c) 3ᵉʳ ESQUEMA



* V_G ó $V_0 \rightarrow$ No es V_L

$$V(z) = V_G^+ \, e^{-j\beta z} + V_G^- \, e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}\left(V_G^+ \, e^{-j\beta z} - V_G^- \, e^{j\beta z} \right)$$

COMENTARIO:

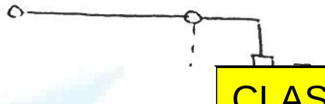
V_G^+, V_G^-, V_L^+ y V_L^- pueden ser complejos

4. COEFICIENTE DE REFLEXIÓN (ρ)

$$\rho = \frac{\text{Onda reflejada}}{\text{onda incidente}}$$

Suponemos el siguiente esquema:

1° Esquema.



$$\rho(z) = \frac{V_L^- \, e^{+j\beta z}}{\ldots} = \frac{V_L^-}{V_L^+} \, e^{+2j\beta z} =$$

$$= |\rho_L| \; e^{j(\ldots)}$$

COMENTARIOS IMPORTANTÍSIMOS:

* Sabemos que: → incluye módulo y fase.

$$\boxed{\rho_L = |\rho_L|\, e^{j\phi_L} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}$$!

SWR sólo incluye módulo.

* Por tanto, cualquier $\rho(z)$ se puede calcular a partir del ρ_L:

Ejemplo ⇒ $\rho(z=-3) = \rho_L\, e^{-j2\beta 3}$

Así pues, el coeficiente de reflexión a una distancia 'd' de la carga es:

Desplazar el coef. de reflexión hacia la izq.
Esquema

$$\boxed{\rho_d = \rho_L \cdot e^{-j2\beta d}}$$!

* En una l.d.t. sin pérdidas, el módulo de coeficiente de reflexión es el mismo en toda la línea.

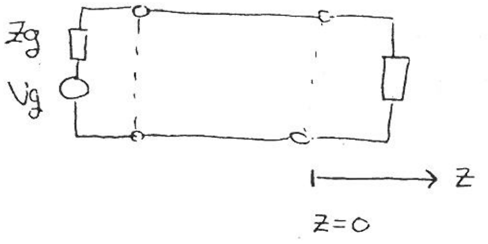
$$|\rho(z)| = |\rho_L| = \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|$$

Elementos

$Z_L = \infty$ (c.a.)

* Este ρ es para V, y para I es el mismo pero

5. ONDA ESTACIONARIA



$\underbrace{\text{Una onda estacionaria}}_{\text{onda que va y vuelve}}$ es aquella onda formada por dos ondas de la misma naturaleza y frecuencia que se propagan en direcciones distintas.

(EJEMPLO: onda incidente + onda reflejada)

$$V(z) = V_L^+ e^{-j\beta z} + V_L^- e^{+j\beta z}$$

Vamos a obtener su módulo:

* Sacando 1

$$\boxed{|V(z)|} = |V_L^+ e^{-j\beta z} + V_L^- \cdot e^{+j\beta z}| = |V_L^+ \cdot e^{-j\beta z}| \cdot \left|1 + \frac{V_L^-}{V_L^+} \cdot e^{+2j\beta z}\right| =$$

$$= |V_L^+| \cdot |1 + \rho_L \cdot e^{j2\beta z}| = |V_L^+| \cdot |1 + |\rho_L| \cdot e^{j\phi_L} \cdot e^{j2\beta z}| =$$

$$= |V_L^+| \cdot |1 + |\rho_L| \cdot (\cos(2\beta z + \phi_L) + j \operatorname{sen}(2\beta z + \phi_L))| =$$

$$= |V_L^+| \sqrt{(1 + |\rho_L| \cdot \cos(\,))^2 + (|\rho_L| \operatorname{sen}(\,))^2} =$$

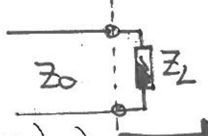
con el esquema 2.

$$= \boxed{|V_L^+| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(2\beta z \mp \phi_L)}} \text{ (V)}$$

Amplitud de la onda de tensión en $\forall$ punto de la línea

Esta fórmula va con el esquema de arriba

Siendo $z \leq 0$

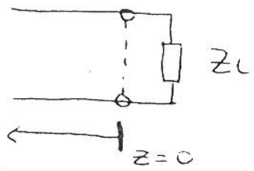


* Para hallar expresiones no cambiar el esquema dado

$\beta = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (rad/m) ya que $\nexists$ pérdidas.

COMENTARIOS:

* Si el esquema hubiera sido este:



$$|V(z)| = |V_L^+| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cdot \cos(\phi_L - 2\beta z)}\ ,\ (V)\ \text{con } z \geq 0$$

* Para el esquema inicial la onda estacionaria de corriente es:

$$|I(z)| = \frac{|V_L^+|}{Z_0} \sqrt{1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \cos(2\beta z + \phi_L)}\ ,\ (A)\ \text{con } z \leq 0$$

Cuidado!

* En la ONDA ESTACIONARIA, los máximos de tensión coinciden con los mínimos de corriente y viceversa. (Se refiere a que coinciden en la posición, en z). → * No mezclar V con A.

Los máximos de $|V(z)|$ o mínimos de $|I(z)|$ se producen si $\cos(2\beta z + \phi_L) = +1$;

Los mínimos de $|V(z)|$ o los máximos de $|I(z)|$ se producen si $\cos(2\beta z + \phi_L) = -1$.

$$I_{máx} = \frac{|V_L^+|}{Z_0}(1 + |\rho_L|)$$

$$V_{máx} = |V_L^+| \sqrt{(1 + |\rho_L|)^2} = |V_L^+| \cdot (1 + |\rho_L|)$$

I_{min} ... estarán dando el ... R.T.

$1 \leq ROE \leq \infty$

$\infty \rightarrow$ REFLEX TOTAL (línea totalmente desadaptada) $(|\rho_L| = 1)$

$1 \rightarrow$ TRANS. TOTAL (Línea totalmente adaptada) $(|\rho_L| = 0)$

Además

$$I_{max} = \frac{|V_L^+|}{Z_0}(1 + |\rho_L|)$$

$$I_{min} = \frac{|V_L^+|}{Z_0}(1 - |\rho_L|)$$

o $ROE = SWR = \frac{I_{max}}{I_{min}}$

* Se define la impedancia de onda en un punto como:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}, \ (\Omega).$$

Se cumple que:

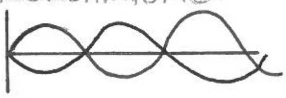
$$\boxed{Z_{max}} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = \frac{|V_L^+|(1 + |\rho_L|)}{\frac{|V_L^+|}{Z_0}} = \boxed{Z_0 . ROE}$$

$$\boxed{Z_{min}} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = \frac{|V_L^+|(1 - |\rho_L|)}{\frac{|V_L^+|}{Z_0}.(1 + |\rho_L|)} = \boxed{\frac{Z_0}{R.O.E}}$$

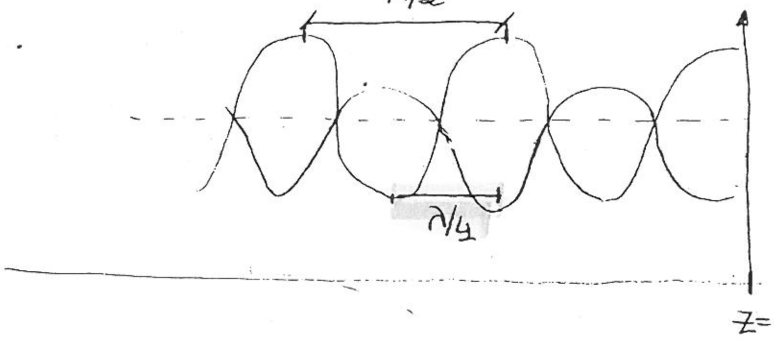
DOE

Tenemos 3 tipos de diagrama de O.E.:

Es $\lambda/2$: → Por la envolvente → Pillada en ejercicios.



a) $0<|\rho_L|<1$

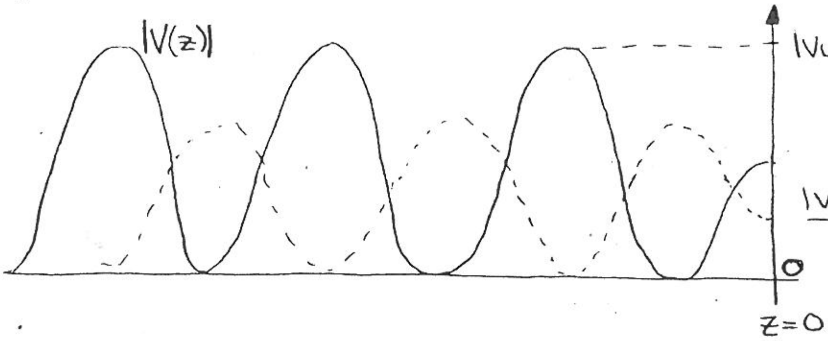


$|V(z)|$ — $V_{máx}=|V_L^+|(1+|\rho_L|)$

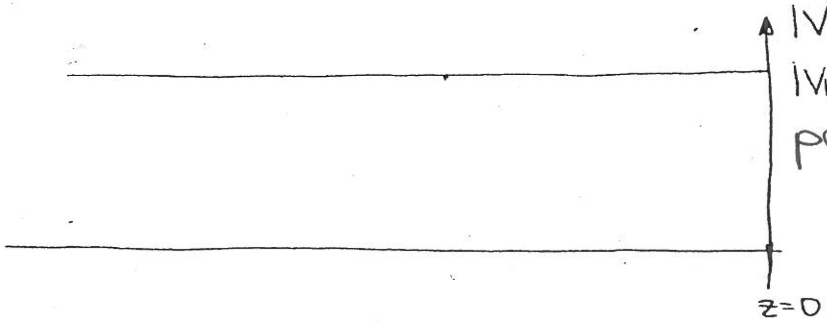
$|I(z)|$ —

$V_{mín}=|V_L^+|(1-|\rho_L|)$

b) $|\rho_L|=1$ (Reflexión total, línea totalmente desadaptada).



c) $|\rho_L|=0$ (Transmisión total, línea totalmente adaptada).



$|V(z)|$ —

$|V_L^+|$ → No es onda estacionaria porque no hay onda reflejada.

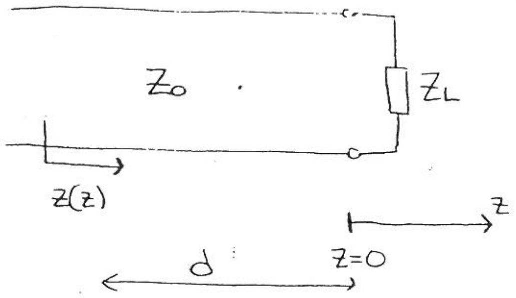
Sale en algún ejercicio →

$\cos(2\beta z+\phi_L)=+1$

$2\beta z_{max}+\phi_L=2n\pi$

Impedancia de onda ó impedancia vista hacia la derecha / Impedancia Equivalente.

6. IMPEDANCIA QUE PRESENTA LA LÍNEA EN CUALQUIER PUNTO DE SU LONGITUD, VISTA HACÍA Z_L.



d se toma como negativa en este esquema y es por esto que la expresión queda así.

$$Z(z) = Z_0 \cdot \frac{Z_L \cdot \cos(\beta z) - j\, Z_0 \operatorname{sen}(\beta z)}{Z_0 \cdot \cos(\beta z) - j\, Z_L \cdot \operatorname{sen}(\beta z)} \quad (\Omega)$$

Como $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$-\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$

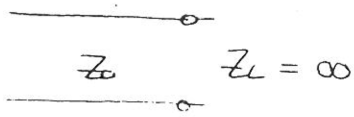
podemos calcular la impedancia vista a una distancia 'd' de la carga como

$$\boxed{Z(z)} = Z_0 \cdot \frac{Z_L \cdot \cos(\beta d) + j\, Z_0 \operatorname{sen}(\beta d)}{Z_0 \cdot \cos(\beta \cdot d) + j\, Z_L \operatorname{sen}(\beta \cdot d)} =$$

$$= \boxed{Z_0 \cdot \frac{Z_L + j\, Z_0 \cdot tg(\beta d)}{Z_0 + j\, Z_L\, tg(\beta d)}} \, , (\Omega).$$

COMENTARIOS :

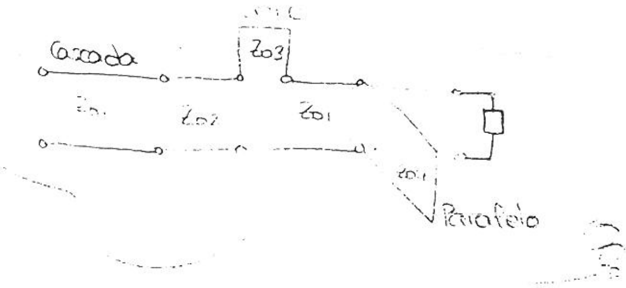
* Si la línea está terminada en C.A:



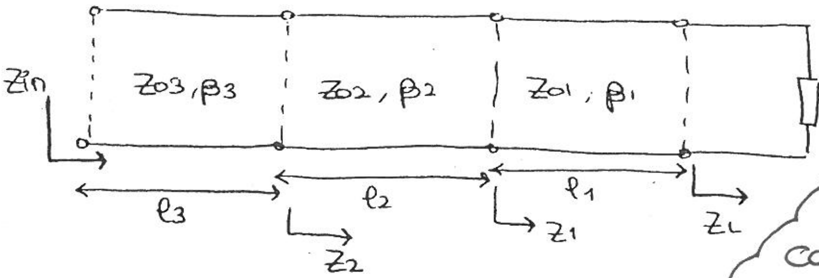
$$Z(z) = -j\, Z_0 \cdot \text{cotg}(\beta . d) \quad \in \mathbb{I}m$$

Lo único que consume potencia son las resistencias.

Estas líneas se denominan 'stub' o sintonizador ya que permiten adaptar Z_L a Z_0 sin consumir potencia porque son imaginarias.



/Ejemplo/ ⇒ Calcular Z_{in}

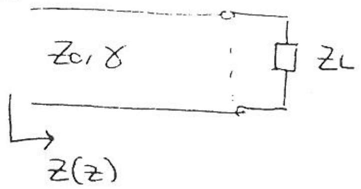


Al cambiar de línea, cambiamos de coeficiente de reflex. (normalmente)

$$Z_1 = Z_{01} \cdot \frac{Z_L + jZ_{01} \cdot tg(\beta_1 . \ell_1)}{Z_{01} + jZ_L \cdot tg(\beta_1 . \ell_1)} \quad (\Omega)$$

* Coeficientes de reflexión son "vizcos".

$$Z_2 = Z_{02} \cdot \frac{Z_1 + jZ_{02} \cdot tg(\beta_2 . \ell_2)}{Z_{02} + jZ_1 tg(\beta_2 . \ell_2)} \quad (\Omega)$$



$\gamma = \alpha + j\beta \equiv$ Línea con pérdidas.

$$Z(z) = Z_o \cdot \frac{Z_L \, ch(\gamma d) + Z_o \, sh(\gamma d)}{Z_o \, ch(\gamma d) + Z_L \, sh(\gamma d)}, \quad (\Omega).$$

Si no hay pérdidas: $\gamma = j\beta$ → $ch(j\beta d) = \cos(\beta d)$; $sh(j\beta d) = j\,sen(\beta d)$

7. POTENCIA TRANSMITIDA POR UNA L.D.T. SIN PÉRDIDAS.

Ver en Problemas.

$$P = \frac{|V_L^+|^2}{2Z_o}\left(1 - |\rho_L|^2\right), \quad (\text{Watts})$$

Potencia que le llega a la carga

8. L.D.T. DE BAJAS PÉRDIDAS.

$$\alpha + j\beta \approx \frac{R}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega\sqrt{LC}$$

✓ $$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{BAJAS PÉRDIDAS} \\ R \ll j\omega L \\ G \ll j\omega C \end{array} \right\} \approx \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (\Omega) \in \mathbb{R}$$

✓ $$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}, \quad (m^{-1})$$

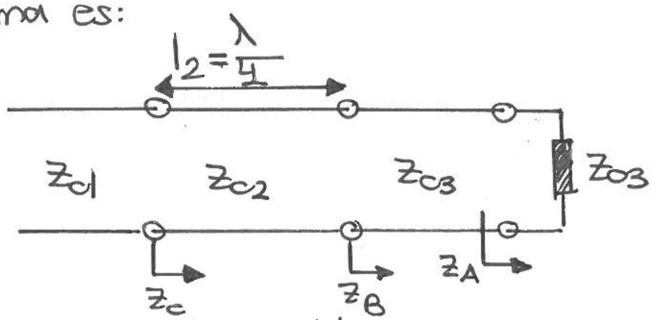
Cuando dos líneas de transmisión de impedancias características Z_{01} y Z_{03} se unen, aparecerá una onda reflejada si no tienen ambas líneas la misma impedancia característica. Demostrar:

a) Si se inserta entre las dos líneas iniciales otra de longitud $\lambda/4$ y de impedancia característica $Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}}$ desaparece la onda reflejada y se trasmite toda la potencia a la carga supuesta ésta igual a la impedancia característica de la línea terminal.

b) Tampoco existirá reflexión si $Z_{01} = Z_{03}$, y la longitud de la línea intermedia es de $\lambda/2$.

$\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{03}} \rightarrow$ media geométrica.

a) El esquema es:



Para que exista adaptación debe ser $Z_C = Z_{01}$

$Z_A = Z_L = Z_{03}$

$Z_B = Z_{03} \cdot \frac{Z_{03} + j \cancel{Z_{03}\, tg(\beta_3 l_3)}}{Z_{03} + j Z_{03}\, tg(\beta_3 l_3)} = Z_{03}$ } No hacer en el examen

Fórmula del $\lambda/4$

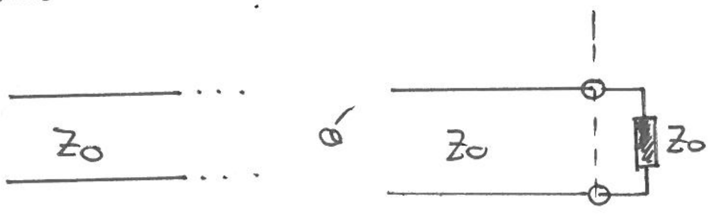
$$Z_C = Z_{02} \frac{Z_B + j Z_{02}\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{4}\right)}{Z_{02} + j Z_B\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{4}\right)} = \left(tg \frac{\pi}{2} = \infty \right) = \frac{Z_{02}^2}{Z_B} = \frac{Z_{01} \cdot Z_{03}}{Z_{03}} = Z_{01}$$

está adaptado

$$\rho_C = \frac{Z_C - Z_{01}}{Z_C + Z_{01}} = \frac{Z_{01} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}} = 0 \rightarrow \text{Transmisión total}$$

*Nota: Esquemas equivalentes

A la entrada de ellos, se ve Z_0:



$$\rho_C = \frac{Z_C - Z_{01}}{Z_C + Z_{01}} = \frac{Z_{01} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{01}} = 0 \rightarrow \text{Transmisión total}$$

*Calculadora con complejos
Compás/Regla.

$Z = R + jX \equiv$ Impedancia $\begin{cases} \to R = \text{Resistencia } (\Omega) \\ \to X = \text{Reactancia } (\Omega) \end{cases}$

$Y = G + jB \equiv$ Admitancia $\begin{cases} \to G = \text{Conductancia} \\ \to B = \text{Susceptancia} \end{cases}$ $(\Omega)^{-1}$ ó (S) $(\mho)$

$Z = \frac{1}{Y}$ ó $Y = \frac{1}{Z}$

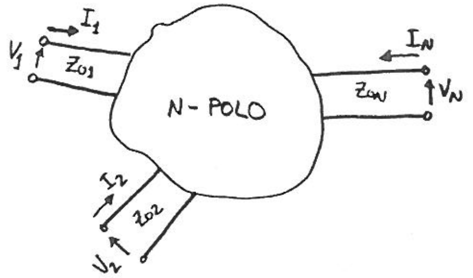
*Nota

¡No! $\boxed{R = \frac{1}{G} \quad X = \frac{1}{B}}$

PARÁMETROS S (SCATTERING o DISPERSIÓN)

1.- Introducción:

Se utilizan para el estudio de multipolos:



NOTACIÓN:

V_i^+ : Onda de tensión incidente en la puerta i.

V_i^- : " " " reflejada " " " i.

I_i^+ : " " corriente incidente en la puerta i. (OJO: Si es entrante se considera positiva)

I_i^- : " " " reflejada " " " i.

Ecuaciones clave en ejercicios.

$$\begin{cases} V_i = V_i^+ + V_i^- \text{ : Onda de tensión \underline{total} en la puerta } i. \\ I_i = I_i^+ + I_i^- = \dfrac{V_i^+}{Z_{0i}} - \dfrac{V_i^-}{Z_{0i}} \text{ : Onda de corriente \underline{total} en la puerta } i. \end{cases}$$

Z_{0i} : Impedancia característica de la línea de transmisión i.

$Y_{0i} = \dfrac{1}{Z_{0i}}$: Admitancia " " " " " i.

A partir de estas definiciones, vamos a definir a su vez las "ondas de potencia entrante" (a_i) y "onda de potencia saliente" (b_i), que son equivalentes a las ondas incidente y reflejadas normalizadas:

1/1

Ecuaciones clave en ejercicios.

$$\begin{cases} a_i = \overline{V_i^+} = \overline{I_i^+} = \dfrac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} = V_i^+ \cdot \sqrt{\ } \\ b_i = \overline{V_i^-} = -\overline{I_i^-} = \dfrac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} = V_i^- \cdot \sqrt{Y_{0i}} \end{cases}$$

OJO con ese signo $\ominus$.

Finalmente llegamos a:

$$P_{IN_i} = \frac{1}{2} \frac{|V_i^+|^2}{Z_{0i}} = \frac{1}{2} |a_i|^2 \equiv$$

$$P_{REF_i} = \frac{1}{2} \frac{|V_i^-|^2}{Z_{0i}} = \frac{1}{2} |b_i|^2 \equiv$$

... -POLO ... NCIA ... TA i.

... N-POLO ... NCIA ... A i.

COMENTARIOS IMPORTANTES:

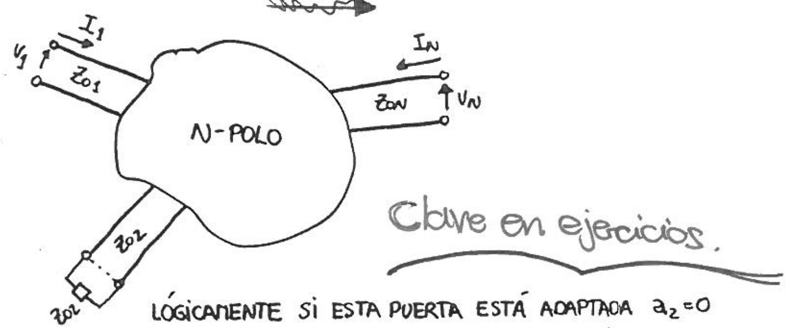
* En las potencias se toma el mód... ...ntos valores pueden ser complejos...

* OBSERVAMOS QUE b_i ES P... ...IR, QUE b_i ES UNA MAGNITUD Q... TENSIÓN REFLEJADA EN LA P... ...E, EN UN MULTIPOLO Ó N-POL... ...EN LA PUERTA i NO SÓLO TIE... ...SIÓN INCIDENTE DE ESA PUERTA ... LAS TENSIONES INCIDENTES DE ... , ASÍ SE DEFINIERON LOS ... :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2N} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots & S_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & S_{N3} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

* Cuando se diga que una puerta está adaptada quiere decir que está cargada con su impedancia característica y por tanto por esa puerta $a_i = 0$.

Ejemplo : Si puerta 2 adaptada :



Clave en ejercicios.

LÓGICAMENTE SI ESTA PUERTA ESTÁ ADAPTADA $a_2 = 0$ YA QUE NO ENTRA NINGUNA ONDA INCIDENTE DESDE ESTA PUERTA HACIA EL N-POLO.
¡¡OJO!! b_2 SEGUIRÁ SIENDO DISTINTO DE CERO PORQUE DEL N-POLO SÍ SALDRÁ TENSIÓN HACIA Z_{02}, pero la que salga no volverá a entrar porque la suponemos adaptada.

* Con los aparatos de medida del laboratorio mediréis parámetros S en forma logarítmica, y como relacionan tensiones :

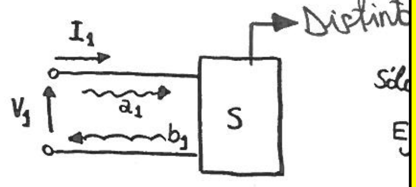
$$S_{ij}\,(dB) = 20 \log |S_{ij}|$$

* El analizador escalar sólo mide módulos, mientras que el vectorial mide módulo y fase.

Veamos a continuación diferentes ejemplos de circuitos con sus parámetros S.

2.- EJEMPLOS.

2.1.- Dipolo (Red de 1 puerta)



Sólo ... salida.
E... ador,
...

En este caso la matriz que vimos ... a :

$$b_1 = S_{11} \cdot a_1 \quad \Rightarrow \quad S_{11} ...$$

Como $a_1 = \frac{V_1^+}{\sqrt{Z_{01}}}$ y $b_1 = \frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}$

$$\boxed{S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{V_{REFLEJADA}}{V_{INCIDENTE}} = ...}$$ ... la entrada

Por tanto en un dipolo :

$$\boxed{S_{11} = \rho_{ent} = \frac{Z_{ent} - Z_0}{Z_{ent} + Z_0}}$$

... que se ... la derecha

S

→ Z_{ent} ... ia de la ... llega a la

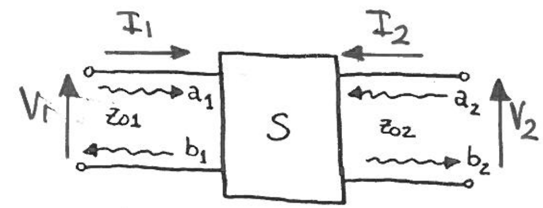
COMENTARIOS :

* $20 \log |S_{11}| = 20 \log \frac{|V_1^-|}{|V_1^+|} = 10$ ...

* Si tenemos que $|S_{11}| = 0'1 \Rightarrow$ ... emos suponer a partir de este nivel ... que

[IMPORTANTE]

2.2.- Cuadripolo (Red de 2 puertas)



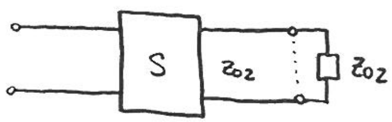
Tenemos 2 entradas y 2 salidas.

En este caso la matriz que vimos en la página 2 se reduce a:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{array}{l} b_1 = S_{11} \cdot a_1 + S_{12} \cdot a_2 \\ b_2 = S_{21}\, a_1 + S_{22} \cdot a_2 \end{array}$$

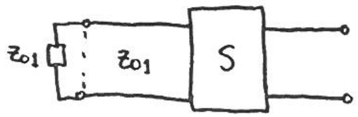
COMENTARIO IMPORTANTE:

* Se dice que la salida está adaptada si se carga con Z_{02}:



En este caso $b_2 \neq 0$ pero $a_2 = 0$ ya que se supone que el generador estará a la entrada y la potencia que le llegue a la carga con b_2 no volverá a entrar en el cuadripolo por a_2 porque está adaptada. [CONCLUSIÓN: $a_2 = 0$ SI SALIDA ADAPTADA]

* Se dice que la entrada está adaptada si se carga con Z_{01}:



Análogamente al comentario anterior, suponemos el generador a la salida y la CONCLUSIÓN es que $a_1 = 0$ SI ENTRADA ADAPTADA.

FIN COMENTARIO IMPORTANTE.

Así pues, teniendo en cuenta el con... ir calculando los distintos parámetros ... a siguiente forma: [SIGNIFICADO FÍSICO D...

$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right]_{\text{Si } a_2=0}$ ≡ Coef. de reflex... lida está adapta...

$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right]_{\text{Si } a_1=0}$ ≡ Coef. de refl... ntrada está adaptad...

$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right]_{\text{Si } a_2=0}$ ≡ Ganancia en ... cuando está adaptado ... (LA TENSIÓN ... ENTRE LA TENSIÓN ...

$S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right]_{\text{Si } a_1=0}$ ≡ Ganancia INV... do cuando está adaptad... en potencia inversa cuan... ntrada ...

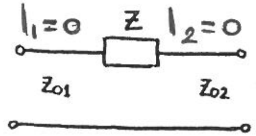
CONCLUSIÓN GENERAL DEL S... E LOS PARÁMETROS S.

$S_{KK} = \left.\frac{b_K}{a_K}\right]$ Si todas las demás puertas que no sean la ... están adaptadas. ...lexión ... con todas las ... ptadas.

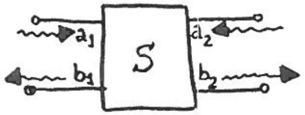
$S_{Kj} = \left.\frac{b_K}{a_j}\right]$ Tensión que recogemos en la puerta K cuando ponemos el generador en la puerta j si todas las demás entradas están adaptadas, incluid... . K ... a j ... uertas que ... tadas, ... que también

Para entender mejor los parámetros S de un cuadripolo lo mejor es ver algunos ejemplos con diferentes cuadripolos:

2.2.1.- Ejemplo ① de cuadripolo:



*

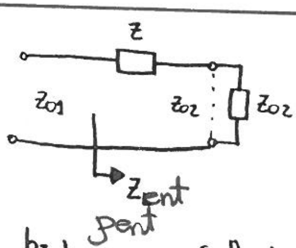


Tenemos que: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ó $b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} \cdot a_2$; $b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$

* $S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0}$ ≡ Coef. de reflexión en la puerta ① cuando ② está adaptada, por tanto para el cálculo de S_{11} tenemos el siguiente esquema:

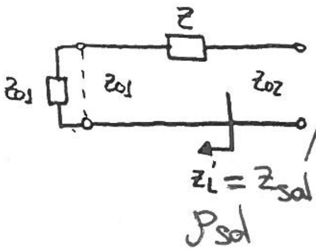
Nota
Poner siempre dibujo

$Z_L = Z_{ent}$



$$\boxed{S_{11} = \frac{Z_L - Z_{01}}{Z_L + Z_{01}}} = \left\{ Z_L = Z \text{ serie } Z_{02} = Z + Z_{02} \right\} = \boxed{\frac{Z + Z_{02} - Z_{01}}{Z + Z_{02} + Z_{01}}}$$

* $S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0}$ ≡ Coef. de reflexión en la puerta ② cuando ① está adaptada, por tanto para el cálculo de S_{22} tenemos el siguiente esquema:

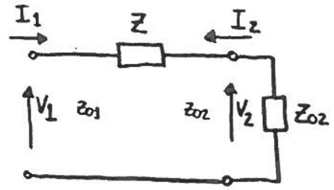


$$\boxed{S_{22} = \frac{Z_L' - Z_{02}}{Z_L' + Z_{02}}} = \left\{ Z_L' = Z \text{ serie } Z_{01} = Z + Z_{01} \right\} = \boxed{\frac{Z + Z_{01} - Z_{02}}{Z + Z_{01} + Z_{02}}}$$

⊛ Mirar desarrollo de la hoja aparte

* $S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$ ≡ Este parámetro S_{21} ... la ganancia vista e... el generador en ... puerta ② adapt... ...ara el cálculo de e...

$$S_{21} = \left.\frac{V_2^- / \sqrt{Z_{02}}}{V_1^+ / \sqrt{Z_{01}}}\right|_{a_2=0}$$



Recordamos que:

- $V_1 = V_1^+ + V_1^-$ y $V_2 = V_2^+ + V_2^-$ ... entrantes ... das son ... s sentidos ... V_2^-

- $I_1 = I_1^+ + I_1^- = \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}}$ y ... Z_{02}

OJO, las corrientes incidentes ... cuadripolo y las corrientes reflejadas sal...

clave

CON EL ESQUEMA DADO $\boxed{V_2^+ = 0}$ ... esta ② adaptada, y estar el generador en ... puerta ② no entra tensión al cuadripolo, sino ...

Además, CON EL ESQUEMA DADO $\boxed{I}$ ... demos escribir:

$$I_1 = -I_2 \Rightarrow \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}} = \frac{V_2}{Z_{\ldots}} \ldots$$

$V_2^+ = 0$

... $\frac{V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}}$ ... $\frac{V_2^-}{\sqrt{\ldots}}$

$$= \frac{V_2^-}{\sqrt{z_{02}}\cdot\sqrt{z_{02}}} \Rightarrow \frac{a_1}{\sqrt{z_{01}}} - \frac{b_1}{\sqrt{z_{01}}} = \frac{b_2}{\sqrt{z_{02}}} \Rightarrow$$

Como queremos calcular $S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right]_{a_2=0}$ debemos escribir b_1 en función de a_1 ó b_2; y como $b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$ pero ahora tenemos $a_2 = 0 \Rightarrow b_1 = S_{11}a_1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{S_{21}} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right]_{a_2=0} = \frac{\sqrt{z_{02}}}{\sqrt{z_{01}}}(1-S_{11}) =$$

$$= \left\{ S_{11} = \frac{z+z_{02}-z_{01}}{z+z_{02}+z_{01}} \right\} = \boxed{\frac{2\cdot\sqrt{z_{01}\cdot z_{02}}}{z+z_{02}+z_{01}}}$$

* S... parámetro S_{12} marca, como ya hemos visto, ... ganancia vista en la puerta ① cuando ... nos el generador en la puerta ② y ... tenemos la puerta ① adaptada; por tanto el ... ema para el cálculo de este parámetro es:

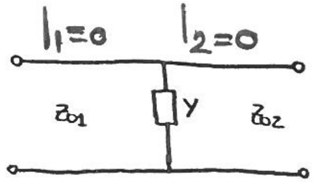
z_0 ...

Simetría Eléctrica.

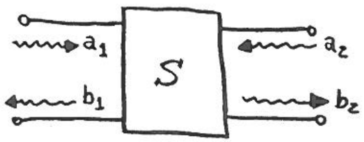
ESQUEMA DADO $\begin{matrix} V_1^+ = 0 \\ I_1 = -I_2 \end{matrix}$ por el mismo parámetro S_{21} pero cambiando ② por ① con unos pasos análogos al anterior llegaríamos

$$\left.\right]_{a_1=0} = \frac{\sqrt{z_{01}}}{\sqrt{z_{02}}}(1-S_{22}) = \frac{2\cdot\sqrt{z_{01}\cdot z_{02}}}{z+z_{02}+z_{01}} = \boxed{S_{21}}$$

2.2.2.- Ejemplo ② de cuadripolo:

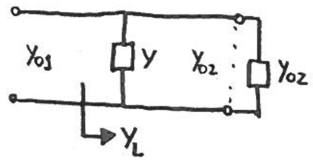


$\neq$



Tenemos que: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ó $\begin{matrix} b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}\cdot a_2 \\ b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{matrix}$

* $S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right]_{a_2=0}$ ≡ Coef. de reflexión en la puerta ① cuando ② está adaptada, por tanto tenemos el sgte esquema.



OJO, en admitancias:

$$\rho_{ent} = \frac{Z_L - z_{01}}{Z_L + z_{01}} = \frac{\frac{1}{Y_L} - \frac{1}{Y_{01}}}{\frac{1}{Y_L} + \frac{1}{Y_{01}}} = \frac{Y_{01} - Y_L}{Y_{01} + Y_L}$$

por tanto:

$$\boxed{S_{11}} = \frac{Y_{01} - Y_L}{Y_{01} + Y_L} = \left\{ Y_L = Y + Y_{02} \right\} = \boxed{\frac{Y_{01} - Y_{02} - Y}{Y_{01} + Y_{02} + Y}}$$

* $S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right]_{a_1=0}$ ≡ Coef. de reflexión en la puerta ② cuando ① está adaptada, por tanto tenemos el mismo esquema anterior cambiando 2 por 1.

$$\boxed{S_{22}} = \frac{Y_{02} - Y_L}{Y_{02} + Y_L} = \left\{ Y_L = Y + Y_{01} \right\} = \boxed{\frac{Y_{02} - Y_{01} - Y}{Y_{02} + Y_{01} + Y}}$$

ámetro tenemos el siguiente esquema:

$\boxed{V_1 = V_1^+ + V_1^-}$

$\boxed{V_2 = V_2^+ + V_2^-}$ = {Como la puerta ② está adaptada $V_2^+ = 0$ OJO, no entra potencia al cuadripolo por ②.} =

$= \boxed{V_2^-}$

$\boxed{V_1 = V_2}$, por tanto, podemos

$\ldots \cdot \frac{(V_1^+ + V_1^-)}{\sqrt{z_{01}}} = \sqrt{z_{02}} \cdot \frac{V_2^-}{\sqrt{z_{02}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{z_{01}} \cdot (a_1 + b_1) = \sqrt{z_{02}} \cdot b_2 \Rightarrow$

Como $a_2 = 0 \Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = S_{11}$

$\Rightarrow \frac{b_2}{a_1} = \frac{\sqrt{Y_{02}}}{\sqrt{Y_{01}}} \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{\sqrt{Y_{02}}}{\sqrt{Y_{01}}} (1 + S_{11})$

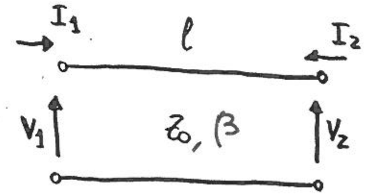
$a_2=0$ $= \frac{\sqrt{Y_{02}}}{\sqrt{Y_{01}}} (1 + S_{11}) = \boxed{\frac{2 \cdot \sqrt{Y_{02}} \cdot \sqrt{Y_{01}}}{Y_{01} + Y_{02} + Y}}$

Por ... es análogo al ...ior cambiando 2 por 1 $\left| = \boxed{\frac{2 \cdot \sqrt{Y_{01}} \cdot \sqrt{Y_{02}}}{Y_{02} + Y_{01} + Y} = S_{21}}\right.$

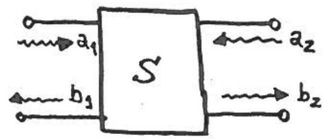
* S_1 ...

2.2.3.- Ejemplo ③ de cuadripolo:

Parámetros S de una línea de transmisión de longitud física "ℓ" y por tanto longitud eléctrica $\phi = \beta \cdot \ell = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \ell$ (rad. eléctricos) $= \frac{360^\circ}{\lambda} \cdot \ell$ (° eléctricos)

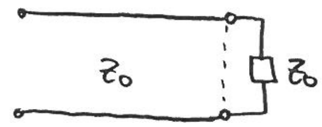


*



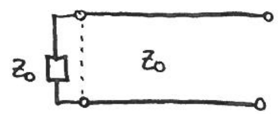
Tenemos que: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ó $\begin{array}{l} b_1 = S_{11} \cdot a_1 + S_{12}\, a_2 \\ b_2 = S_{21}\, a_1 + S_{22}\, a_2 \end{array}$

* $S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right]_{a_2=0}$ = Coef. de reflexión en la puerta ① cuando ② está adaptada, por tanto tenemos el sgte esquema:



$\boxed{S_{11}} = \frac{z_{ent} - z_0}{z_{ent} + z_0} = \frac{z_0 - z_0}{z_0 + z_0} = \boxed{0}$

* $S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right]_{a_1=0}$ = Coef. de reflexión en la puerta ② cuando ① está adaptada, por tanto tenemos el sgte. esquema.

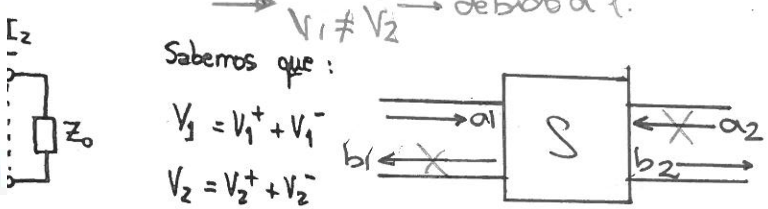


$\boxed{S_{22}} = \frac{z'_{ent} - z_0}{z'_{ent} + z_0} = \frac{z_0 - z_0}{z_0 + z_0} = \boxed{0}$

13/1

Para el cálculo de este parámetro tenemos el siguiente esquema.

$\rightarrow$ $I_1 \neq I_2$, $V_1 \neq V_2$ $\rightarrow$ debido a l.



Sabemos que:

$V_1 = V_1^+ + V_1^-$

$V_2 = V_2^+ + V_2^-$

dado vemos que: $\underbrace{V_2^+ = 0 \text{ y } V_1^- = 0}_{\text{Porque hay adaptación}}$,

V_2^-

ue: $V_2^- = V_1^+ \cdot e^{-j\beta l} = V_1^+ \cdot e^{-j\phi}$

ir: $\dfrac{V_2^-}{V_1^+} = e^{-j\phi}$

Como ya habíamos supuesto que $a_2 = 0$

$= S_{21} \Rightarrow \boxed{S_{21} = e^{-j\phi}}$

* análogo al S_{21} cambiando 2 por 1 y viceversa, se llega a: $\boxed{S_{12} = e^{-j\phi}}$

Po de trx de longitud l: $\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix}}$

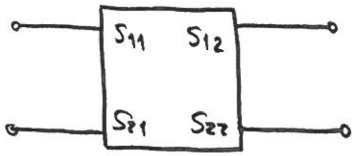
NO érdidas: $S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\phi} \\ e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix}$ " $\longrightarrow$ esto sí es simetría

$\phi = \beta l$ $\to$ longitud eléctrica.

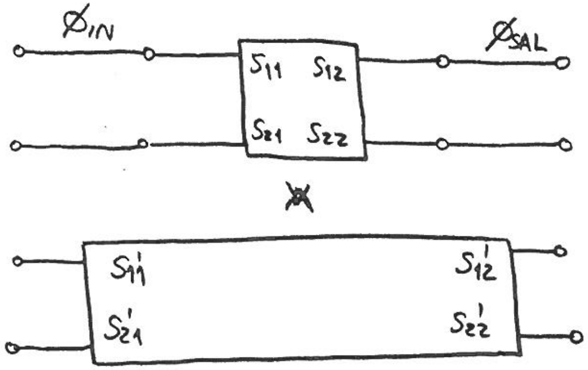
14

COMENTARIO DEL PUNTO 2.2.

Suponemos que tenemos un cuadripolo del que conocemos sus parámetros S.



Si ahora añadimos a la entrada una línea de transmisión de longitud eléctrica ϕ_{IN}, y a la salida una de ϕ_{SAL} los parámetros S del nuevo cuadripolo así formado serán:



Este es el nuevo cuadripolo así formado.

$S_{11}' = S_{11} \cdot e^{-j 2\phi_{IN}}$

$S_{22}' = S_{22} \cdot e^{-j 2\phi_{SAL}}$

$S_{12}' = S_{12} \cdot e^{-j(\phi_{IN} + \phi_{SAL})}$

$S_{21}' = S_{21} \cdot e^{-j(\phi_{IN} + \phi_{SAL})}$

...E LOS PARÁMETROS "S".

... se cumple que: $|S_{ii}| \leq 1$

$|S_{ji}| \leq 1$

... visto en los ejemplos anteriores, los ... ver con coef. de reflexión o con tensiones ... adaptada cuando se excita otra entrada, ... del cuadripolo no hay fuentes ni ... tener a la salida más tensión que ... de conservación de la energía.)

... el cuadripolo

...trico se cumple que: $S_{ij} = S_{ji}$

$S_{11} = S_{22}$
$S_{12} = S_{21}$
En un cuadripolo.

...trabajamos no tiene pérdidas, por el ...n de la energía la energía que ...e ser igual a la que sale, y ... expresa:

... que la matriz S cumple la siguiente

... $\boxed{I}$

donde S_t^* es la matriz S traspuesta y conjugada, e I la matriz identidad.

$S_t^* \rightarrow$ matriz traspuesta y conjugada.

⇒ Ejemplo: Red de 3 puertos sin pérdidas:

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* & S_{31}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{32}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & S_{33}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

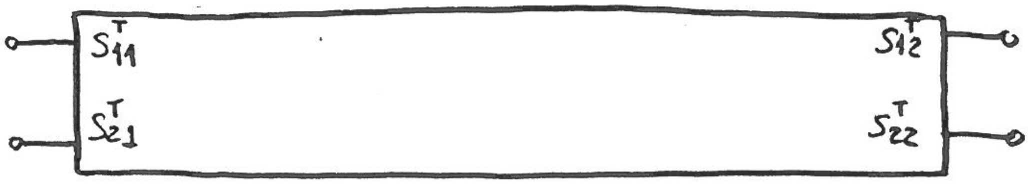
En vez de matricialmente se puede escribir: (OJO, el módulo de un complejo al cuadrado es el mismo por su conjugado)

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1$$

$\vdots$

4. ANÁLISIS DE CUADRIPOLOS EN CASCADA

Los parámetros S del cuadripolo total se calcularán de la siguiente forma:



1er paso:

Se calcula para cada cuadripolo una matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

donde:

$$x_{11} = \frac{1}{S_{21}} \; ; \; x_{12} = \frac{-S_{22}}{S_{21}} \; ; \; x_{21} = \frac{S_{11}}{S_{21}} \; ; \; x_{22} = S_{12} - \frac{S_{11} \cdot S_{22}}{S_{21}}$$

Obtendremos así 2 matrices: $X^{①}$ y $X^{②}$ una para cada cuadripolo.

2º paso:

Se calcula la siguiente matriz: $X^T = X^{①} \cdot X^{②} = \begin{pmatrix} X_{11}^T & X_{12}^T \\ X_{21}^T & X_{22}^T \end{pmatrix}$

3er paso:

Finalmente los parámetros S del cuadripolo total serán:

$$S_{11}^T = \frac{X_{21}^T}{X_{11}^T} \; ; \; S_{12}^T = X_{22}^T - \frac{X_{12}^T \cdot X_{21}^T}{X_{11}^T} \; ; \; S_{21}^T = \frac{1}{X_{11}^T} \; ; \; S_{22}^T = \frac{-X_{12}^T}{X_{11}^T}$$

NOTA: Si tenemos N cuadripolos en cascada el paso 1 hay que hacerlo N veces en vez de dos, uno para cada cuadripolo, y el paso 2 es: $X^T = X^{①} \cdot X^{②} \cdot X^{③} \cdot \ldots \cdot X^{Ⓝ}$

• Parámetros A, B, C, D / Z / Y

Parámetros A, B, C, D: $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} V_1 = A \cdot V_2 + B I_2 \\ I_1 = C V_2 + D I_2 \end{matrix}$

$[A]$ = Adimensional
$[B] = \Omega$
$[C] = (S \text{ ó } \mho)$
$[D]$ = Adim.

Matriz de impedancias: $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{matrix}$

$V = Z \cdot I$

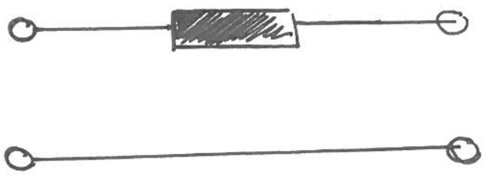
Matriz de admitancias: $\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{matrix}$

Matriz dispersión: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{matrix}$

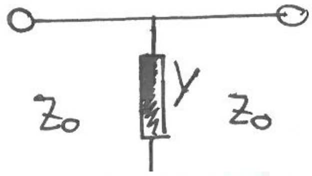
$B = S \cdot A$

CHULETARDO

• Ejemplo



Ejercicio: Calcular la matriz ABCD del siguiente cuadripolo:



Sabemos que:

$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} V_1 = A V_2 + B I_2 \\ I_1 = C V_2 + D I_2 \end{matrix}$

*Nota

- En parámetros S cargamos a las salidas de las puertas con las impedancias que adaptan.
- En parámetros ABCD hacemos cortos ó abiertos según el caso → CUIDADO!

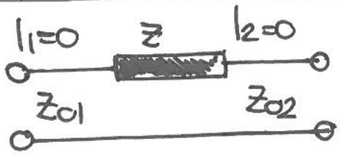
Tabl ...entre parámetros.

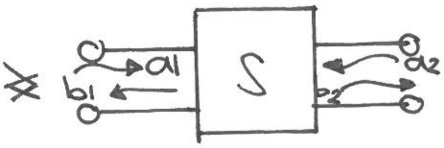
Conversions Between Two-Port Network Parameters

S	Z	Y	ABCD
S_{11}	$\frac{(Z_{11}-Z_0)(Z_{22}+Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0-Y_{11})(Y_0+Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{A+B/Z_0-CZ_0-D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{12}	$\frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2(AD-BC)}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{21}	$\frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
S_{22}	$\frac{(Z_{11}+Z_0)(Z_{22}-Z_0)-Z_{12}Z_{21}}{\Delta Z}$	$\frac{(Y_0+Y_{11})(Y_0-Y_{22})+Y_{12}Y_{21}}{\Delta Y}$	$\frac{-A+B/Z_0-CZ_0+D}{A+B/Z_0+CZ_0+D}$
$Z_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{11}	$\frac{Y_{22}}{\|Y\|}$	$\frac{A}{C}$
$Z_0\frac{2S_{12}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{12}	$\frac{-Y_{12}}{\|Y\|}$	$\frac{AD-BC}{C}$
$Z_0\frac{2S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{21}	$\frac{-Y_{21}}{\|Y\|}$	$\frac{1}{C}$
$Z_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}$	Z_{22}	$\frac{Y_{11}}{\|Y\|}$	$\frac{D}{C}$
$Y_0\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{\|Z\|}$	Y_{11}	$\frac{D}{B}$
$Y_0\frac{-2S_{12}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{12}}{\|Z\|}$	Y_{12}	$\frac{BC-AD}{B}$
$Y_0\frac{-2S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{\|Z\|}$	Y_{21}	$\frac{-1}{B}$
$Y_0\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{\|Z\|}$	Y_{22}	$\frac{A}{B}$
$\frac{(1+S_{11})(1-S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	A
$Z_0\frac{(1+S_{11})(1+S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{\|Z\|}{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	B
$\frac{1}{Z_0}\frac{(1-S_{11})(1-S_{22})-S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{-\|Y\|}{Y_{21}}$	C
$\frac{(1-S_{11})(1+S_{22})+S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	D

$_2Z_{21}$; $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Y = (Y_{11}+Y_0)(Y_{22}+Y_0) - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta Z = (Z_{11}+Z_0)(Z_{22}+Z_0) - Z_{12}Z_{21}$; $Y_0 = 1/Z_0$.

Ejemplo 1 de Cuadripolos.





$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$

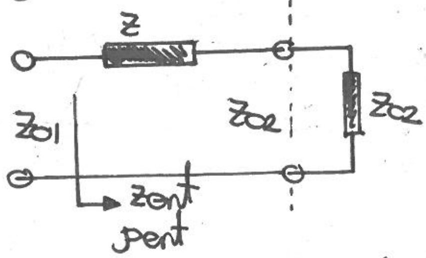
$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$

Para calcular S_{11}:

$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0} \longrightarrow$ Coeficiente de reflexión en la puerta① cuando ② está adaptada.

$Z_{ent} = Z + Z_{02}$

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \frac{Z_{ent} - Z_{01}}{Z_{ent} + Z_{01}} = \frac{Z + Z_{02} - Z_{01}}{Z + Z_{02} + Z_{01}}$$

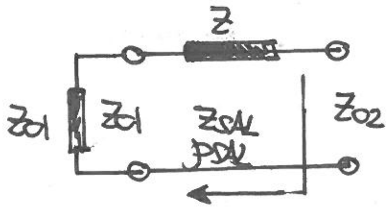


Para calcular S_{22}:

$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0} \longrightarrow$ Coeficiente de reflexión en la puerta② cuando ① está adaptada.

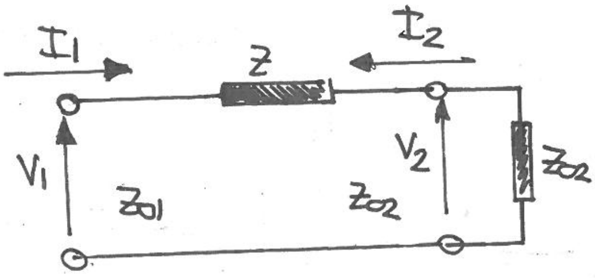
$Z_{SAL} = Z + Z_{01}$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \frac{Z_{SAL} - Z_{02}}{Z_{SAL} + Z_{02}} = \frac{Z + Z_{01} - Z_{02}}{Z + Z_{01} + Z_{02}}$$



Para calcular S_{21}:

$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0} \longrightarrow$ Ganancia vista en la puerta② cuando ponemos el generador en la puerta① y suponemos ② adaptada.



Sabiendo que: $V_1 = V_1^+ + V_1^-$ $\longrightarrow$ ②adaptada

$V_2 = \cancel{V_2^+} + V_2^-$ ($V_2^+ \to 0$)

$I_1 = I_1^+ + I_1^- = \frac{V_1^+}{Z_{01}} - \frac{V_1^-}{Z_{01}}$

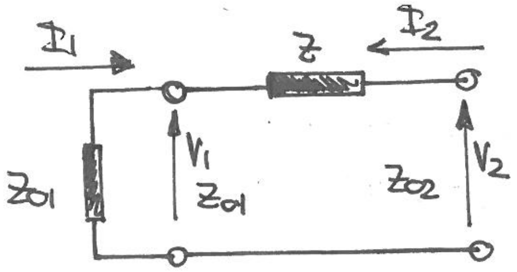
②adaptada

$I_2 = I_2^+ + I_2^- = \frac{V_2^+}{Z_{02}} - \frac{V_2^-}{Z_{02}}$

$I_1 = -I_2$; $\frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_{01}} = -\left(\frac{\cancel{V_2^+} - V_2^-}{Z_{02}}\right)$; $\frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_{01}} = \frac{V_2^-}{Z_{02}}$; $\frac{1 - \frac{V_1^-}{V_1^+}}{Z_{01}} = \frac{V_2^-}{V_1^+ \cdot Z_{02}}$;

$$\frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{Z_{02}}{Z_{01}}\left(1 - \frac{V_1^-}{V_1^+}\right) = \frac{Z_{02}}{Z_{01}}(1 - S_{11})$$

... ② y suponemos la puerta① adaptada.



$$S_{12}=\frac{b_1}{a_2}\bigg|_{a_1=0}=\frac{(V_1^-/\sqrt{Z_{01}})}{(V_2^+/\sqrt{Z_{02}})}=\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\cdot\frac{V_1^-}{V_2^+}$$

① adaptada

$$I_1=-I_2\ ;\ \frac{V_1^+-V_1^-}{Z_{01}}=\frac{-[V_2^+-V_2^-]}{Z_{02}}\ ;\ \frac{V_1^-}{Z_{01}}=\frac{V_2^+-V_2^-}{Z_{02}}\ ;\ \frac{V_1^-}{V_2^+Z_{01}}=\frac{1-\frac{V_2^-}{V_2^+}}{Z_{02}}\ ;\ \frac{V_1^-}{V_2^+}=\frac{Z_{01}}{Z_{02}}(1-S_{22})$$

$$S_{12}=\frac{b_1}{a_2}\bigg|_{a_1=0}=\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\cdot\frac{V_1^-}{V_2^+}=\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\cdot\frac{Z_{01}}{Z_{02}}(1-S_{22})=\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}(1-S_{22})$$

Notas del Ejercicio

- Al calcular S_{11} y S_{22} lo hacemos como si fuese un coeficiente de reflexión porque forzamos la adaptación de la salida y la entrada respectivamente.
- Al calcular S_{21}, debemos distinguir 2 pasos:
  - Ecuación de parámetros S:

$$S_{21}=\frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0}=\frac{(V_2^-/\sqrt{Z_{02}})}{(V_1^+/\sqrt{Z_{01}})}=\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\cdot\frac{V_2^-}{V_1^+}$$

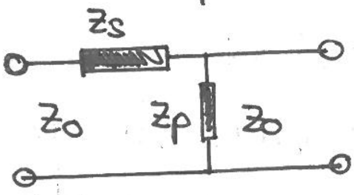
Definición

  - Ecuación de tensiones ó corrientes:

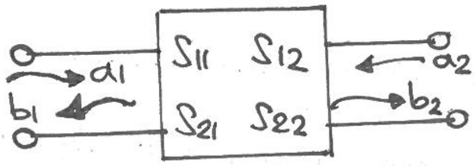
$I_1=-I_2 \ldots \longrightarrow$ De donde sacamos $\frac{V_2^-}{V_1^+}$ para introducirla aquí.

- S_{22} y S_{12} se podrían haber calculado por simetría eléctrica.

Determinar los parámetros S del siguiente cuadripolo:

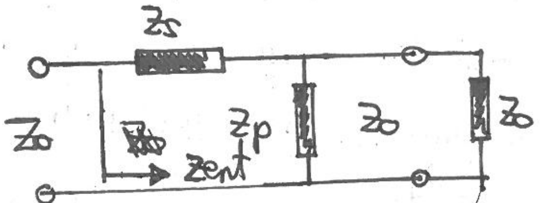


$\not\approx$



$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$
$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

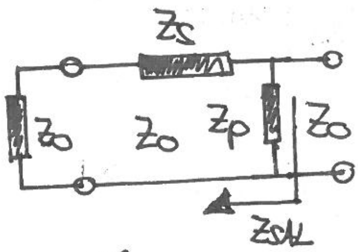
Para calcular S_{11}:



$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\bigg|_{a_2=0} = \frac{V_1^-/\sqrt{Z_0}}{V_1^+/\sqrt{Z_0}} = \frac{V_1^-}{V_1^+}\bigg|_{a_2=0} = \rho_{ent}\bigg|_{a_2=0} = \frac{Z_{ent}-Z_0}{Z_{ent}+Z_0}$$

$$Z_{ent} = [Z_s \text{ serie } (Z_p /\!/ Z_0)] = \frac{Z_s + \frac{Z_p \cdot Z_0}{Z_p+Z_0} - Z_0}{Z_s + \frac{Z_p \cdot Z_0}{Z_p+Z_0} + Z_0} = \frac{Z_s(Z_p+Z_0)+Z_pZ_0 - Z_0(Z_p+Z_0)}{Z_s(Z_p+Z_0)+Z_pZ_0+Z_0(Z_p+Z_0)} = \frac{Z_pZ_s+Z_0Z_s-Z_0^2}{Z_pZ_s+Z_0Z_s+Z_0^2+2Z_pZ_0}$$

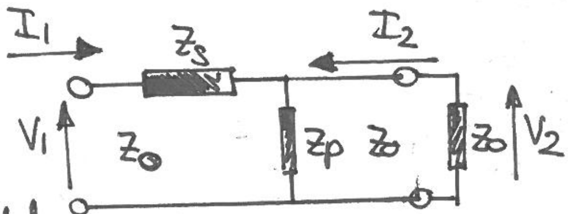
Para calcular S_{22}:



$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\bigg|_{a_1=0} = \frac{V_2^-}{V_2^+}\bigg|_{a_1=0} = \rho_{sal}\bigg|_{a_1=0} = \frac{Z_{sal}-Z_0}{Z_{sal}+Z_0}$$

$$Z_{sal} = [Z_p \text{ paralelo } (Z_s+Z_0)] = \frac{\frac{Z_p\cdot(Z_s+Z_0)}{Z_p+(Z_s+Z_0)} - Z_0}{\frac{Z_p(Z_s+Z_0)}{Z_p+(Z_s+Z_0)} + Z_0} = \frac{Z_pZ_s - Z_sZ_0 - Z_0^2}{Z_pZ_s + Z_0^2 + Z_sZ_0 + 2Z_pZ_0}$$

Para calcular S_{21}:



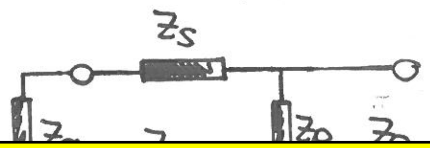
$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\bigg|_{a_2=0} = \frac{V_2^-/\sqrt{Z_0}}{V_1^+/\sqrt{Z_0}}\bigg|_{a_2=0} = \frac{V_2^-}{V_1^+}\bigg|_{a_2=0}$$

② adaptada

$$V_1 = Z_s I_1 + V_2\ ;\quad V_1^+ + V_1^- = Z_s \cdot \frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_0} + \cancel{V_2^+} + V_2^-\ ;\quad 1 + \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{Z_s}{Z_0}\left(1 - \frac{V_1^-}{V_1^+}\right) + \frac{V_2^-}{V_1^+}$$

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+}\bigg|_{a_2=0}\ ;\quad 1 + S_{11} = \frac{Z_s}{Z_0}(1 - S_{11}) + S_{21} \longrightarrow S_{21} = 1 + S_{11} - \frac{Z_s}{Z_0} + \frac{Z_s}{Z_0} S_{11}$$

Para calcular S_{12}:



$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\bigg| = \frac{(V_1^-/\sqrt{Z_0})}{} \bigg| = \frac{V_1^-}{}$$

V_2 Z_0 V_2 V_2 V_2 V_2 V_2 $1+\frac{}{Z_0}$

Notas del Ejercicio

- Al calcular S_{11} y S_{22}, debemos hacerlo como coeficientes de reflexión.
- Al calcular S_{21} y S_{22}, siempre vamos a necesitar otra ecuación aparte de la de los parámetros S que vamos a sacar de analizar las corrientes ó tensiones del circuito. (al final nos tiene que quedar como tensiones) para introducirla en la 1ª ecuación de los parámetros S.
- Como es posible que nos aparezcan expresiones de S_{11} y S_{22} en S_{12} y S_{21}, calcular siempre S_{11} y S_{22} primero.

En parámetros S, quedarnos con la idea de anular ondas incidentes.

- Adaptamos la salida $\rightarrow V_2^+=0$ - Adaptamos la entrada $\rightarrow V_1^+=0$

$$V_1=V_1^++V_1^-$$

$$V_2=V_2^++V_2^-$$

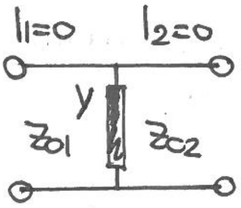
$$I_1=\frac{V_1^++V_1^-}{Z_0}$$

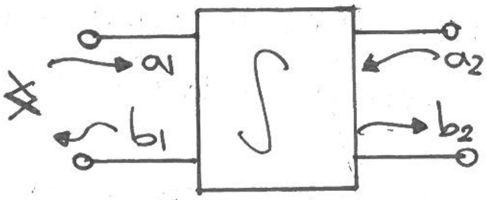
$$I_2=\frac{V_2^++V_2^-}{Z_0}$$

Este circuito no tiene simetría eléctrica.

$$S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{Z_pZ_s+Z_0Z_s-Z_0^2}{Z_pZ_s+Z_0Z_s+Z_0^2+2Z_pZ_0} & \frac{1+\frac{Z_pZ_s-Z_sZ_0-Z_0^2}{Z_pZ_s+Z_0^2+Z_sZ_0+2Z_pZ_0}}{1+\frac{Z_s}{Z_0}} \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

• Ejemplo 2 de Cuadripolos.





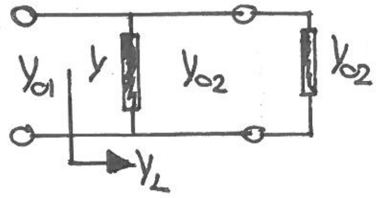
$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$

$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

• Para calcular S_{11}:

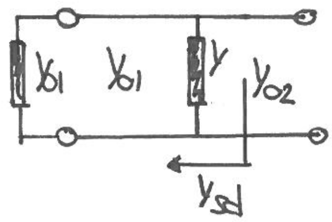
$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Bigg|_{a_2=0} = \rho_{ent} = \frac{Z_{ent}-Z_{01}}{Z_{ent}+Z_{01}} = \frac{\frac{1}{Y_{ent}} - \frac{1}{Y_{01}}}{\frac{1}{Y_{ent}} + \frac{1}{Y_{01}}} = \frac{Y_{01}-Y_L}{Y_{01}+Y_L} = \frac{Y_{01}-Y_{02}-Y}{Y_{01}+Y_{02}+Y}$$

$Y_L = Y_{02} + Y$



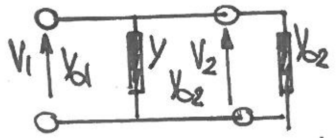
Para calcular S_{22}:

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Bigg|_{a_1=0} = \rho_{sal} = \frac{Z_{sal}-Z_{02}}{Z_{sal}+Z_{02}} = \frac{\frac{1}{Y_{sal}} - \frac{1}{Y_{02}}}{\frac{1}{Y_{sal}} + \frac{1}{Y_{02}}} = \frac{Y_{02}-Y_{sal}}{Y_{02}+Y_{sal}} = \frac{Y_{02}-Y_{01}-Y}{Y_{02}+Y_{01}+Y}$$



Para calcular S_{21}:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Bigg|_{a_2=0}$$



$V_1 = V_2$; $V_1^+ + V_1^- = \cancel{V_2^+} + V_2^-$; $\sqrt{Z_{01}} \cdot \frac{V_1^+ + V_1^-}{\sqrt{Z_{01}}} = \sqrt{Z_{02}} \cdot \frac{V_2^-}{\sqrt{Z_{02}}}$; $\sqrt{Z_{01}}\,(a_1+b_1) = \sqrt{Z_{02}}\; b_2$

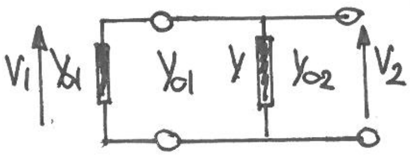
2 adaptada $\rightarrow 0$

$$b_2 = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\,(a_1+b_1)\ ;\ \frac{b_2}{a_1} = \sqrt{\frac{Y_{02}}{Y_{01}}}\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right) = \sqrt{\frac{Y_{02}}{Y_{01}}}\,(1+S_{11})$$

Por tanto,

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Bigg|_{a_2=0} = \sqrt{\frac{Y_{02}}{Y_{01}}}\,(1+S_{11}) = \frac{2\sqrt{Y_{02}}\cdot\sqrt{Y_{01}}}{Y_{01}+Y_{02}+Y}$$

Para calcular S_{12}: $\longrightarrow$



Por simetría eléctrica del circuito,

$$S_{12} = \frac{2\sqrt{Y_{01}}\cdot\sqrt{Y_{02}}}{Y_{02}+Y_{01}+Y}$$

Notas del Ejercicio

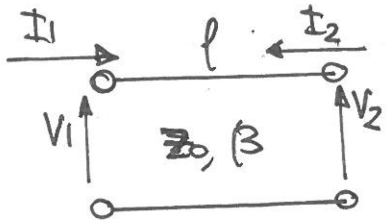
- Con admitancias, plantear las ecuaciones como si fuesen impedancias y una vez tengamos todo expresado lo máximo operado posible, le damos la vuelta a las admitancias.

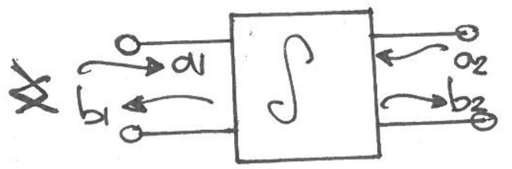
Cuidado → Admitancias en paralelo se suman, admitancias en serie se hace el paralelo.

- En circuitos con simetría eléctrica, calculando S_{11} podemos conocer S_{22} y calculando S_{21} podemos conocer S_{22}, cambiando en sus expresiones 1 por 2 ó viceversa.

• Ejemplo 3 de Cuadripolos.

Parámetros S de una línea de transmisión de longitud física "l" y por tanto longitud eléctrica $\phi = \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot l$ (radianes eléctricos) $= \frac{360°}{\lambda} l$. (° eléctricos)

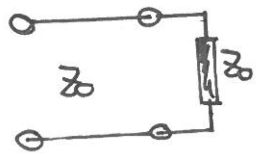




$$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$$
$$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$$

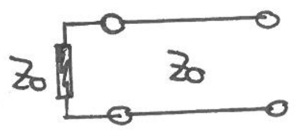
Para calcular S_{11}:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{Z_{ent} - Z_0}{Z_{ent} + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$



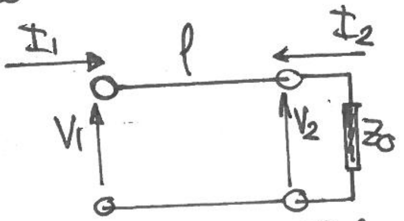
Para calcular S_{22}:

$$S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} = \frac{Z_{sal} - Z_0}{Z_{sal} + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$



¿Por qué?

Para calcular S_{21}:



$V_1 = V_1^+ + \cancel{V_1^-} \to 0 \longrightarrow V_1 = V_1^+$

$V_2 = \cancel{V_2^+} + V_2^- \qquad V_2 = V_2^-$

② adaptado

Por otro lado sabemos que: $V_2^- = V_1^+ e^{-j\beta l} = V_1^+ e^{-j\phi}$

$\frac{V_2^-}{V_1^+} = e^{-j\phi}$ y operando $\longrightarrow \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{(V_2^-/\sqrt{Z_0})}{(V_1^+/\sqrt{Z_0})} = \frac{b_2}{a_1} = S_{21} \longrightarrow S_{21} = e^{-j\phi}$

Para calcular $S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{a_1=0} \longrightarrow$ Es análogo a S_{21} cambiando 2 por 1 y viceversa, y se llega a $S_{12} = e^{-j\phi}$

Por tanto para una línea de transmisión de longitud l: $S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix}$

• Nota

$\begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha l} e^{-j\phi} \end{pmatrix}$ $\quad \phi = \beta \cdot l$

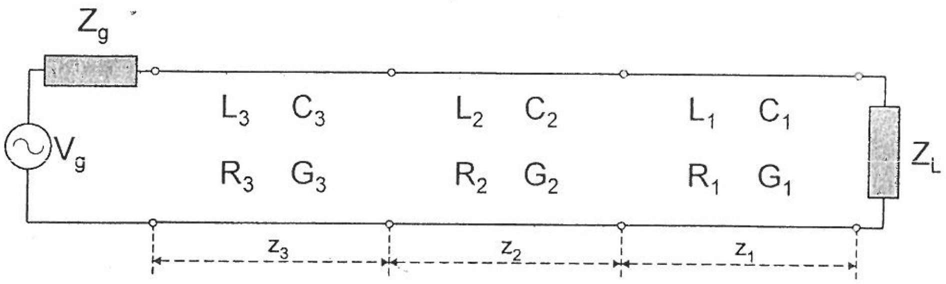
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS I

FEBRERO 2008

PROBLEMA 1 (4 puntos).

La siguiente figura representa un circuito de comunicación compuesto por un generador real de tensión, tres líneas de transmisión y una impedancia de carga. Los parámetros primarios de la línea de transmisión "n" son: L_n, C_n, R_n y G_n y z_n es su longitud física. Sus valores numéricos se proporcionan en la tabla I.



	L_n [nH/m]	C_n [pF/m]	R_n [Ω/m]	G_n [1/Ωm]	z_n [m]
Línea Trans. 1	1333.33	33.333	0.0	0.0	0.25
Línea Trans. 2	666.67	66.666	0.0	0.0	0.25
Línea Trans. 3	333.33	133.333	0.0	0.0	0.50

Tabla I

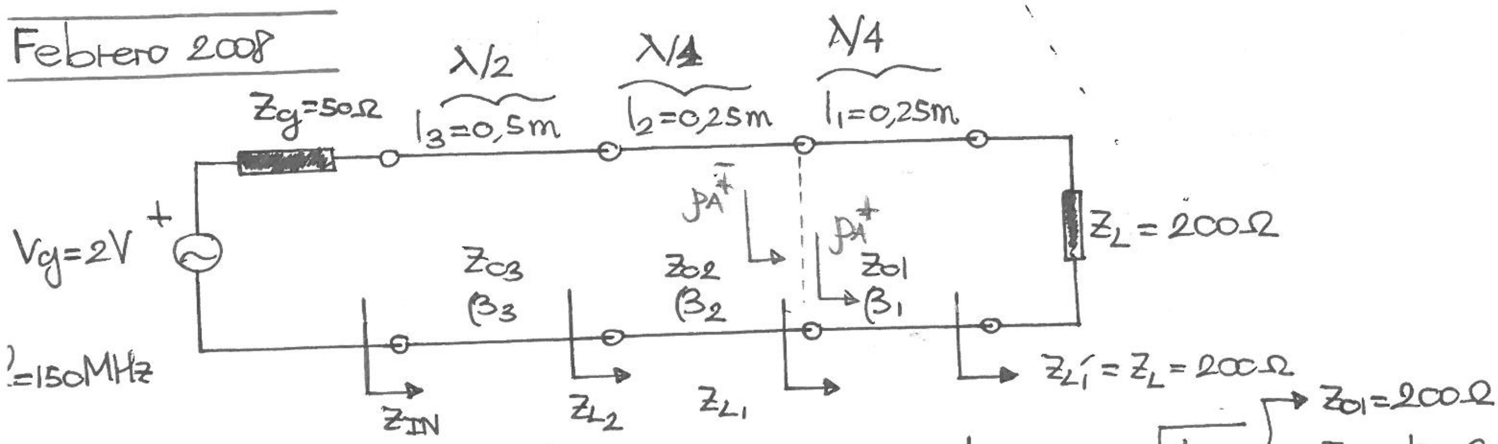
El valor de la impedancia de carga es ($Z_L=200\Omega$), la impedancia del generador es ($Z_g=50\Omega$) y el valor de pico del generador es ($V_g=2V$). El generador de tensión genera una onda sinusoidal cuya frecuencia es 150 MHz.

1.- Calcule el coeficiente de reflexión que ve el generador real de tensión.
2.- Dibuje el módulo de tensión y corriente en las tres líneas de transmisión en función de la distancia al generador.
3.- Dibuje la potencia media transmitida en cualquier punto de la línea de transmisión.
4.- Se cambia la impedancia de carga a ($Z_L=100+50j\ \Omega$). Modifique lo mínimo posible la longitud de la primera línea de transmisión y los parámetros primarios (L_2 y C_2) de la segunda línea de transmisión para que el generador real de tensión vea adaptación de

Notas del Ejercicio

- Como $R = G = 0 \rightarrow$ Líneas de tx sin pérdidas

Febrero 2008



1| Las tres líneas son sin pérdidas, ya que $R=G=0$. Además: $Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$ → $Z_{01}=200\Omega$, $Z_{02}=100\Omega$, $Z_{03}=50\Omega$

Por otro lado, $V_\phi=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\lambda\cdot f=\frac{\omega}{\beta} \longrightarrow V_{\phi1}=V_{\phi2}=V_{\phi3}=1{,}5\cdot10^8\,ms^{-1}$

$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1m$

¿ρ_{in}?

$$Z_{L1}=Z_{01}\cdot\frac{Z_L+jZ_{01}\,tg(\beta_1 l_1)}{Z_{01}+jZ_L\,tg(\beta_1 l_1)}=200\Omega \longrightarrow$$

{Como se ve directamente en el esquema, no hace en el examen → queda mal}

$$Z_{L2}=Z_{02}\cdot\frac{Z_{L1}+jZ_{02}\,tg(\beta_2 l_2)}{Z_{02}+jZ_1\,tg(\beta_2 l_2)}\underset{\text{Adaptador }\frac{\lambda}{4}}{=}\frac{Z_{02}^2}{Z_{L1}}=\frac{100^2}{200}=50\Omega \longrightarrow$$

{En un adaptador λ/4: $\beta_2 l_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{4}=\frac{\pi}{2}$}

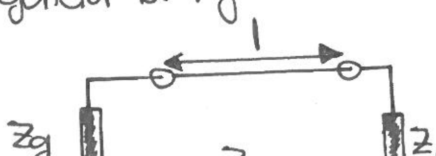
Como la última línea tiene una longitud de λ/2, esto es una vuelta completa a la circunferencia de la CS, por lo que estamos en el mismo punto → $Z_{IN}=Z_{L2}=50\Omega$

$$\rho_{IN}=\frac{Z_{IN}-Z_{03}}{Z_{IN}+Z_{03}}=\frac{50-50}{50+50}=0 \longrightarrow \text{Hay transmisión total de potencia.}$$

$$\rho_A^+=\frac{Z_{L1}-Z_{01}}{Z_{L1}+Z_{01}}$$

*Nota
Coeficientes de reflexión cambian de un lugar a otro. Ejemplo $\rho_A^-=\frac{Z_{L1}-Z_{02}}{Z_{L1}+Z_{02}}$

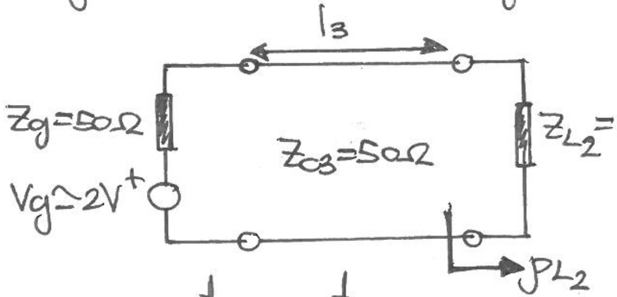
2| En general la V y la I de una línea de tx es:



$$V(z)=V_0^+e^{-j\beta z}+V_0^-e^{+j\beta z}=V_0^+e^{-j\beta z}\left(1+\frac{V_0^-}{V_0^+}e^{+j2\beta z}\right)$$

$$I(z)=\ldots e^{-j\beta z}\ldots e^{+j\beta z}\ldots V_0^+e^{-j\beta z}\left(1-\frac{V_0^-}{\ldots}e^{j2\beta z}\right)$$

Desde el generador tenemos el siguiente esquema: <u>Linea 3</u>

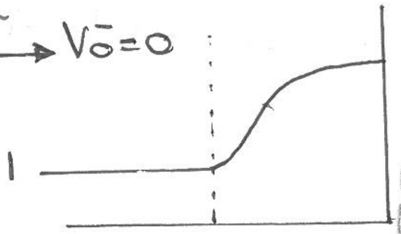


En las expresiones anteriores tenemos que:

$$V_0^+=V_g\cdot\frac{Z_0}{Z_g+Z_0}=2\frac{50}{50+50}=\frac{100}{100}=1V$$

Planteado con el coeficiente de reflexión desplazado

$$\frac{V_0^-}{V_0^+}=\rho_{L_2}\cdot e^{-j2\beta_3 l_3}=\frac{Z_{L2}-Z_{03}}{Z_{L2}+Z_{03}}e^{-j2\beta_3 l_3}=0\longrightarrow V_0^-=0$$



En esta línea: $|V(z)|=|V_0^+|=1V$

$$|I(z)|=\frac{|V_0^+|}{Z_{03}}=20mA$$

¿por qué divide entre 8?

Es un máximo porque $\rho_{L_1}\in\mathbb{R}^+\rightarrow$ zona de sup. en el eje real $+\rightarrow$ zona $|V_{max}|$?

<u>Bilbao</u>

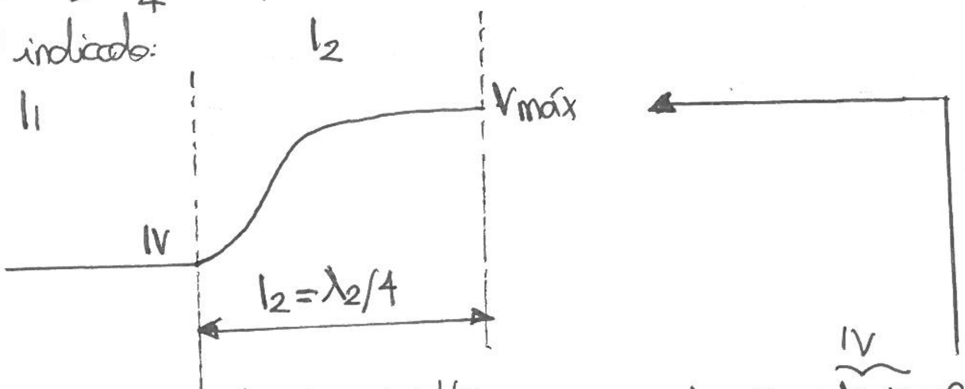
<u>Linea 2</u>

$$\rho_{L_1}=\frac{Z_{L_1}-Z_{02}}{Z_{L_1}-Z_{02}}=\frac{200-100}{200+100}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}^+\quad(\varphi_{L_1}=0)$$

¿Cómo sabe qué esta discontinuidad es un max?

Hay un máximo del DOE$_2$ en la discontinuidad 2-1.

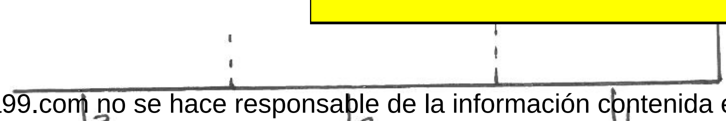
Como además $l_2=\frac{\lambda_2}{4}$, que es la distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos del DOE$_2$ es el indicado:



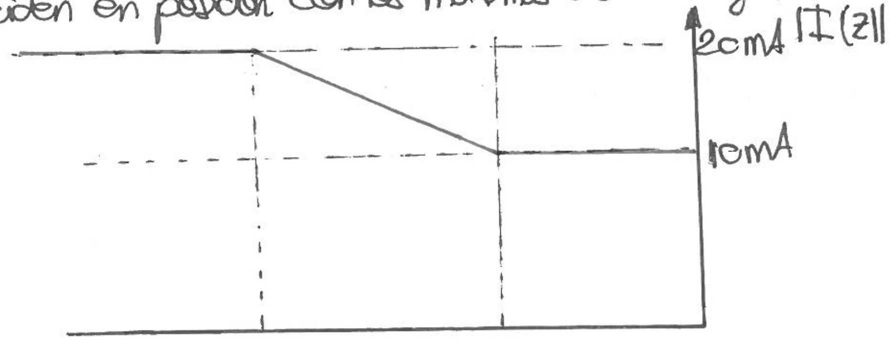
$$\frac{V_{max}}{V_{min}}=S=SWR=ROE=\frac{1+|\rho_{L_1}|}{1-|\rho_{L_1}|}=\frac{1+1/3}{1-1/3}=2\longrightarrow V_{máx}=2\cdot\underbrace{V_{min}}_{1V}=2V$$

<u>Linea 1</u>

No hay onda reflejada en la línea 1.

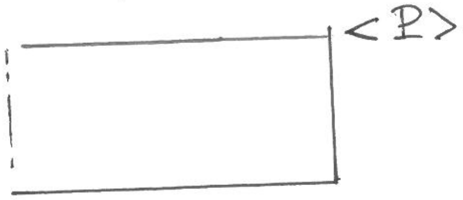


Para representar el módulo de $I(z)$ en toda la línea sabemos que los máximos de $|V(z)|$ coinciden en posición con los máximos de $I(z)$ y viceversa:



$$S_2 = \frac{I_{max}}{I_{min}} = 2$$

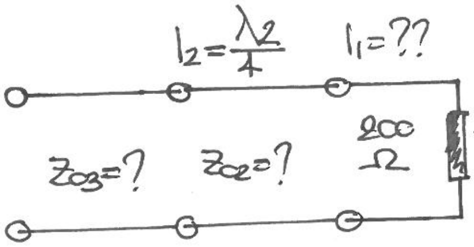
3] Como hay adaptación de impedancias, existe transmisión total de potencia, por tanto el diagrama es:



1ª forma : $\langle P \rangle = P_{dg} = \frac{V_g^2}{8R_g} = \frac{2^2}{8 \cdot 50} = 10mW$

2ª forma: $\langle P \rangle = \frac{1}{2} Re\left(V(z) \cdot I^*(z)\right)\Big|_{Línea3} = \frac{1}{2} Re\left(V(z) \cdot \frac{V^*(z)}{3}\right) = \frac{|V(z)|^2}{2 \cdot Z_{o3}} = \frac{1^2}{2 \cdot 50} = 10mW$

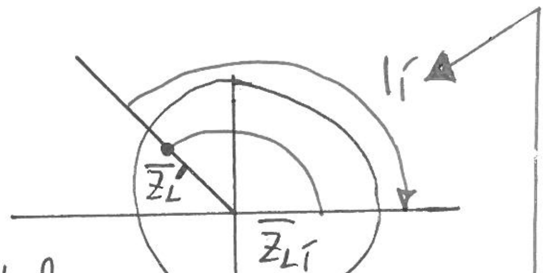
4]



$$z_L' = \frac{100 + 50j\ \Omega}{200} = 0,5 + j0,25\ \Omega$$

Para adaptar con un $\lambda_2/4$ debe ser $Z_{o2} = \sqrt{Z_{o3} \cdot Z_{L1}}$

Ambas (Z_{o3} y Z_{L1}') deben ser reales $\rightarrow Z_{o3} = 50\ \Omega$, $\rightarrow Z_{L1}' = ??$



$l_1 = 0,2m$ es lo que debemos modificar de la longitud de la línea 1.

L_2 y C_2 se modificaron viendo el

* Notas del Ejercicio *

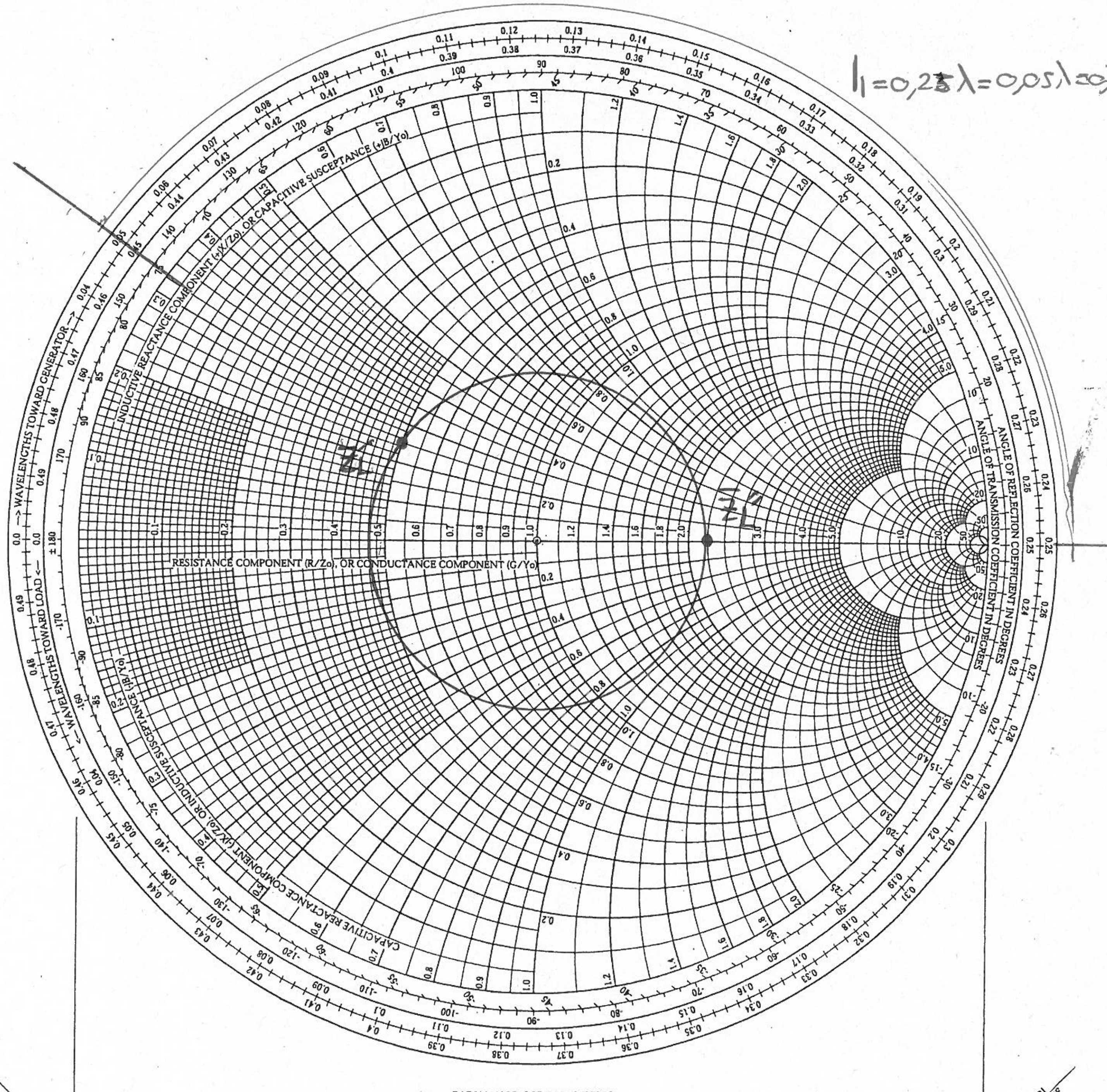
- Como $R = G = 0$ → Líneas de tx sin pérdidas
- En los esquemas identificar longitudes y ver si hay $\lambda/4$ y $\lambda/2$.

Febrero 2008 - Apartado 4

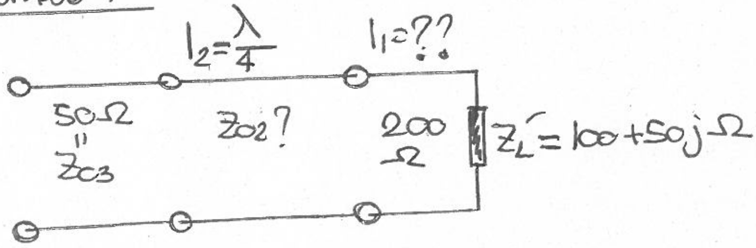
The Complete Smith Chart

Black Magic Design

$l_1=0{,}25\lambda=0{,}05\lambda=0{,}2\lambda$



Apartado 4



Para que haya adaptación con una lolt $\frac{\lambda}{4} \longrightarrow Z_{02}=\sqrt{Z_{03}\cdot Z_L}$

En un $\frac{\lambda}{4}$, tanto Z_{03} como Z_L, deben ser reales (no tener parte imaginaria).

CLAVE

$Z_{03}=50\Omega$

$Z_L' \longrightarrow$ debemos desplazarnos hacia generador hasta el eje real f.

$$\overline{Z_L}\Big|_{200\Omega}=\frac{100+50j}{200}=0,5+j0,25\ \Omega$$

$l_1=0,2\,m$

• "Seguir la onda" → Ejercicio clave

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS I

PROBLEMA 1 FEBRERO 2009

Se dispone de un cable coaxial de 10 metros de longitud, con $\varepsilon_r = 4$, de bajas pérdidas y cuya constante de atenuación varía con la frecuencia como

$$\alpha = k\sqrt{f}$$

Caso1:

Cuando el extremo final del cable se cortocircuita y se envía al principio del mismo una potencia incidente de -10 dBm, a la frecuencia de 100 MHz, se mide al principio del cable una potencia reflejada de -16 dBm.

Caso 2:

Cuando al final del cable se conecta una carga de valor $Z_L = 150\Omega$ (siendo Z_L mayor que la impedancia característica del cable) y se envía al principio del mismo una potencia incidente de -10 dBm, a la frecuencia de 100 MHz, se mide al principio del cable una potencia reflejada de -22 dBm.

Calcule a la frecuencia de 100 MHz:

a) Los parámetros primarios y secundarios del cable coaxial.
b) La distancia a la carga, en metros, del máximo de tensión más cercano y del más lejano a la carga, y el valor del módulo de la tensión en dichos puntos para el caso 1 y para el caso 2.
c) La distancia a la carga, en metros, del mínimo de tensión más cercano y del más lejano a la carga, y el valor del módulo de la tensión en dichos puntos para el caso 1 y para el caso 2.

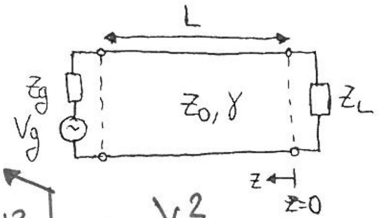
Si se envía al principio del cable una potencia de -10 dBm a la frecuencia de 400 MHz:

d) Calcule la potencia reflejada que se mediría al principio del cable si el extremo final del cable se cortocircuita.

e) Calcule la potencia reflejada que se mediría al principio del cable y la potencia que se disiparía en la carga si en el extremo final del cable se coloca una carga de valor

PROB 1 FEB 2009 → "seguir la onda"

NOTA TEÓRICA: "LÍNEA DE TRANSMISIÓN DE BAJAS PÉRDIDAS"



$Z_g = Z_0$

$$P_{inc} = \frac{|V^+|^2}{2Z_0} = P_{dg} = \frac{V_g^2}{8R_g}$$

P_{inc} ≡ Potencia incidente en la ldt. $= \dfrac{|V^+|^2}{2Z_0} = \dfrac{V_g^2}{8R_g}$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

La potencia reflejada al principio de la línea es:

$$P_{ref_{entrada}} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha L}$$

La potencia transmitida a la carga es:

$$P_L = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot \underbrace{(1 - |\rho_L|^2)}_{\text{la que llega a la carga}}$$

⇒ Esta potencia se disipará en la carga Z_L.

◉ Parámetros secundarios (Z_0, γ)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega)$$

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (m/s)$$

$\gamma = \alpha + j\beta$

→ $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \dfrac{2\pi f}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \omega\sqrt{LC}$ (rad/m)

→ $\alpha = \alpha_c + \alpha_d = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} + \dfrac{G}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (Np/m)

◉ Parámetros primarios (L, C, G, R)

$L = \dfrac{Z_0}{V_\phi}$ (H/m) Inductancia serie por unidad de longitud

$C = \dfrac{1}{Z_0 V_\phi}$ (F/m) Capacidad paralelo " " " "

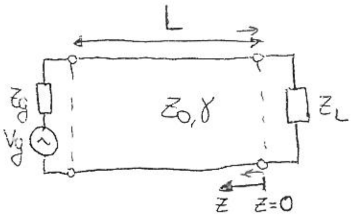
$G = \dfrac{\omega\varepsilon''}{\ldots} C = \dfrac{2\alpha_d}{\ldots}$ (S/m) Conductancia paralelo por unidad de longitud

Δz

FIN NOTA TEÓRICA

Solución:

a) ¿Parám. 1^{arios} y 2^{arios}?



$L = 10m$
$\varepsilon_r = 4$.
BAJAS PÉRDIDAS.
$f = 10^8\ Hz$

CASO ①: $Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1 \Rightarrow P_{ref\,entrada} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha \cdot L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot L}$

$$\underbrace{P_{ref}}_{entrada} = \underbrace{P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L}}_{incidente} \underbrace{|\rho_L|^2 e^{-2\alpha L}}_{reflejo}$$

$$10^{-1'6} = 10^{-1} \cdot e^{-2\alpha \cdot 10} \cdot \overset{C.C.}{|-1|^2} \cdot e^{-2\alpha \cdot 10}$$

$$\frac{10^{-1'6}}{10^{-1}} = e^{-40\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\ln\left(\frac{10^{-1'6}}{10^{-1}}\right)}{-40} = 0'03454\ Np/m}$$

CASO ②: $Z_L = 150\,\Omega > Z_0 \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} > 0 \Rightarrow P_{ref\,entrada} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot \left|\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\right|^2 \cdot e^{-2\alpha L}$

$$10^{-2'2} = 10^{-1} \cdot e^{-4\alpha \cdot 10} \cdot \left(\frac{150 - Z_0}{150 + Z_0}\right)^2$$

α es la misma en la línea

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{V_0}{f} = 1,5m$

Como ya conocemos α, sólo nos falta Z_0:

$$\boxed{Z_0 = 50\,\Omega}$$

Además: $\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f}{C_0} \cdot \sqrt{4} = \frac{2\pi \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} = 4'189\ rad/m}$

Los parámetros secundarios son:
- $Z_0 = 50(\Omega) \equiv$ Imp. característica de la Ldt.
- $\gamma = \alpha + j\beta = 0'03454 + j\frac{4\pi}{3}\ (m^{-1}) \equiv$ Cte de propagación.

Los parámetros primarios son: $(L, C, G$ y $R)$

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{C_0}{\sqrt{4}} = 1'5 \cdot 10^8\ m/s$$

Como $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1'5 \cdot 10^8\ m/s$ y $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\,\Omega$ tenemos:
- $L = \frac{Z_0}{V_\phi} = 3'3 \cdot 10^{-7}\ (H/m)$
- $C = \frac{1}{Z_0 V_\phi} = 1'3 \cdot 10^{-10}\ (F/m)$

Como el dieléctrico es $\varepsilon_r = 4$ no hay pérdidas en él y: $G = 0\ (S/m)$

Como hay atenuación tiene que ser por los conductores: $\alpha = \alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow$

$\alpha_d = \frac{1}{2} tg\delta\,\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ... ε ... $\omega\varepsilon_r\varepsilon_0$ ... bajas pérdidas. $V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 1'5$ metros

La distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos es $\underbrace{\frac{\lambda}{4}}^{\text{clave}} = 0'375$ metros.

CASO ①:

$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1 \Rightarrow$ mínimo de tensión en la carga $\Rightarrow$ máximo de tensión a 0'375 metros de la carga.

porque $\rho_L < 0$ (cae en $\mathbb{R}^-$)

$d_{max_{cercano}} = 0'375$ m

$d_{max\ lejano} = 0'375 + n \cdot \frac{\lambda}{2} = \left\{ \text{Como la longitud de la línea es } 10 \text{ metros} \right\} = 9'375$ m

Ahora debemos calcular las potencias incidente y reflejada en estos puntos para calcular sus tensiones asociadas mediante $P = \frac{|V|^2}{2 Z_0}$: $\boxed{P'_{inc} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L}}$

- La potencia incidente en el máximo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{inc_{max\,cercano}} = 10^{-1} mW \cdot e^{-2\alpha(10 - 0'375)} = 0'051\ mW = 0'051 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'051 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'071\ V}$$

La potencia reflejada en el máximo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{ref_{max\ cercano}} = \underbrace{10^{-1} mW \cdot e^{-2\alpha \cdot L}}_{\text{incidente (toda la L)}} \cdot \underbrace{|\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot 0'375}}_{\text{desde carga hasta el punto}} = 0'049\ mW = 0'049 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'049 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'070\ V}$$

Así pues la tensión en el máximo más cercano es:

$$|V_{max_{cercano}}| = 0'071 + 0'070 = \boxed{0'141\ V}$$

- La potencia incidente en el máximo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{inc_{max\ lejano}} = 10^{-1} mW \cdot e^{-2\alpha \cdot \overbrace{0'625}^{10 - 9'375}} = 0'096\ mW = 0'096 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'096 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'098\ V}$$

La potencia reflejada en el máximo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{ref_{max\,lejano}} = 10^{-1} mW\ e^{-2\alpha \cdot L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot 0'9375} = 0'026\ mW = 0'026 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'026 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'051\ V}$$

Así pues la tensión en el máximo más lejano es:

cercano

$d_{max\ lejano} = 9'75$ m

- La potencia incidente en el máximo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{inc_{max\ cercano}} = 10^{-1}_{mW} e^{-2\alpha \cdot L} = 0'05\ mW = 0'05 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'05 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'071\ V}$$

La potencia reflejada en el máximo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{ref_{max\ cercano}} = 10^{-1}_{mW} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot |\rho_L|^2 = 0'0125\ mW = 0'0125 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'0125 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'035\ V}$$

Así pues la tensión en el máximo más cercano es:

$$|V_{max_{cercano}}| = 0'071 + 0'035 = \boxed{0'106\ V}$$

- La potencia incidente en el máximo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{inc_{max\ lejano}} = 10^{-1}_{mW} \cdot e^{-2\alpha\, 0'025} = 0'098\ mW = 0'098 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'098 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'099\ V}$$

La potencia reflejada en el máximo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{ref_{max\ lejano}} = 10^{-1}_{mW} \cdot e^{-2\alpha \cdot 10} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot 9'75} = 6'4 \cdot 10^{-3}\ mW = 6'4 \cdot 10^{-6}\ W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 6'4 \cdot 10^{-6}} = \boxed{0'025\ V}$$

Así pues la tensión en el máximo más lejano es:

$$|V_{max_{lejano}}| = 0'099 + 0'025 = \boxed{0'124\ V}$$

c) CASO ①:

$$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1 \Rightarrow \text{mínimo de tensión en la carga} \begin{cases} d_{min_{cercano}} = 0\ m \\ d_{min_{lejano}} = 9'75\ m \end{cases}$$

- La potencia incidente en el mínimo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{inc_{min\ cercano}} = 10^{-1}_{mW} \cdot e^{-2\alpha L} = 0'05\ mW = 0'05 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'05 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'071\ V}$$

La potencia reflejada en el mínimo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{ref_{min\ cercano}} = 10^{-1}_{mW} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot |\rho_L|^2 = 0'05\ mW = 0'05 \cdot 10^{-3}\ W \Rightarrow |V_r| = \boxed{0'071\ V}$$

Así pues la tensión en el mínimo más cercano es:

$$|V_{min_{cercano}}| = 0'071 - 0'071 = \boxed{0\ V}$$ Ribobo!

- La potencia incidente en el mínimo más lejano y su tensión asociada son:

$$|V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'098 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'099\ V}$$

CASO ②:

$$Z_L = 150\,\Omega \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} d_{min\,cercano} = \frac{\lambda}{4} = 0'375\,m \\ d_{min\,lejano} = 9'375\,m \end{cases}$$

• La potencia incidente en el mínimo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{inc\,min\,cercano} = 10^{-1}\,mW \cdot e^{-2\alpha\, 9'625} = 0'051\,mW = 0'051 \cdot 10^{-3}\,W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'051 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'071\,V}$$

La potencia reflejada en el mínimo más cercano y su tensión asociada son:

$$P_{ref\,min\,cercano} = 10^{-1}\,mW \cdot e^{-2\alpha L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot 0'375} = 0'012\,mW = 0'012 \cdot 10^{-3}\,W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0\, 0'012 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'035\,V}$$

Así pues la tensión en el mínimo más cercano es:

$$|V_{min\,cercano}| = 0'071 - 0'035 = \boxed{0'036\,V}$$

• La potencia incidente en el mínimo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{inc\,min\,lejano} = 10^{-1}\,mW \cdot e^{-2\alpha \cdot 0'625} = 0'096\,mW = 0'096 \cdot 10^{-3}\,W \Rightarrow |V_i| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 0'096 \cdot 10^{-3}} = \boxed{0'098\,V}$$

La potencia reflejada en el mínimo más lejano y su tensión asociada son:

$$P_{ref\,min\,lejano} = 10^{-1}\,mW \cdot e^{-2\alpha \cdot L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha \cdot 9'375} = 6'5 \cdot 10^{-3}\,mW = 6'5 \cdot 10^{-6}\,W \Rightarrow |V_r| = \sqrt{2 \cdot Z_0 \cdot 6'5 \cdot 10^{-6}} = \boxed{0'025\,V}$$

Así pues la tensión en el mínimo más lejano es:

$$|V_{min\,lejano}| = 0'098 - 0'025 = \boxed{0'073\,V}$$

d) Ahora $P_{inc} = -10\,dBm = 10^{-1}\,mW$ y $f = 400\,MHz$

$$\boxed{P_{ref\,entrada}} = 10^{-1} \cdot e^{-2\alpha' L} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha' L} = \left\{ \begin{array}{l} |\rho_L| = 1 \text{ ya que } Z_L = 0 \\ \alpha' = k \cdot \sqrt{f} = k \cdot \sqrt{400 \cdot 10^6} = k \cdot \sqrt{100 \cdot 10^6} \cdot \sqrt{4} = 0'03454 \cdot \sqrt{4} = \\ = 0'06908\,Np/m \end{array} \right\} =$$

$$= 0'0063\,mW \cong \boxed{-22\,dBm}$$

e) $$\boxed{P_{ref\,entrada}} = \left\{ \text{Igual que el apartado anterior pero } |\rho_L| = \frac{1}{2} \Rightarrow |\rho_L|^2 = \frac{1}{4} \right\} = 0'0063 \cdot \frac{1}{4}\,mW = \boxed{-28\,dBm}$$

La potencia disipada en la carga es:

$$\boxed{P_L} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot (1 - |\rho_L|^2) = 10^{-1}\,mW \cdot e^{-2\alpha' \cdot 10} \cdot \left(1 - \left|\tfrac{1}{2}\right|^2\right) = 0'0188\,mW \cong \boxed{-17'25\,dBm}$$

f) ...

$(10 \cdot 8'7 \cdot K)$

$\alpha = K \cdot \sqrt{f}$ (En el 1er apartado ...

*Notas Importantes del ejercicio

Hoja Clave

- α es la misma en los dos casos (misma línea, diferente carga)
- A la hora de calcular potencias.

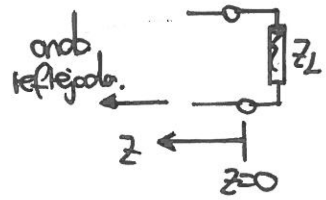
- $P_{incidente} = \dfrac{|V^+|^2}{2Z_0} = \dfrac{V_g^2}{8R_g} \longrightarrow$ esto es en el generador.

Si queremos saber la potencia incidente en otro punto (pto A), añadimos: $P_{inc_{(A)}} = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L}$ ($\overset{A}{\frown}$)

Para la potencia reflejada:

$$P_{reflejada} = \underbrace{P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L}}_{\text{potencia incidente en la carga (L es toda la blt)}} \cdot \underbrace{|\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha L}}$$

$P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \cdot |\rho_L|^2$ es lo que se refleja de toda esa potencia total, de toda esta potencia que ha incidido. Como esta onda también se propaga, añadimos $e^{-2\alpha L}$ por si queremos conocer $P_{reflejada}$ en otro punto, midiendo esta L desde la carga



- Para la potencia transmitida a la carga:

$$P_L = P_{inc} \cdot e^{-2\alpha L} \underbrace{(1 - |\rho_L|^2)}_{\text{quitamos la parte que se refleja.}}$$

Máximos se suman, mínimos se restan.

Máximo $\longrightarrow$ $|V|_{max}$ ... (SWR)

Si ρ_L es real, pertenecerá a $\mathbb{R}^+ \to$ máximo ó a $\mathbb{R}^- \to$ mínimo (SWR)

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS

JULIO 2012

PROBLEMA 1 (5 puntos)

Se conecta un cable coaxial entre un generador en z = L y la carga en z = 0. El cable coaxial tiene una impedancia característica $Z_0 = 50\ \Omega$ y una constante dieléctrica $\varepsilon_r = 4$. Cuando se alimenta con una señal de 100 MHz, la tensión en el cable tiene la siguiente expresión temporal:

$$V(t) = 10\cos(\omega t + \beta z) - 5\,\mathrm{sen}(\omega t - \beta z) \quad Voltios$$

Determine:

a) Expresión temporal de la corriente en el cable.

b) Impedancia y coeficiente de reflexión en la carga.

c) Módulo de la tensión y de la corriente en la carga.

d) Módulo de la tensión en un máximo y en un mínimo.

e) Módulo de la corriente en un máximo y en un mínimo.

f) Impedancia y coeficiente de reflexión en un máximo y en un mínimo.

g) Distancia desde la carga en cm del máximo y del mínimo de tensión más cercanos a la carga.

h) Potencia media disipada en la carga.