• Notas del Ejercicio •

• Pasarlo todo a cos( ), ya que así podremos trabajar con exponenciales.

$$\cos \varphi = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen} \varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

• Coeficiente de reflexión $\longrightarrow \rho = \frac{V_{ref}}{V_{inc}}$

• Fijarse en en las exponenciales ó fases en el signo de $\beta z \longrightarrow$ indica parte de la onda incidente (+) y reflejada (−) $\longrightarrow$ según esquema

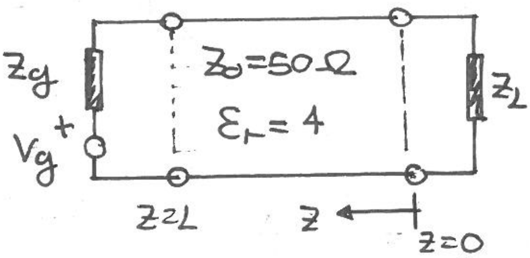
• $\varphi_L \longrightarrow$ Desfase entre onda incidente y reflejada.

• Para conocer distancias a máximos y mínimos cuando no conocemos el valor de la carga:

$$\cos(\varphi_L - 2\beta z) = +1 \; ; \quad \varphi_L - 2\beta z = 2n\pi$$
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Distancia entre máximo y mínimo consecutivo $\longrightarrow \frac{\lambda}{4}$.

Julio 2012



$f = 100\,MHz$

$V(t) = 10\cos(\omega t + \beta z) - 5\,\text{sen}(\omega t - \beta z)\,V$

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{4}} = 1{,}5\cdot 10^8\, m s^{-1} \longrightarrow \lambda = \frac{V_\phi}{f} = \frac{1{,}5\cdot 10^8}{10^8} = 1{,}5\,m \longrightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{3}\, rad\, m^{-1}$$

] ¿$I(t)$?

CLAVE
Paso todo a coseno por ser $Re[e^{j\omega t}]$

Calculamos en primer lugar el valor fasorial de $V(t)$.

$$V(t) = 10\cos(\omega t + \beta z) - 5\underbrace{\cos(\omega t - \beta z - \tfrac{\pi}{2})}_{\text{ponerlo}}$$

$$V(z) = 10 e^{j\omega t} e^{+j\beta z} - 5 e^{j\omega t}\cdot e^{-j\beta z}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = (10 e^{+j\beta z} + j5 e^{-j\beta z})\, e^{j\omega t} =$$

$$= 10 e^{j(\omega t + \beta z)} + 5j e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Como la onda incidente va hacia las z negativas:

$$V_{inc} = 10 e^{+j\beta z} e^{j\omega t}$$

$$V_{ref} = +j5 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

Así pues:

$$I(z) = \frac{V_{inc} - V_{ref}}{Z_0} = \frac{1}{Z_0}\left(10 e^{+j\beta z}\cdot e^{j\omega t} - j5 e^{-j\beta z}\cdot e^{j\omega t}\right)$$

Finalmente:

$$I(t) = Re(I(z)) = \frac{1}{50}\left[10\cos(\omega t + \beta z) + 5\,\text{sen}(\omega t - \beta z)\right] A$$ siendo $\omega = 2\pi\cdot 10^8\, rad\, s^{-1}$, $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{3}\, rad\, m^{-1}$

] ¿ρ_L y Z_L?

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad Z_L = \frac{1+\rho_L}{1-\rho_L}$$

$$\rho_L = \left.\frac{V_{ref}}{V_{inc}}\right|_{carga} = \left.\frac{+j5 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}}{10 e^{+j\beta z} e^{j\omega t}}\right|_{z=0} = \frac{+j}{2} = 0{,}5\cdot e^{j\pi/2}$$

$$Z_L = Z_0\cdot\frac{1+\rho_L}{1-\rho_L} = 50\cdot\frac{1+0{,}5\cdot e^{j\pi/2}}{1-0{,}5\cdot e^{j\pi/2}} = 50\cdot\frac{1+0{,}5\cdot j}{1-0{,}5 j} = 30+40j$$

c) $|V(z)| = |V^+|\cdot\sqrt{1+|\rho_L|^2+2|\rho_L|\cos(\varphi_L-2\beta z)}$

siendo: $|V^+| = 10V$

$|\rho_L| = 0,5$

$\varphi_L = \pi/2$

$Z_0 = 50\Omega$

$|I(z)| = \frac{|V^+|}{Z_0}\cdot\sqrt{1+|\rho_L|^2-2|\rho_L|\cos(\varphi_L-2\beta z)}$

$|V(z)| = 10\cdot\sqrt{1+|0,5|^2+\cancel{2\cdot 0,5\cos(\pi/2)}} = 5\sqrt{5}\ V$

$I(z)| = \frac{10}{50}\cdot\sqrt{1+|0,5|^2-\cancel{2\cdot 0,5\cos(\pi/2-0)}} = \frac{\sqrt{5}}{10}\ A$ ∘○

$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$

$Z(z)\Big|_{z=0} = Z_L = \left|\frac{V(z)}{I(z)}\right|_{z=0} = 50\Omega$

d) $|V(z)|_{máx} = |V^+|\cdot(1+|\rho_L|) = 10\cdot(1+|0,5|) = 15V$

$|V(z)|_{mín} = |V^+|\cdot(1-|\rho_L|) = 10\cdot(1-|0,5|) = 5V$

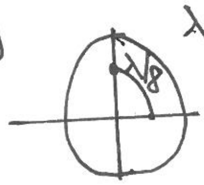
e) $|I(z)|_{máx} = \frac{|V(z)|_{máx}}{Z_0} = \frac{15V}{50} = \frac{3}{10} A = 300mA$

$|I(z)|_{mín} = \frac{|V(z)|_{mín}}{Z_0} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} A = 100mA$

f) $Z_{máx} = Z_0\cdot ROE = Z_0\cdot\frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} = 50\cdot\frac{1+0,5}{1-0,5} = 50\cdot 3 = 150\Omega$

$Z_{mín} = \frac{Z_0}{ROE} = \frac{50}{3}\ \Omega$

$\rho_{máx} = \frac{Z_{máx}-Z_0}{Z_{máx}+Z_0} = \frac{150-50}{150+50} = \frac{1}{2}$ $\rho_{mín} = \frac{Z_{mín}-Z_0}{Z_{mín}+Z_0} = \frac{\frac{50}{3}-50}{\frac{50}{3}+50} = -\frac{1}{2}$

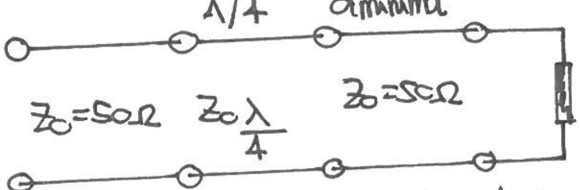
g) 

$\lambda = 1,5m$ Posiciones de los máximos: $\cos(\varphi_L-2\beta z) = +1 \longrightarrow \varphi_L - 2\beta z = n\pi 2$

Si $n=0$; $z = \frac{\varphi_L}{2\beta} = \frac{\pi/2}{2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{8} = \frac{1,5}{8} m = 18,75cm$

Observamos que el mínimo más cercano estará a $z = \frac{\lambda}{8}+\frac{\lambda}{4} = \frac{3\lambda}{8} = \frac{3\cdot 1,5}{8} = \frac{9}{16} m = 56,25cm$

h) $P_L = P_{inc}(1-|\rho_L|^2) = \frac{|V^+|^2}{2Z_0}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{10^2}{2\cdot 50}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\ W$

i) 

$Z_{0\frac{\lambda}{4}} = \sqrt{Z_{real}\cdot Z_0}$

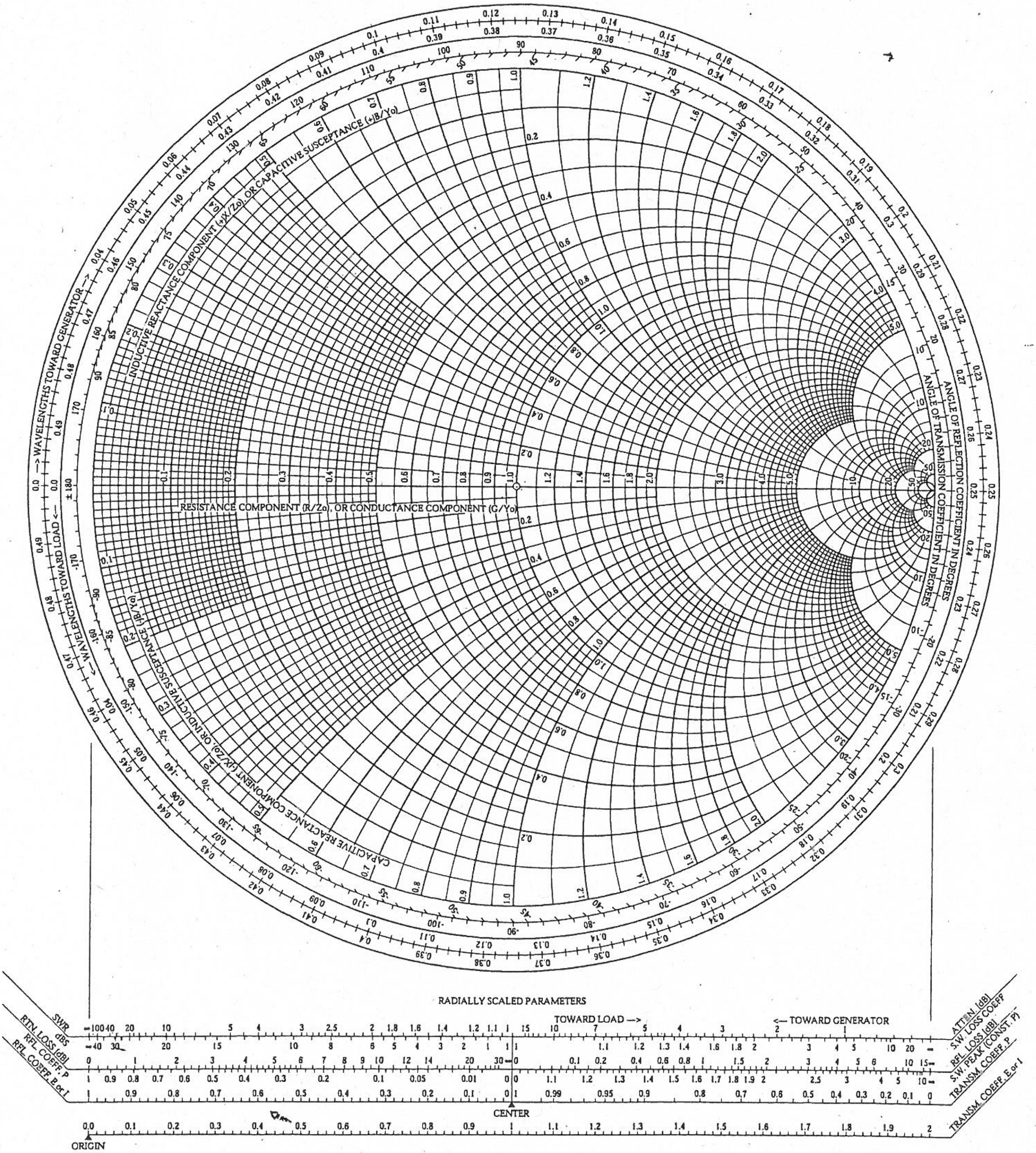
Como la distancia al máximo es menor que al mínimo, la primera Z_{real} que nos encontramos es $Z_{máx} = 150\Omega$.

$Z_{0\lambda/4} = \sqrt{150\cdot 50} = 50\sqrt{3}\ \Omega$; La distancia a la que hay que ponerlo es $\lambda/8$.

Julio 2012

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



PROBLEMA 2 (2 puntos) Junio 2011

a) Calcule los parámetros S referidos a Z_0 de una línea sin pérdidas de impedancia característica Z_0 y longitud eléctrica ϕ

b) Compruebe que la matriz de parámetros S obtenida corresponde a la de un cuadripolo sin pérdidas

PROBLEMA 2 (2 puntos) Julio 2011

a) Calcule los parámetros S de una reactancia serie

b) Calcule las cantidades:

$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2$

$s_{11}s_{21}^* + s_{12}s_{22}^*$

y compruebe que los resultados obtenidos corresponden al de un cuadripolo sin pérdidas

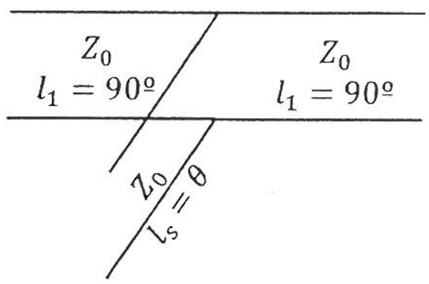
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS

ENERO 2012

PROBLEMA 1 (5 puntos)

La siguiente figura representa un cuadripolo donde todas las líneas de transmisión son de la misma impedancia característica Z_0



1.- Calcule s_{11}

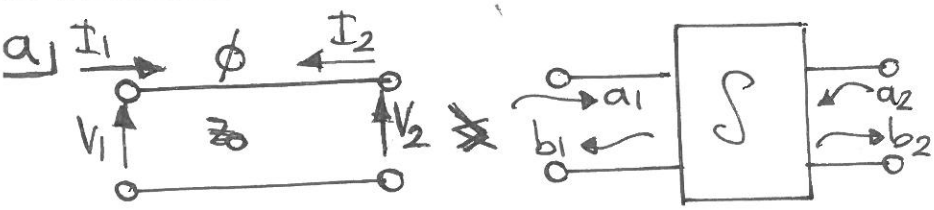
2.- Halle el valor de $|s_{21}|$

3.- Encuentre las longitudes eléctricas del stub (θ) que producen que las pérdidas de retorno sean nulas y aquellas longitudes que producen que las pérdidas de retorno sean infinitas.

4.- Encuentre la matriz de scattering

Junio 2011. Problema 2.

a)

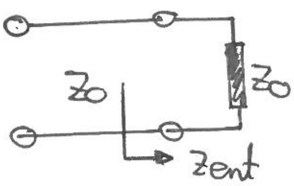


$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$

$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$

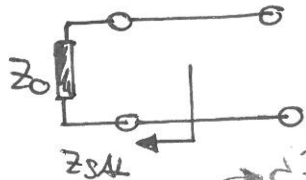
Para calcular S_{11}:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \frac{Z_{ent} - Z_0}{Z_{ent} + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$

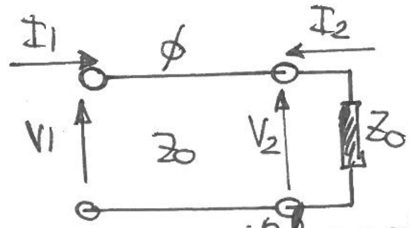


Para calcular S_{22}:

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \frac{Z_{sal} - Z_0}{Z_{sal} + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$



Para calcular S_{21}:



¿Por qué se anula?

$V_1 = V_1^+ + \cancel{V_1^-} \to 0$ $\quad V_2 = \cancel{V_2^+} + V_2^- \to 0$ ② adaptado $\longrightarrow V_1 = V_1^+$, $V_2 = V_2^-$

$I_1 = I_1^+ + I_1^-$

$b_1 = 0$ porque no hay refl.

Por otro lado sabemos que: $V_2^- = V_1^+ e^{-j\beta l} = V_1^+ e^{-j\phi}$

$$\frac{V_2^-}{V_1^+} = e^{-j\phi} \text{ y operando} \longrightarrow \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{(V_2^-/\sqrt{Z_0})}{(V_1^+/\sqrt{Z_0})} = \frac{b_2}{a_1} = S_{21} \longrightarrow S_{21} = e^{-j\phi}$$

Para calcular $S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0}$ $\longrightarrow$ Es análogo a S_{21} cambiando 2 por 1 y viceversa y se llega a $S_{12} = e^{-j\phi}$

Por tanto para una línea de transmisión de longitud ϕ: $S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix}$

* Nota

Si la línea tuviera pérdidas $\longrightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\phi} \\ e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \underbrace{\phi = \beta \cdot l}_{\text{longitud eléctrica}}$

b) Si el cuadripolo no tiene pérdidas se cumple que: $S^{t*} \cdot S = I$ $\longrightarrow$ matriz traspuesta y conjugada.

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{+j\phi} \\ e^{+j\phi} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+j\phi} \cdot e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{+j\phi} \cdot e^{-j\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ cqd}$$

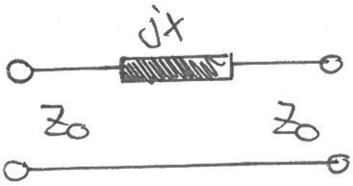
*Ver en apuntes de teoría como se hace una matriz 3x3 traspuesta.

c)

Julio 2011

Problema 2

a) Reactancia serie

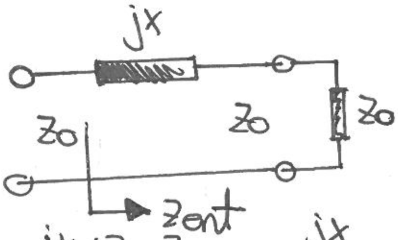


$b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2$

$b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2$

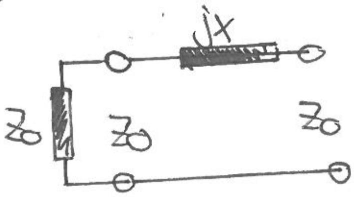
Reactancia $\rightarrow$ jx

Para calcular S_{11}:



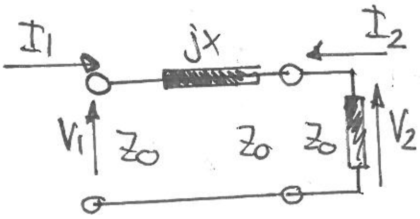
$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \frac{Z_{ent} - Z_0}{Z_{ent} + Z_0} = \frac{jx + Z_0 - Z_0}{jx + Z_0 + Z_0} = \frac{jx}{jx + 2Z_0}$$

Para calcular S_{22}:



$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \frac{Z_{sal} - Z_0}{Z_{sal} + Z_0} = \frac{jx + Z_0 - Z_0}{jx + Z_0 + Z_0} = \frac{jx}{jx + 2Z_0}$$

Para calcular S_{21}:



$V_1 = V_1^+ + V_1^-$

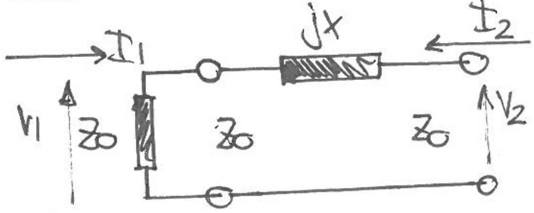
$V_2 = \cancel{V_2^+} + V_2^-$ $\quad 0$ ② adaptada

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0} = \frac{(V_2^-/\sqrt{Z_0})}{(V_1^+/\sqrt{Z_0})} = \frac{V_2^-}{V_1^+} = \frac{2Z_0}{jx + 2Z_0}$$

$$I_1 = -I_2 ; \quad \frac{V_1^+ - V_1^-}{Z_0} = \frac{-[V_2^+ - V_2^-]}{Z_0} ; \quad V_1^+ - V_1^- = V_2^- ; \quad 1 - \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{V_2^-}{V_1^+} ; \quad \frac{V_2^-}{V_1^+} = 1 - S_{11} = 1 - \frac{jx}{jx + 2Z_0} =$$

$$= \frac{(jx + 2Z_0) - jx}{jx + 2Z_0} = \frac{2Z_0}{jx + 2Z_0}$$

Para calcular S_{12}:



$V_1 = \cancel{V_1^+} + V_1^-$ $\quad 0$ ① adaptada

$V_2 = V_2^+ + V_2^-$

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=0} = \frac{(V_1^-/\sqrt{Z_0})}{(V_2^+/\sqrt{Z_0})} = \frac{V_1^-}{V_2^+} = \frac{2Z_0}{2Z_0 + jx}$$

$$I_1 = -I_2 ; \quad \frac{V_1^+ + V_1^-}{Z_0} = \frac{-[V_2^+ - V_2^-]}{Z_0} ; \quad V_1^- = V_2^+ - V_2^- ; \quad \frac{V_1^-}{V_2^+} = 1 - \frac{V_2^-}{V_2^+} = 1 - S_{22} = 1 - \frac{jx}{jx + 2Z_0} = \frac{2Z_0}{2Z_0 + jx}$$

Finalmente:

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{jx}{2Z_0 + jx} & \dfrac{2Z_0}{2Z_0 + jx} \\ \dfrac{2Z_0}{2Z_0 + jx} & \dfrac{jx}{2Z_0 + jx} \end{pmatrix}$$

b)

Como se trata de un cuadripolo sin pérdidas se cumplirá que... $S_t^* \cdot S = I$

$$S_t^* \cdot S = I \longrightarrow \begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con la matriz del apartado a:

Truco → Trabajar fila a fila

$$|S_{11}|^2 = S_{11}^* \cdot S_{11}$$

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = \frac{x^2}{\left(\sqrt{4Z_0^2+x^2}\right)^2} + \frac{4Z_0^2}{\left(\sqrt{4Z_0^2+x^2}\right)^2} = \frac{x^2+4Z_0^2}{4Z_0^2+x^2} = 1$$

$$S_{11} \cdot S_{21}^* + S_{12} \cdot S_{22}^* = \frac{jx}{2Z_0+jx} \cdot \frac{2Z_0}{2Z_0-jx} + \frac{2Z_0}{2Z_0+jx} \cdot \frac{-jx}{2Z_0-jx} = \frac{jx}{2Z_0+jx} \cdot \frac{2Z_0}{2Z_0-jx} - \frac{2Z_0}{2Z_0+jx} \cdot \frac{jx}{2Z_0-jx} = 0$$

Para comprobar que los resultados corresponden a un cuadripolo sin pérdidas: tendremos en cuenta:

$S_t^* \cdot S = I$

Cuadripolo simétrico: $S_{12} = S_{21}$

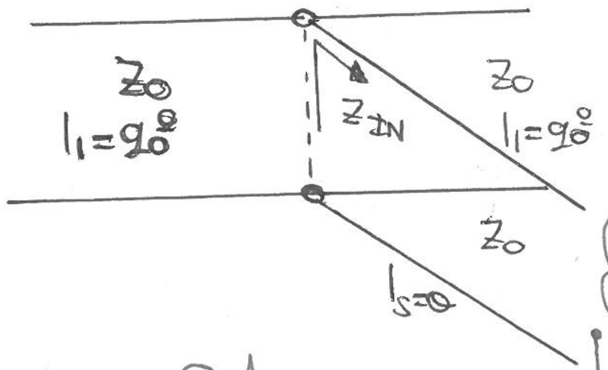
$$S_{11}^* \cdot S_{11} + S_{21}^* \cdot S_{21} = |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{12}^* \cdot S_{11} + S_{22}^* \cdot S_{21} = S_{11} \cdot S_{21}^* + S_{12} \cdot S_{22}^* = 0$$

Cuadripolo es simétrico $S_{12} = S_{21}$

• Problema 1 Enero 2012

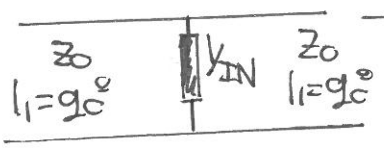


Trabajamos en paralelo (stub//) por lo que habrá que usar admitancia.

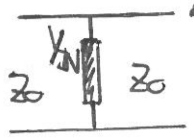
a) Calculamos Z_{IN}: C. A.

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{\infty + jZ_0 \, tg(0)}{Z_0 + j\infty \, tg(0)} = \frac{Z_0}{j \, tg\, 0} = -jZ_0 \cot g\, 0 \longrightarrow Y_{IN} = \frac{1}{Z_{IN}} = j\frac{tg\, 0}{Z_0}$$

De momento:

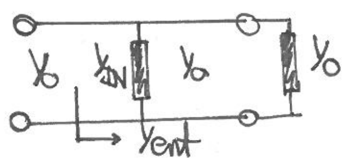


→ Calculamos los parámetros S de este circuito:



(de momento, quitamos las longitudes).

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$



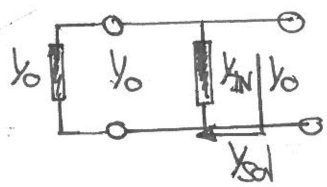
Para calcular S_{11}:

$$S_{11} = \left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0} = \rho_{ent} = \frac{Z_{ent} - Z_0}{Z_{ent} + Z_0} = \frac{\frac{1}{Y_{ent}} - \frac{1}{Y_0}}{\frac{1}{Y_{ent}} + \frac{1}{Y_0}} = \frac{Y_0 - Y_{ent}}{Y_0 + Y_{ent}}$$

$$= \frac{Y_0 - Y_0 - Y_{IN}}{Y_0 + Y_0 + Y_{IN}} = \frac{-Y_{IN}}{2Y_0 + Y_{IN}}$$

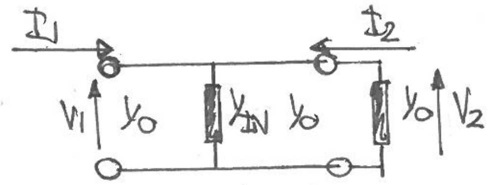
Para calcular S_{22}: $S_{22} = \left.\frac{b_2}{a_2}\right|_{a_1=0} = \rho_{sal} = \frac{Z_{sal} - Z_0}{Z_{sal} + Z_0} = \frac{\frac{1}{Y_{sal}} - \frac{1}{Y_0}}{\frac{1}{Y_{sal}} + \frac{1}{Y_0}} = \frac{Y_0 - Y_{sal}}{Y_0 + Y_{sal}} = \frac{Y_0 - Y_0 - Y_{IN}}{Y_0 + Y_0 + Y_{IN}} =$

$$= \frac{-Y_{IN}}{2Y_0 + Y_{IN}}$$



Para calcular S_{21}:

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0} = \frac{(V_2^-/\sqrt{Z_0})}{(V_1^+/\sqrt{Z_0})} = \frac{V_2^-}{V_1^+}$$

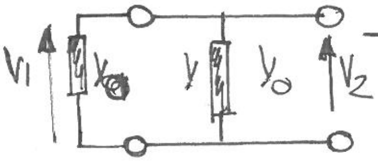


$V_1 = V_1^+ + V_1^-$

$V_2 = \cancel{V_2^+} + V_2^-$ (0)

$V_1 = V_2$; $V_1^+ + V_1^- = \cancel{V_2^+} + V_2^-$; $\sqrt{Z_0}\,\frac{V_1^+ + V_1^-}{\sqrt{Z_0}} = \sqrt{Z_0}\cdot\frac{V_2^-}{\sqrt{Z_0}}$; $\sqrt{Z_0}\,(a_1 + b_1) = \sqrt{Z_0}\, b_2$

$a_1 + b_1 = b_2$; $1 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_1}$; $\frac{b_2}{a_1} = 1 + S_{11} = 1 + \frac{-Y_{IN}}{2Y_0 + Y_{IN}} = \frac{2Y_0 + \cancel{Y_{IN}} - \cancel{Y_{IN}}}{2Y_0 + Y_{IN}} = \frac{2Y_0}{2Y_0 + Y_{IN}}$

• Para calcular S_{12}: 

→ Por simetría eléctrica:

$$S_{12}=\frac{2Y_0}{2Y_0+Y_{IN}}$$

De tal forma que llamamos a la matriz del cuadripolo del enunciado:

$$S'=\begin{pmatrix} S_{11}' & S_{12}' \\ S_{21}' & S_{22}' \end{pmatrix}$$ en la que sabemos que:

$$S_{11}'=S_{11}e^{-j2\phi_{IN}} \qquad S_{12}'=S_{12}e^{-j(\phi_{IN}+\phi_{SAL})}$$

$$S_{22}'=S_{22}e^{-j\phi_{SAL}} \qquad S_{21}'=S_{21}e^{-j(\phi_{IN}+\phi_{SAL})}$$

Con los datos del problema:

$$S_{11}=\frac{-Y_{IN}}{2Y_0+Y_{IN}}=\frac{-\frac{j\,tg\theta}{Z_0}}{2\frac{1}{Z_0}+\frac{j\,tg\theta}{Z_0}}=\frac{-j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta}$$

Finalmente el S_{11}' que es el S_{11} pedido en el enunciado es:

$$S_{11}'=S_{11}=e^{-j2\phi_{IN}}=S_{11}e^{-j180°}=\frac{j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta}$$

2]
Como el cuadripolo es simétrico, se cumple que: $S^t=S'$ (Me refiero a la total).

Como además es sin pérdidas, se cumple que:

$S^{t*}\cdot S=I$ (Me refiero a la total).

$$\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No me salen los cálculos ??

$$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2=1;\ |S_{21}|^2=1-|S_{11}|^2;\ |S_{21}|=\sqrt{1-|S_{11}|^2}=\sqrt{}=\cdots=\frac{1}{\sqrt{1+(tg\theta/2)^2}}$$

1]
Del apartado 1 sabemos:

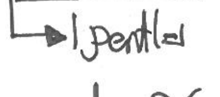
$$S_{11}'=\frac{j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta} \qquad S'=\begin{pmatrix} \frac{j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta} & \frac{-2}{2+j\,tg\theta} \\ \frac{-2}{2+j\,tg\theta} & \frac{j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta} \end{pmatrix}$$

*Nota
Comprobar su módulo

$$S_{12}'=S_{12}\cdot e^{-j(\phi_{IN}+\phi_{SAL})}=S_{12}\cdot e^{-j180°}=-S_{12}=\frac{-2Y_0}{2Y_0+Y_{IN}}=\frac{-2\cdot\frac{1}{Z_0}}{2\cdot\frac{1}{Z_0}+\frac{j\,tg\theta}{Z_0}}=\frac{-2}{2+j\,tg\theta}$$

3] R.L.(dB) $=-20\log|\rho_{ent}|$

Para conseguir R.L.(dB) = 0dB debe ser: $|\rho_{ent}|=1$ (Reflexión total).

Si $\theta=(2n+1)\frac{\lambda}{4}=(2n+1)90°$ el esquema es: 

y se produce ref. total.

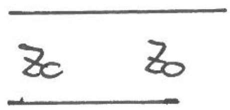
$$\phi=\beta l_f=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$\theta=90°$

Visto con la matriz de parámetros S' vemos que $\rho_{ent}=S_{11}'=\frac{j\,tg\theta}{2+j\,tg\theta}\overset{\downarrow}{=}1$

Para conseguir R.L. (dB) = ∞ debe ser $\rho_{ent} = 0$ (Tx. total).

si $\theta = n\frac{\lambda}{2} = n \cdot 180^\circ$ el esquema:



y lógicamente hay tx total.

Visto con la matriz de parámetros S vemos que:

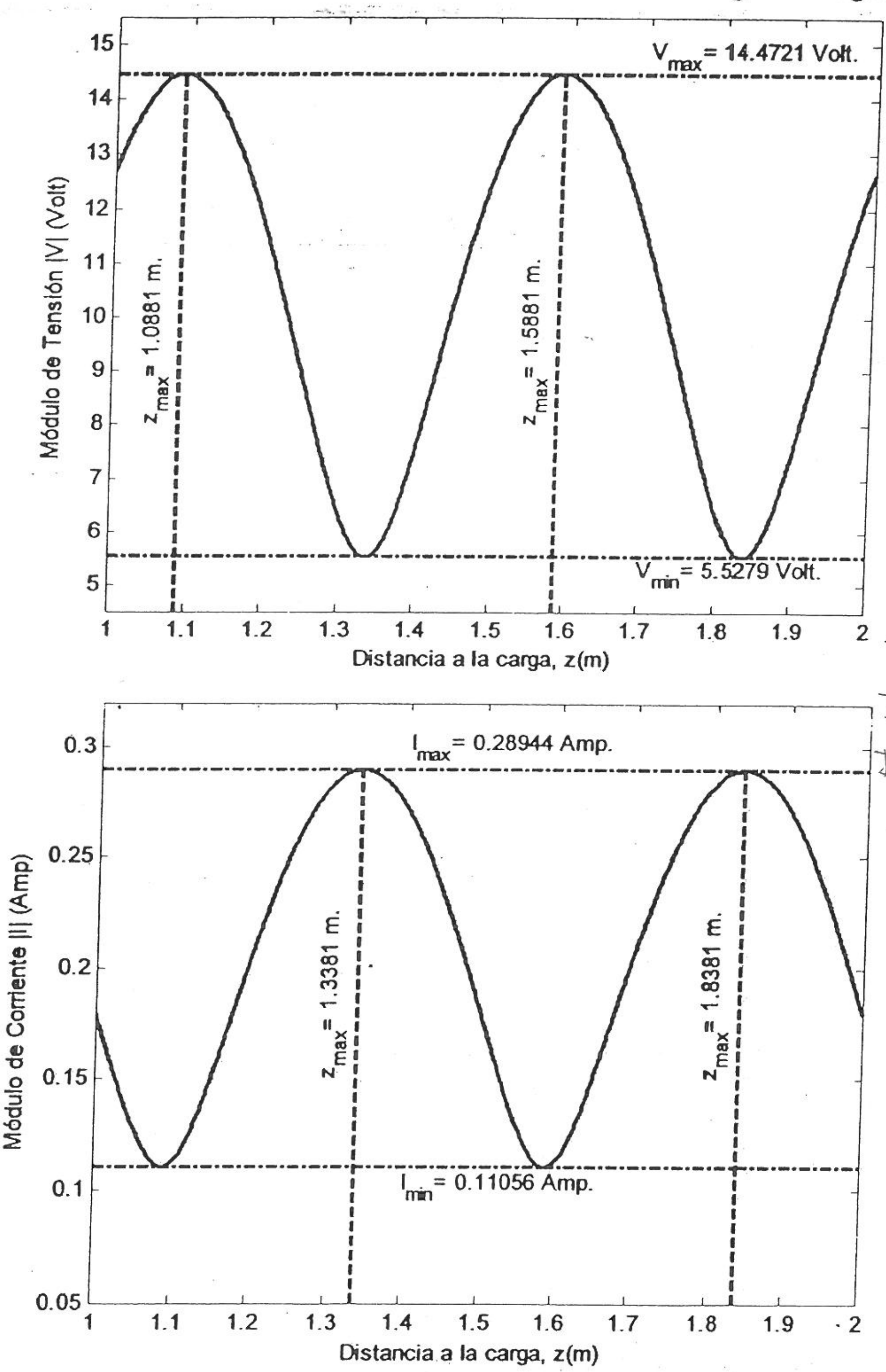
$$\rho_{ent} = S_{11} = \frac{j\,tg\,\theta}{2 + j\,tg\,\theta} \underset{\theta = 180^\circ}{=} \frac{0}{2} = 0 \longrightarrow \text{Tx total}$$

*Añadido

Problema 3 Febrero 2006

PROBLEMA 3 (4 Puntos)

Se ha medido el módulo de tensión y corriente en una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una impedancia (Z_L) desconocida. La frecuencia de trabajo es 150 MHz, la carga está situada en $z=0$ y las medidas se han realizado en la región $1 \leq z \leq 2$, dimensiones en metros. Los resultados obtenidos se dan en las siguientes figuras.



$V_{máx} = 14,4721\ V$

$V_{mín} = 5,5279\ V$

$\frac{\lambda}{2} = 1,6 - 1,1 = 0,5\ m$

$I_{máx} = 0,28944\ A$

$I_{mín} = 0,11056\ A$

Determine:

a) La impedancia de la línea de transmisión y la constante de propagación.

b) Los parámetros primarios de la línea de transmisión

c) La impedancia de carga (Z_L)

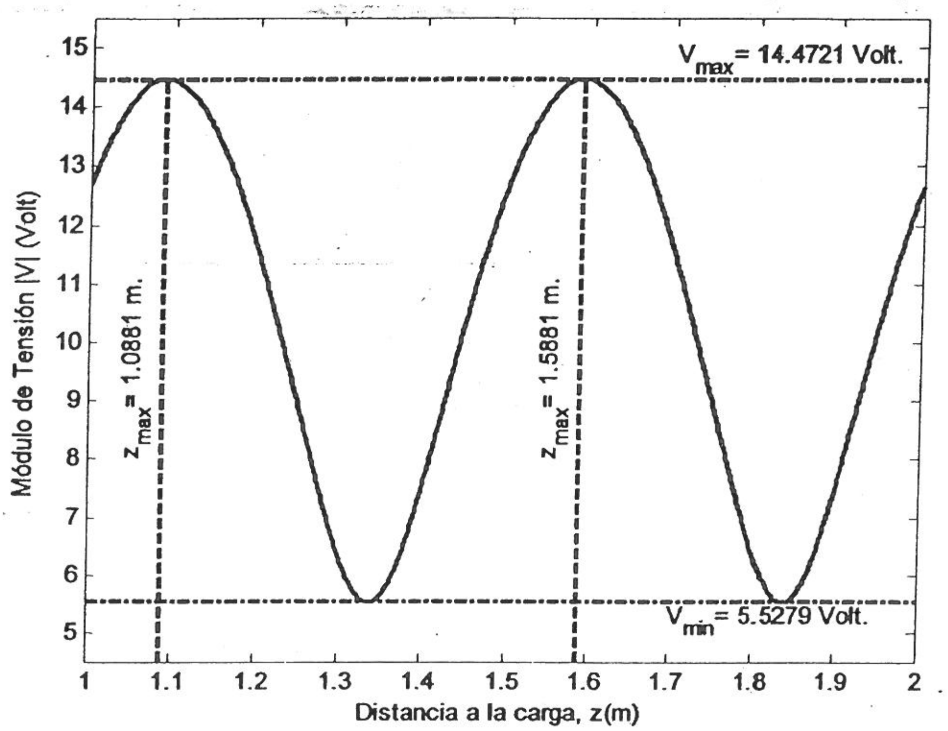
d) La potencia instantánea de la onda incidente, reflejada y de la señal completa.

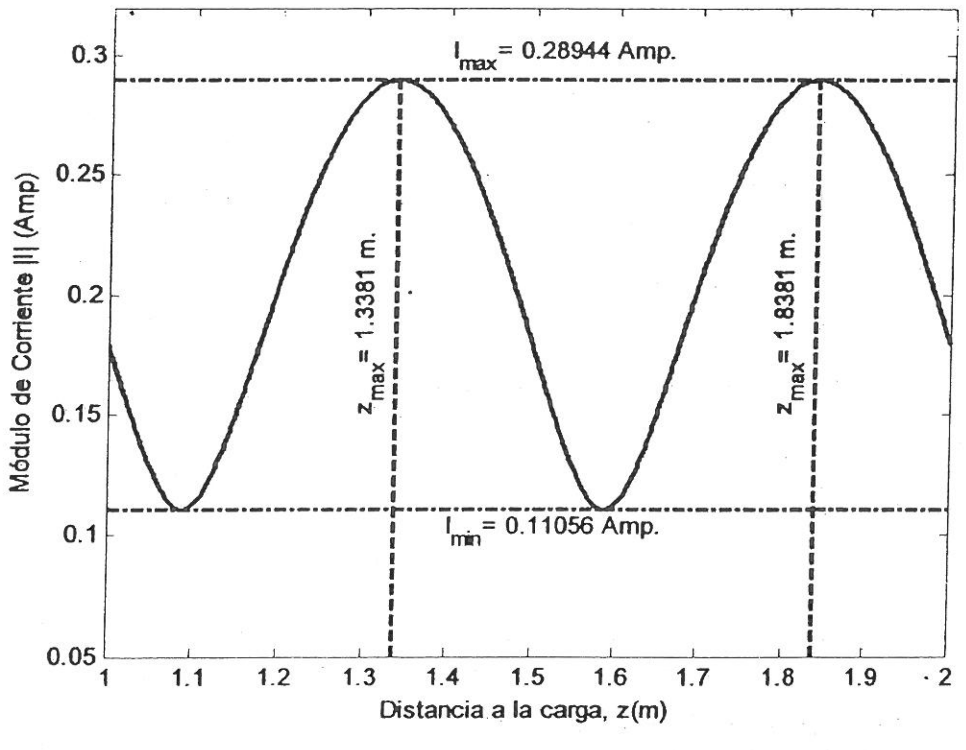
e) Los puntos, en la región donde se ha realizado la medida, donde es posible realizar la adaptación de la carga empleando un simple stub paralelo. Obtenga la longitud del stub en cada punto suponiendo que la línea de transmisión empleada tiene la misma impedancia característica que la línea de transmisión donde se han realizado las medidas.

f) Repita el apartado anterior si en lugar de un stub se utiliza una bobina, la cual se sitúa en paralelo. Indique el valor de la bobina y en los puntos, en la región donde se ha realizado la medida, donde se puede poner. Apartado típico

PROBLEMA 3 (4 Puntos)

Se ha medido el módulo de tensión y corriente en una línea de transmisión sin pérdidas terminada en una impedancia (Z_L) desconocida. La frecuencia de trabajo es 150 MHz, la carga está situada en $z=0$ y las medidas se han realizado en la región $1 \le z \le 2$, dimensiones en metros. Los resultados obtenidos se dan en las siguientes figuras.





Determine:

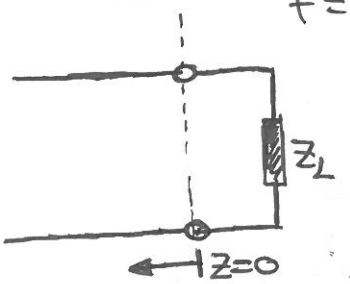
a) La impedancia de la línea de transmisión y la constante de propagación.
b) Los parámetros primarios de la línea de transmisión
c) La impedancia de carga (Z_L)
d) La potencia instantánea de la onda incidente, reflejada y de la señal completa.

e) Los puntos, en la región donde se ha realizado la medida, donde es posible realizar la adaptación de la carga empleando un simple stub paralelo. Obtenga la longitud del stub en cada punto suponiendo que la línea de transmisión empleada tiene la misma impedancia característica que la línea de transmisión donde se han realizado las medidas.

f) Repita el apartado anterior si en lugar de un stub se utiliza una bobina, la cual se sitúa en paralelo. Indique el valor de la bobina y en los puntos, en la región donde se ha realizado la medida, donde se puede poner.

Problema B

$f = 150\,MHz$



a) Parámetros secundarios Z_0, γ, V_ϕ

$$ROE = SWR = \frac{V_{MÁX}}{V_{MIN}} = \frac{I_{MÁX}}{I_{MIN}} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} = 2{,}618$$

$$Z_{MAX} = \frac{V_{MAX}}{I_{MIN}} = \frac{14{,}4721}{0{,}11056} = 130{,}90\,\Omega$$

$$Z_{MÁX} = Z_0 \cdot ROE \rightarrow Z_0 = \frac{Z_{MAX}}{ROE} = \frac{130{,}90}{2{,}618} = 50\,\Omega$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \left\{\begin{matrix} \alpha = 0 \text{ Línea sin pérdidas} \\ \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \left\{\frac{\lambda}{2} = 0{,}5\right\} = 2\pi \end{matrix}\right\} = j2\pi\ m^{-1} \rightarrow V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda \cdot f = 1 \cdot 150 \cdot 10^{6}\ ms^{-1} = 1{,}5 \cdot 10^{8}\ ms^{-1}$$

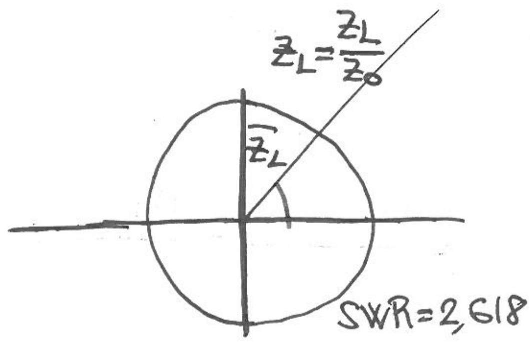
¿ε_r? $$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 1{,}5\cdot 10^8\ ms^{-1} \rightarrow \varepsilon_r = 4 \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r} = 2$$

b) Parámetros secundarios

$R=0$ ya que no hay pérdidas en los conductores.

$G=0$ " " " " " " en el dieléctrico. Fórmulas del ejercicio del cable.

$$\left.\begin{matrix} Z_0 = \sqrt{L/C} = 50\,\Omega \\ V_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}5\cdot 10^8 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} Z_0 \cdot V_\phi = \frac{1}{C} = 50 \cdot 1{,}5\cdot 10^8 \rightarrow C = 133\ pF \\ \frac{Z_0}{V_\phi} = L \rightarrow L = 333{,}33\ nH \end{matrix}$$



*Nota

$$V(z=5) = V(z=8)\,e^{-\alpha 3}$$
$$p(z=5) = p(z=8)\,e^{-2\alpha 3}$$

$$\alpha_c = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$$
$$\alpha_d = \frac{G}{2}\sqrt{L/C}$$

c) Z_L? Se produce un máximo de tensión en $z_{MÁX} = 1{,}0881\,m$, como $\lambda = 1\,m$

$\bar{z}_{MAX} = 1{,}0881\,\lambda$

Nos desplazamos $0{,}0881\lambda$ hacia carga desde la posición de V_{MAX} ó $Z_{MÁX}$ (semieje real positivo)

$$Z_{MÁX} = 2{,}618 \cdot 50 = 130{,}90\,\Omega = 50 \cdot \frac{Z_L + j50\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 1{,}0881\lambda\right)}{50 + j\,Z_L\, tg\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 1{,}0881\lambda\right)} =$$

$$= 130{,}90\left(50 + j(R_L + X_L)\cdot tg(\ )\right) = 50\left[(R_L + jX_L) + j50\, tg(\ )\right] \begin{matrix} \rightarrow Re \\ \rightarrow Im \end{matrix}$$

Estamos trabajando con el 2º esquema.

$$\frac{ROE-1}{ROE+1} = 0,4472$$

d) $V(z) = V_L^+ e^{j2\beta z} + V_L^- e^{-j2\beta z} = V_L^+ \left(e^{+j\beta z} + \frac{V_L^-}{V_L^+} e^{-j\beta z} \right) = V_L^+ \left(e^{+j\beta z} + \rho_L e^{-j\beta z} \right) =$

$$= V_L^+ \left(e^{+j\beta z} + \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} e^{-j\beta z} \right)$$

$$|V(z)| = |V_L^+| \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(\varphi_L - 2\beta z)}$$

$V_{MAX} = |V_L^+|(1 + |\rho_L|) \rightarrow V_L^+ = 10V$ (0,4472)

$V_{MIN} = |V_L^+|(1 - |\rho_L|) \rightarrow V_L^- = 10V$

Suponiendo V_L^+ con fase cero

$$V(z) = 10\left(e^{j2\pi z} + 0,4472\, e^{j\varphi_L} \cdot e^{-j2\pi z}\right) (V)$$

$$I(z) = \frac{10}{Z_0}\left(e^{j2\pi z} - 0,4472\, e^{j\varphi_L} e^{-j2\pi z}\right) (A)$$

$$V(z,t) = Re\left(V(z) e^{j\omega t}\right) = 10\cos(\omega t + 2\pi z) + 4,472\cos(\omega t - 2\pi z + \varphi_L) (V)$$

$$I(z,t) = Re\left(I(z) e^{j\omega t}\right) = \frac{10}{50}\cos(\omega t + 2\pi z) - \frac{4,472}{50}\cos(\omega t - 2\pi z + \varphi_L) (A)$$

$$P(t) = V(z,t) \cdot I(z,t)$$

$$Pot.\ Media = \frac{1}{2} Re\left(V(z) \cdot I(z)^*\right) = \frac{1}{2} Re\left(V(z) \cdot \left(\frac{V(z)}{Z_C}\right)^*\right) = \frac{1}{2} Re\left(\frac{(V(z))^2}{Z_0}\right) = \frac{|V(z)|^2}{2Z_0} (W)$$

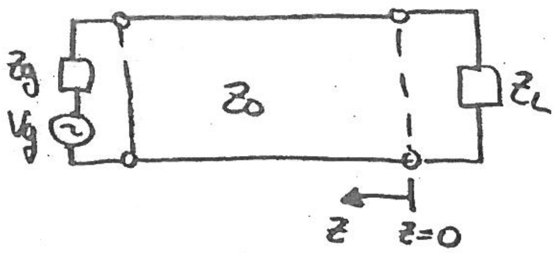
Potencia media es cualquier punto de la linea.

$$P_L = \frac{|V(z=0)|^2}{2Z_0} = \frac{|V_L|^2}{2Z_0} \equiv \text{potencia entregada a la carga.}$$

ó

$$P_L = \frac{|V_L^+|^2}{2Z_0}(1 - |\rho_L|^2) = \frac{100}{2 \cdot 50} = \frac{100}{2 \cdot 50}\left(1 - (0,4472)^2\right) = 0,8 (W)$$

PROB (3) FEB 2006. (pag 46-47)



$f = 150$ MHz

a) Sabemos que:

$$ROE = S = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{14'4721}{5'5279} = 2'618$$

$$Z_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = \frac{14'4721}{0'11056} = 130'898\ (\Omega)$$ $Z_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}}$

Como $Z_{max} = Z_0 \cdot ROE \Rightarrow \boxed{Z_0 = \frac{Z_{max}}{ROE} = 50\ \Omega}$ $Z_{min} = \frac{Z_0}{ROE}$

Como la línea no tiene pérdidas:

λ = se saca de la gráfica

$$\boxed{\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda} = \left\{ \frac{\lambda}{2} = Z_{max_2} - Z_{max_1} = 1'5881 - 1'0881 = 0'5 \right\} = j\,2\pi}\ (m^{-1})$$

NOTA: Cálculo de ε_r de la línea: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\cdot10^8}{150\cdot10^6\sqrt{\varepsilon_r}} = 1m$ ($\frac{\lambda}{2} = 0{,}5$ (ver gráfica)) $\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_r = 4}$

b) Como no hay pérdidas:

$$\underbrace{\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\ (\Omega)}}_{Ec.(1)};\quad \gamma = j2\pi = j\omega\sqrt{LC} = j\,2\pi\cdot150\cdot10^6\cdot\sqrt{LC} = j\,2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{1'5\cdot10^8\sqrt{LC} = 1}}_{Ec.(2)}$$

Operando en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

- $L = \frac{1}{3\cdot10^6}$ (H/m) = Inductancia por unidad de long
- $C = \frac{1}{3\cdot10^6\cdot50^2}$ (F/m) = Capacidad por unidad de long

interesante) Como la distancia entre máximos y mínimos es $\frac{\lambda}{2} = 0'5$ m, y tenemos un máximo de tensión en 1'0881 m, podemos decir que tenemos un máximo de tensión también en $\overset{0{,}081\lambda}{0'0881}$ m., por tanto:

$$|I(z)| = \frac{|V^+|}{Z_0}\sqrt{1+|\rho_L|^2 - 2|\rho_L|\cdot\cos(\ldots}$$ $2\beta z$

$$|V(z)| = |V^+|\cdot\sqrt{1+|\Gamma_L|^2 + 2|\Gamma_L|\cdot\cos\left(\varphi_L - 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot z\right)}\ ;\ \text{(voltios)}$$

Por tanto: $\cos(\varphi_L - 4\pi\cdot0'0881) = +1 \Rightarrow \boxed{\varphi_L = 4\pi\cdot0'0881 = 0'3524\cdot\pi}$

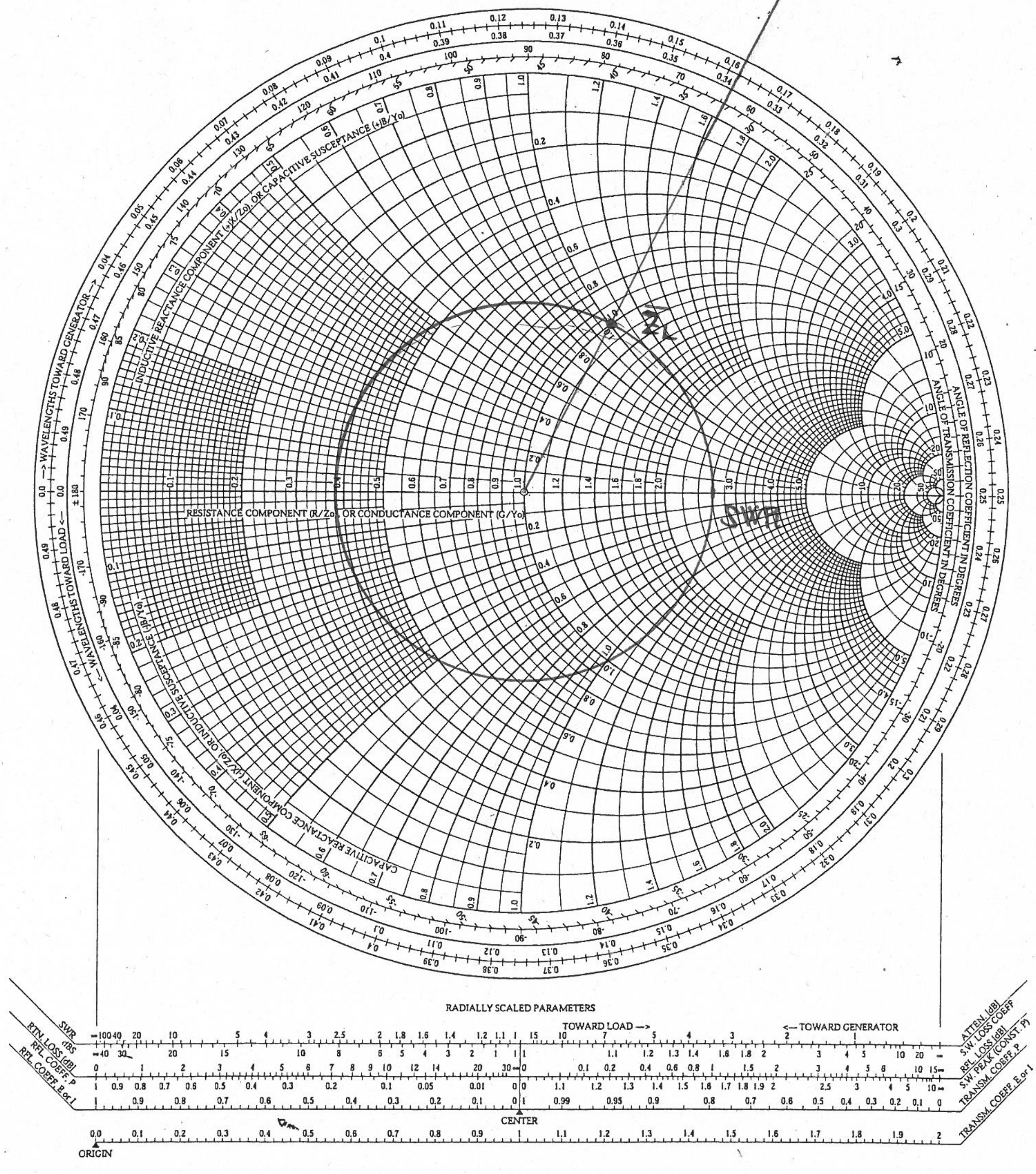
Como $ROE = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} = 2'618 \Rightarrow \boxed{|\Gamma_L| = \frac{ROE-1}{ROE+1} = 0'4472}$ $\rho_L = \frac{ROE-1}{ROE+1}$

$\cos(\varphi_L - 2\beta z_{max_1}) = +1 = \cos(\varphi_L - 2\beta z_{min_1})$

Problema 3 - Apartado C

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



Apartado C

Como la distancia entre máximos y mínimos es $\frac{\lambda}{2}=0{,}5\,m$ y tenemos un ~~mínimo~~ máximo de tensión en $z=1{,}0881\,m$, podemos decir que tenemos un máximo de tensión también en $0{,}0881\,m$, por tanto:

$$|V(z)|=|V^+|\cdot\sqrt{1+|\rho_L|^2+2|\rho_L|\cos\left(\varphi_L-2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}$$

Por tanto:

$$\cos\left(\varphi_L-\frac{4\pi}{1}\cdot 0{,}0881\right)=+1 \longrightarrow \varphi_L=4\pi\cdot 0{,}0881=0{,}3524\pi$$

Como $ROE=\frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|}=2{,}618 \longrightarrow |\rho_L|=\frac{ROE-1}{ROE+1}=0{,}4472$

Así:

$$\rho_L=|\rho_L|e^{j\varphi_L}=0{,}4472\cdot e^{j0{,}3524\pi}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \longrightarrow Z_L=Z_0\cdot\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}=$$

$$=50\cdot\frac{1+0{,}4472(0{,}44726+j0{,}8944)}{1-0{,}4472(0{,}44726+j0{,}8944)}=50\,\frac{1+(0{,}2+j0{,}4)}{1-(0{,}2+j0{,}4)}=50(1+j)$$

Hecho mediante carta de Smith, conocemos la SWR del apartado a por lo que dibujamos su circunferencia en la CS y nos desplazamos desde nuestra posición (eje $\mathbb{R}^+$) $0{,}881\lambda$ hacia carga para hallar $\overline{Z_L}$. El punto de corte de la circunferencia es $\overline{Z_L}$.

¿Como queremos conocer $\overline{Z_L}$, por eso nos movemos hacia carga?

Así pues:

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| \cdot e^{j\varphi_L} = 0'4472 \cdot e^{j0'3524 \cdot \pi} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \Rightarrow$$

Se podría hacer en la carta

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = Z_0 \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L}} = 50 \cdot \frac{1 + 0'4472 \cdot e^{j0'3524 \cdot \pi}}{1 - 0'4472 \cdot e^{j0'3524\pi}} =$$

$$= 50 \cdot \frac{1 + 0'4472\,(0'44726 + j0'8944\ )}{1 - 0'4472\,(\qquad\qquad\qquad)} = 50\ \frac{1+(0'2+j0'4)}{1-((0'2)+j0'4)} = \boxed{50\,(1+j)}\ (\Omega)$$

d) Sabemos que: $V_{max} = |V^+| \cdot (1 + |\Gamma_L|) \Rightarrow \boxed{|V^+| = \frac{14'4721}{1+0'4472} = 10}$ (voltios)

Por tanto: $\boxed{|V^-| = |\Gamma_L||V^+| = 4'472}$

Así pues: $V^+ = 10 \cdot e^{+j\beta z} = 10 \cdot e^{+j\frac{2\pi}{\lambda} z} = 10 \cdot e^{j2\pi z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V^+(z,t) = \mathrm{Re}\left[V^+ \cdot e^{j\omega t}\right] = 10 \cdot \cos(\omega t - 2\pi z) =}$$

$$\boxed{= 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 150 \cdot 10^6\, t + 2\pi z)}\ \text{(voltios)}$$

$$V^- = 4'472 \cdot e^{-j\beta z} = 4'472 \cdot e^{-j2\pi z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V^-(z,t) = \mathrm{Re}\left[V^- \cdot e^{j\omega t}\right] = 4'472 \cdot \cos(2\pi\,150 \cdot 10^6\, t - 2\pi z)}$$

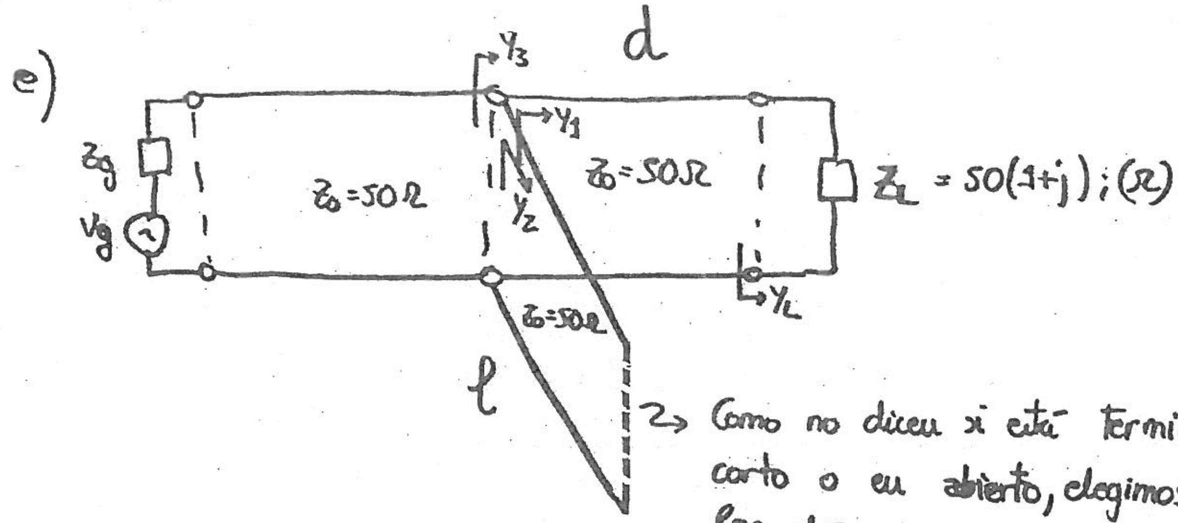
Las corriente $I^+(z,t)$ e $I^-(z,t)$ se obtienen dividiendo $V^+(z,t)$ y $V^-(z,t)$ entre $Z_0 = 50\Omega$;

$$\boxed{P^+(z,t) = V^+(z,t) \cdot I^+(z,t) = \frac{V^{+2}(z,t)}{Z_0} = 2 \cdot \cos^2(\omega t + 2\pi z)}\ ;\ (\omega)$$

$$\boxed{P^-(z,t) = V^-(z,t) \cdot I^-(z,t) = \frac{V^{-2}(z,t)}{Z_0} = \frac{(4'472)^2}{50} \cdot \cos^2(\omega t - 2\pi z)}\ (\omega)$$

$$P_{TOT}(z,t) = \left(V^+(z,t) + V^-(z,t)\right)\left(I^+(z,t) - I^-(z,t)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\omega)$$

e)



Como no dicen si está terminado en corto o en abierto, elegimos una de las dos.

$\overline{Z}_L = (1+j) \Rightarrow \boxed{\overline{Y}_L = 0'5 - j0'5}$

A partir de aquí el sintonizador simple:

$\frac{\lambda}{2} = 0'5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \text{ metro}}$

$\overline{Y}_1' = 1 + j \Rightarrow \boxed{d' = \frac{\lambda}{4} = 0'25\,m}$

$\overline{Y}_1'' = 1 - j \Rightarrow \boxed{d'' = (0'089 + 0'338)\lambda = 0'427\lambda = 0'427\,m}$

Para adaptación debe ser: (Suponemos el stub en abierto.)

$\overline{Y}_2' = -j \Rightarrow \boxed{\ell' = \frac{3\lambda}{8} = 0'375\lambda = 0'375\,m}$

$\overline{Y}_2'' = j \Rightarrow \boxed{\ell'' = \frac{\lambda}{8} = 0'125\lambda = 0'125\,m}$

A cualquiera de estas soluciones le podemos sumar $\frac{\lambda}{2}$ o un múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$ y obtendríamos el mismo resultado, de tal forma que como nos piden la solución de "d" [redacted] que esté en la zona donde se ha realizado la medida debemos contestar: (La medida se ha realizado entre $1 \leq z \leq 2$).

Pillado a

Solución ①: $d' = 0'25m + \lambda\,m = \boxed{1'25m}$ ó $\boxed{d' = 0'25 + 1'5\lambda = 1'75m}$; $\ell' = \boxed{0'375m}$

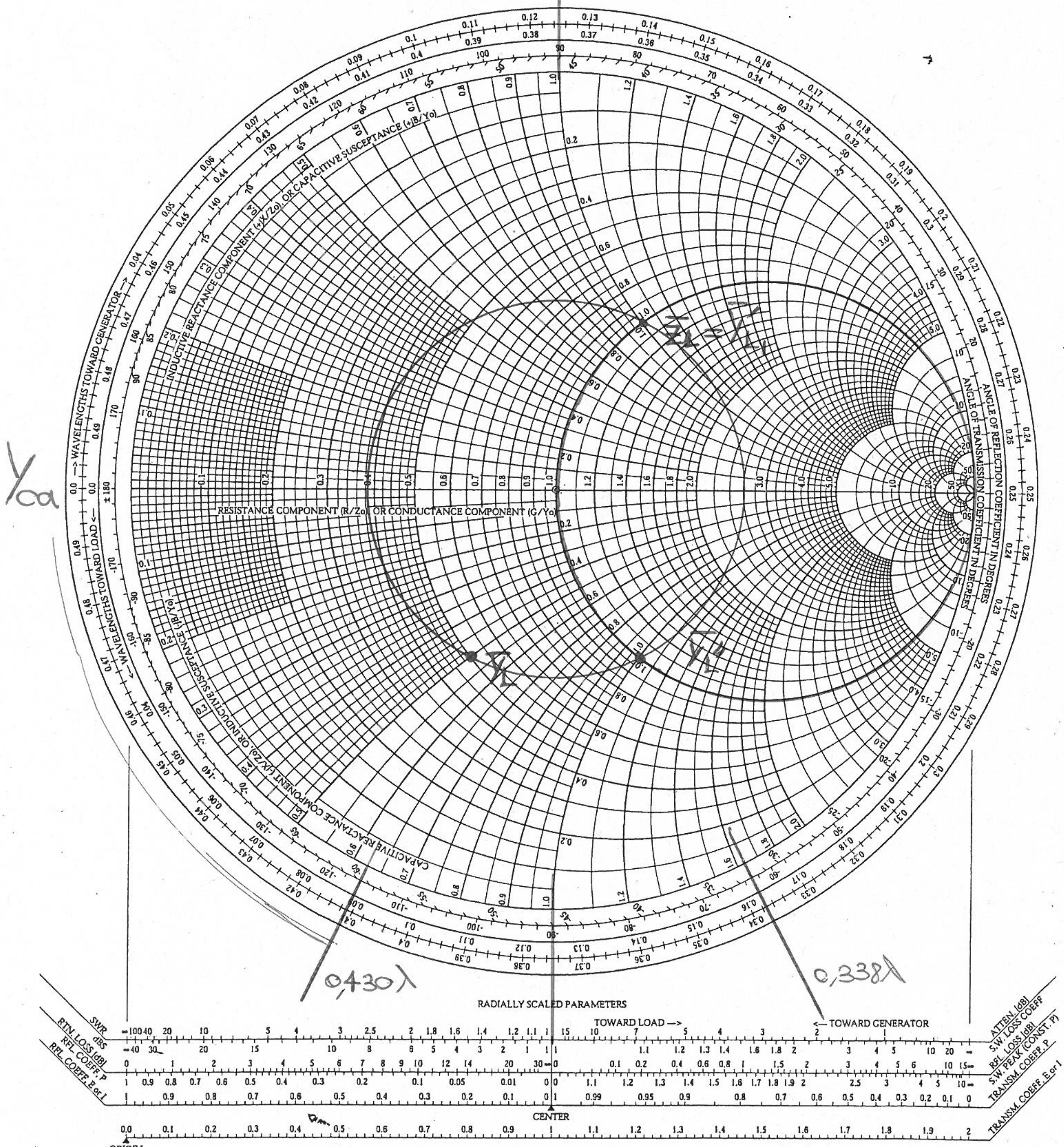
Solución ②: $d'' = 0'427m + \lambda m = \boxed{1'427m}$ ó $\boxed{d'' = 0'427m + 1'5\lambda = 1'927m}$; $\ell'' = \boxed{0'125m}$

Problemas - Apartado e

Circunferencia $Re()=1$

The Complete Smith Chart

Black Magic Design

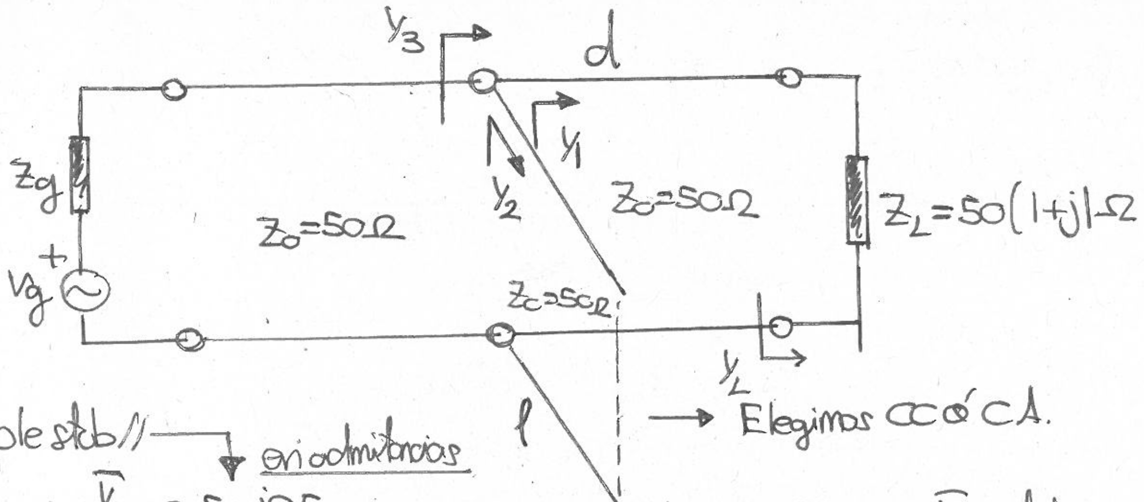


0,430λ

-0,338λ

0,092λ → 0,5λ - 0,092λ = 0,42λ

e)



→ Elegimos CC ó CA.

Simple stub // → en admitancias

$\overline{Z_L}=1+j \rightarrow \overline{Y_L}=0,5-j0,5$

Una vez hemos trazado la circunferencia que contiene a $\overline{Z_L}$ y a $\overline{Y_L}$, debemos verificar que se cumpla:

$Y_3=Y_2+Y_1$, siendo Y_2 imaginaria para (stub)

$Re(Y_3)=1 \rightarrow$ para que el circuito esté adaptado

$Re(Y_3)=Re(Y_1)=1 \rightarrow$ lo que nos hace marcar la circunferencia $Re(\,)=1$

$\underbrace{\text{corte donde } \overline{Z_L}}$

$\lambda=1m$

$\overline{Y_1}'=1+j \rightarrow d'=\frac{\lambda}{4}=0,25m$

$\overline{Y_1}''=1-j \rightarrow d''=0,427\lambda$

Para adaptación debe ser: (suponemos stub en abierto)

$\overline{Y_2}'=-j \rightarrow l'=\frac{3\lambda}{8}=0,375\lambda=0,375m$

$\overline{Y_2}''=j \rightarrow l''=\frac{\lambda}{8}=0,125\lambda=0,125m$

A cualquiera de estas soluciones le podemos sumar $\frac{\lambda}{2}$ ó un múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$ y obtendríamos el mismo resultado, de tal forma que como nos piden la solución de d que esté en la zona donde se ha realizado la medida $\rightarrow 1\leq z\leq 2$ $\boxed{\text{TRCCO}}$

$d'=0,25m+\lambda=1,25m$ ó $d'=0,25m+1,5\lambda=1,75m$

Solución ①: $d'=0,25m+\lambda=1,25m$ ó $d'=0,25m+1,5\lambda=1,75m$; $l'=0,375m$

Solución ②: $d''=0,427m+\lambda m=1,427m$ ó $d''=0,427m+1,5\lambda=1,927m$; $l''=0,125m$

f) Si se trata de adaptar con una bobina en paralelo sabemos que la admitancia de una bobina es negativa:

$$\boxed{Z_{bobina} = j\omega L \Rightarrow Y_{bobina} = \frac{-j}{\omega L}}$$ CHULETARIO

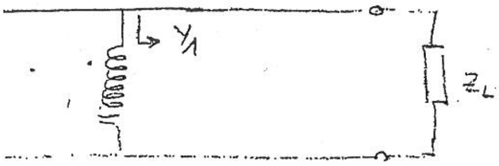
Así pues para adaptar el esquema anterior debemos tomar la primera de las soluciones, ya que:

Apartado típico

$$\overline{Y}_3 = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_{bobina} = 1 \Rightarrow \overline{Y}_{bobina} = -j \Rightarrow Y_{bobina} = \frac{-j}{50} = \frac{-j}{\omega L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{50}{\omega} = \frac{50}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6} = \boxed{\frac{10^{-6}}{6\pi}}} ; (H)$$

Se puede poner esta bobina en: $d' = 1'25m$ ó $d' = 1'75m$.



① $Z_{bobina} = j\omega L \Rightarrow$ ② $Y_{bobina} = \frac{-j}{\omega L}$

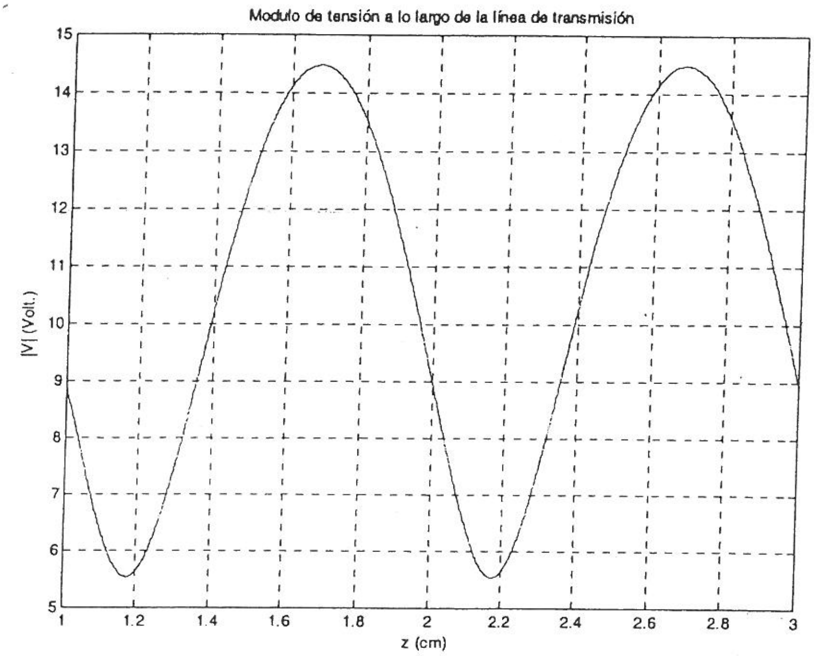
③ $Z_{cond} = \frac{-j}{\omega C} \Rightarrow Y_{cond} = j\omega C$

① Adaptar con bobina en serie $\Rightarrow Z_1 = ⊖$
② " " " " paralelo $\Rightarrow Y_1 = ⊕$
③ " " condensador en serie $\Rightarrow Z_1 = ⊕$
④ " " " " paralelo $\Rightarrow Y_1 = ⊖$

* Este problema no tiene solución (es igual que el anterior)

PROBLEMA 2 (5 puntos)

Se ha medido el módulo de tensión a lo largo de una línea de transmisión, el cual se representa en la siguiente figura, donde el eje de abscisas está en cm. También se ha medido la magnitud del módulo de la corriente y su valor (en un mínimo de tensión) ha sido $|I| = 0.1447$ A.



Los mínimos de tensión, en la zona visible, se encuentran en los puntos $z = 1.1762$ cm. y $z = 2.1762$ cm. y los máximos de tensión en $z = 1.6762$ cm. y $z = 2.6762$ cm. En todos los mínimos se ha medido el mismo módulo de tensión $|V|_{min} = 5.5279$ V. y la tensión medida en un máximo fue $|V|_{max} = 14.4721$ V.

Calcule:

a) Los parámetros secundarios de la línea de transmisión a la frecuencia de trabajo.

b) Si la frecuencia de trabajo es 10 GHz, los parámetros primarios de la línea de transmisión.

c) La impedancia con que está cargada la línea en $z = 0$.

d) En el margen donde se representa el módulo de tensión, indique los puntos donde se puede introducir (en cascada) una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$ para conseguir adaptación de impedancias. En cada punto indique la impedancia característica de la línea de transmisión introducida para lograr dicha adaptación.

e) Se quita la línea de transmisión a partir de $z = 0$ y se quiere adaptar la impedancia de la carga a 50 Ω mediante una línea de transmisión $\lambda/8$ seguida de una línea de transmisión $\lambda/4$. Indique la impedancia de dichas líneas de transmisión para conseguir la adaptación y su longitud física si la constante de propagación es la misma que la del primer apartado.

f) Por motivos tecnológicos sólo se pueden emplear líneas de transmisión cuya impedancia característica se encuentre en el siguiente margen: $25\,\Omega \le Z_0 \le 100\,\Omega$. Indique el conjunto de impedancias de carga $Z_L = R_L + jX_L$, siendo $R_L = X_L$, que no se pueden adaptar utilizando la configuración del apartado anterior.

PROB. 2 JUNIO 2006 (Pág 49)

Pillada!

DATOS: $|I|_{max} = 0'1447$; (A) Sabemos que los mínimos de tensión coinciden con los máximos de corriente y viceversa.

Ver gráfica del enunciado.

$z_{min_1} = 1'1762$ cm ; $z_{min_2} = 2'1762$ cm

$|V|_{min} = 5'5279$; (V)

$|V|_{max} = 14'4721$; (V)

SOLUCIÓN:

a) Los parámetros secundarios de la ldt son: γ y Z_0. [SUPONEMOS LÍNEA SIN PERDIDAS.]

$$\gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda} = \left\{ \text{distancia entre mínimos consecutivos} = \frac{\lambda}{2} = z_{min_2} - z_{min_1} = 1\text{cm} = 0'01\text{ m} \right\} =$$

$$= j\frac{2\pi}{\lambda} = j\frac{\pi}{0'01} = \boxed{j\,100\pi}\ (m^{-1})$$

Para obtener Z_0 sabemos que la máxima impedancia de una ldt es real y de valor:

$$Z_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = \frac{14'4721}{¿?}\ ;(\Omega)$$

También sabemos que la mínima impedancia de una ldt es real y de valor:

$$Z_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = \frac{5'5279}{0'1447} = 38'202\ (\Omega)$$

Además: $Z_{min} = \frac{Z_0}{ROE} \Rightarrow \boxed{Z_0} = Z_{min} \cdot ROE = Z_{min} \cdot \frac{V_{max}}{V_{min}} = 38'202 \cdot \frac{14'4721}{5'5279} = \boxed{100\Omega}$

b) $\boxed{\gamma = j\omega\sqrt{LC}} = j\,2\pi f \cdot \sqrt{LC} = j\,2\pi \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{LC} = j\,100\pi$, $(m^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{LC} = \frac{10^{-8}}{2}}$ Ec.(1)

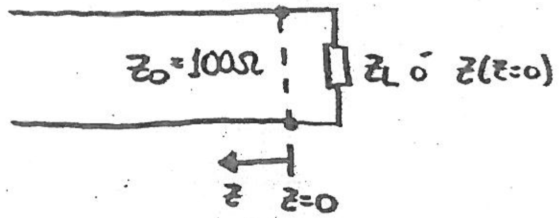
$\boxed{Z_0 = 100 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$, $(\Omega) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{L}{C}} = 100}$ Ec.(2)

Operando obtenemos:

$L = 5 \cdot 10^{-7}$ (H/m); Autoinducción por unidad de longitud.

$C = 5 \cdot 10^{-11}$ (F/m); Capacidad por unidad de longitud.

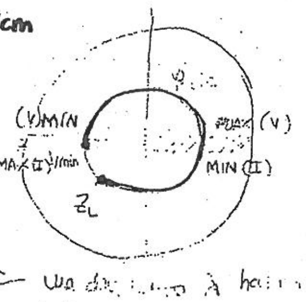
c) Sabemos que el esquema será:



Sabemos que el módulo del coef. de reflexión es el mismo en todos los puntos de la línea y su valor es:

$$\boxed{|\rho_L|} = \frac{ROE-1}{ROE+1} = \left\{ ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{14'4721}{5'5279} = 2'618 \right\} = \boxed{0'44721}$$

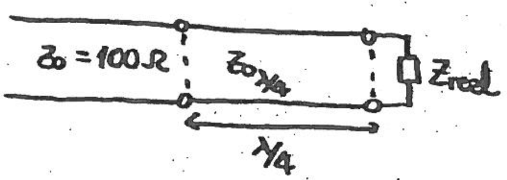
Ahora debemos trazar la circunferencia de $|\rho| = 0'44721$ en la carta de Smith, y desplazarnos desde el punto de mínima tensión $1'1762\ cm = 0'588\lambda$ (*) ($\lambda = 2cm$) hacia cargas, donde leeremos $\overline{Z}_L$ que es:



$$\overline{Z}_L = 0'5(1-j) \Rightarrow \boxed{Z_L = Z(z=0) = \overline{Z}_L \cdot Z_0 = 50(1-j)}\ (\Omega)$$

(*) $1,1762\ cm$ —— x
$2\ cm$ —— λ

d) Para adaptar con un transformador $\frac{\lambda}{4}$ debemos tener a ambos lados una impedancia real y se debe cumplir que:



$$Z_{0\lambda/4} = \sqrt{Z_0 \cdot Z_{real}}\ ;\ (\Omega)$$

En la línea dada, los puntos donde la impedancia es real son en los máximos y en los mínimos donde:

$$Z_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = Z_0 \cdot ROE = 100 \cdot 2'618 = 261'8\ (\Omega) \Rightarrow \boxed{Z_{0\lambda/4} = 161'8\ (\Omega)}$$

situada en: $z = 1'6762\ cm$
$z = 2'6762\ cm$

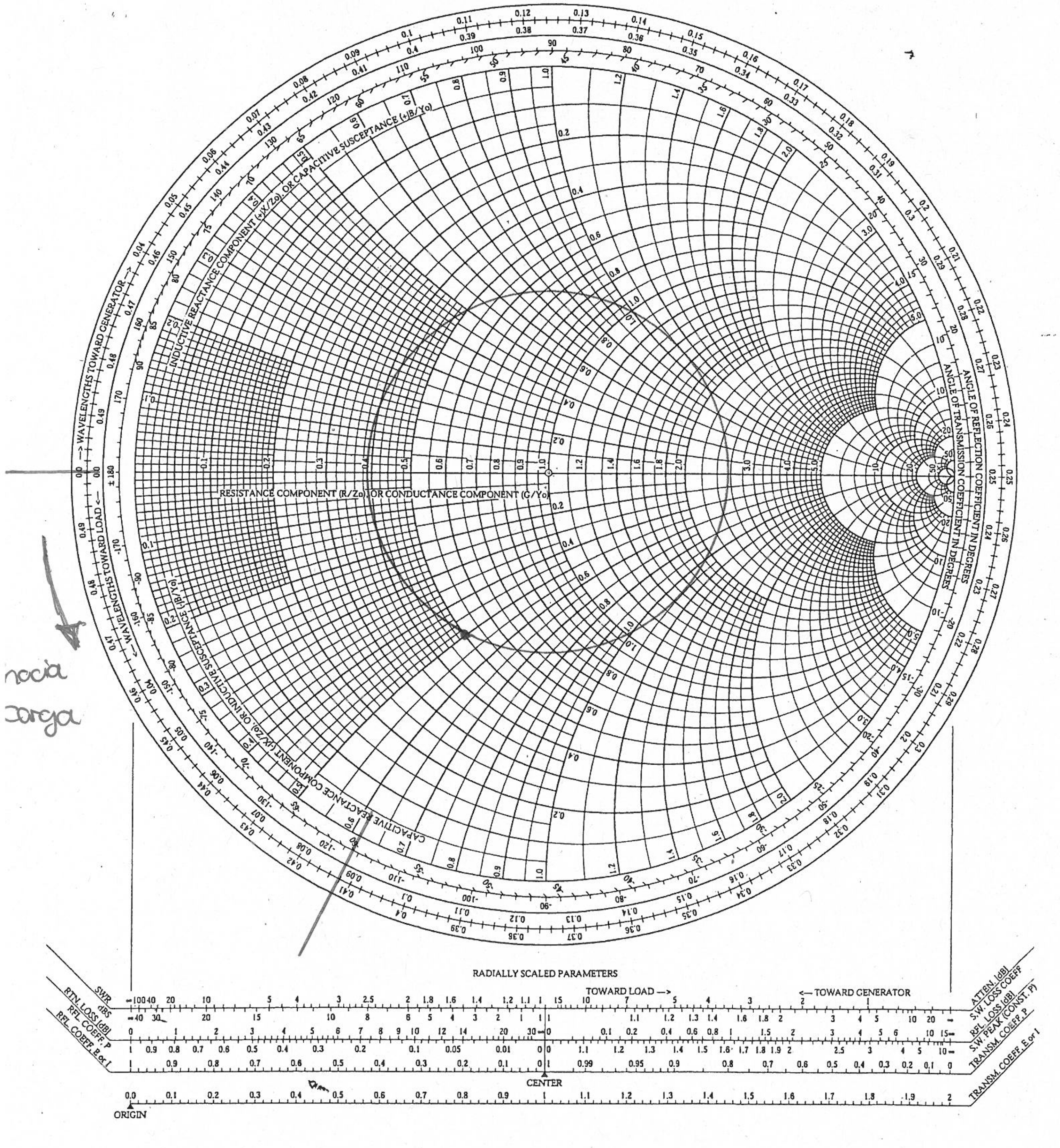
$$Z_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = \frac{Z_0}{ROE} = \frac{100}{2'618}\ (\Omega) \Rightarrow \boxed{Z_{0\lambda/4} = 61'8\ (\Omega)}$$

situada en: $z = 1'1762\ cm$
$z = 2'1762\ cm$

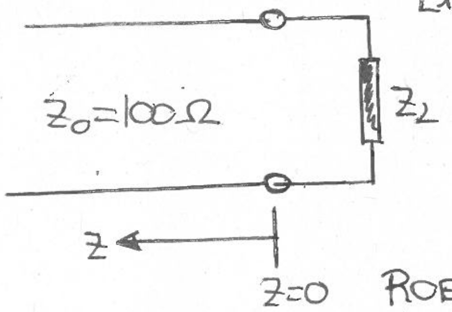
Problema 2 Apartado C

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



Apartado C



Línea sin pérdidas → coeficiente de reflexión es el mismo en todos los puntos de la línea:

$$|\rho_L| = \frac{ROE-1}{ROE+1} = \frac{2'618-1}{2'618+1} = 0,44721$$

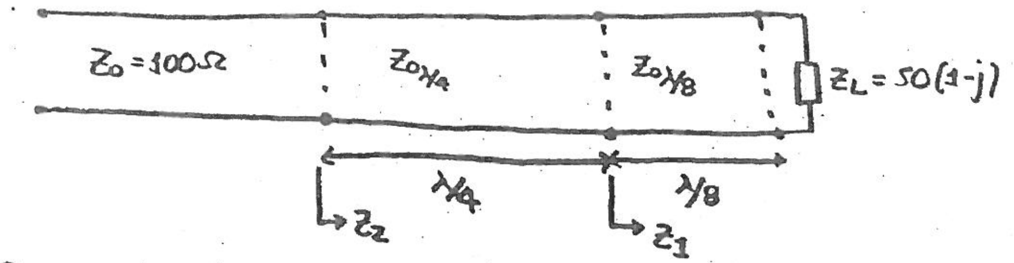
$$ROE = \frac{V_{máx}}{V_{mín}} = \frac{14,4721}{5,5279} = 2,618$$

Trazamos la circunferencia $|\rho| = 0,44721$ en la CS, y nos desplazamos hacia carga:

Mínimo de tensión en $z = 1,1762$ cm → en $z = 0,588\lambda$ habrá otro.

$\lambda = 2$ cm

e)



Para adaptar con una línea de $\lambda/4$ seguida de una de $\lambda/8$ debe ser:

$$\boxed{Z_{0\lambda/8} = |Z_L| = 50\cdot\sqrt{2}}\ ;\ (\Omega)$$

De esta forma conseguimos una Z_1 real:

$$\boxed{Z_1} = Z_{0\lambda/8}\cdot\frac{Z_L + jZ_{0\lambda/8}\cdot tg\left(\beta\cdot\frac{\lambda}{8}\right)}{Z_{0\lambda/8} + jZ_L\cdot tg\left(\beta\cdot\frac{\lambda}{8}\right)} = \left\{\beta\cdot\frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}\right\} = 50\cdot\sqrt{2}\ \frac{50(1-j) + j50\cdot\sqrt{2}\cdot 1}{50\cdot\sqrt{2} + j50(1-j)\cdot 1} =$$

$$= 50\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{50 + j\left(50\sqrt{2} - 50\right)}{\left(50 + 50\sqrt{2}\right) + j50} = 50\cdot\sqrt{2}\ \frac{50 + j\,20'71}{120'71 + j50} \approx \boxed{29'29\ \Omega}$$

Finalmente:

$$\boxed{Z_{0\lambda/4}} = \sqrt{Z_1\cdot Z_0} = \sqrt{29'29\cdot 100} = \boxed{54'12\ \Omega}$$

Si la constante de propagación es la misma que la del primer apartado tenemos que: $\gamma = j\beta = j\,\frac{2\pi}{\lambda}$, es decir, que λ es la misma que la del primer apartado, por tanto, las longitudes físicas serán:

$$\boxed{\frac{\lambda}{8}} = \frac{2\ cm}{8} = \boxed{0'25\ cm} \quad y \quad \boxed{\frac{\lambda}{4} = 0'5\, cm}$$ respectivamente.

f) Ya hemos visto que para adaptar debe ser:

$Z_{0\lambda/8} = |Z_L| = R_L\cdot\sqrt{2}$; (Ω)

Como $25 \le Z_{0\lambda/8} \le 100$ debe ser: $\begin{cases} R_L \geq \frac{25}{\sqrt{2}} = 17'67\ (\Omega) \\ R_L \le \frac{100}{\sqrt{2}} = 70'71\ (\Omega)\end{cases}$ [Restricción de R_L debida a $Z_{0\lambda/8}$]

Por otro lado, como debe ser $Z_{0\lambda/4} = \sqrt{Z_0\cdot Z_1} = \sqrt{100\cdot Z_1} \Rightarrow Z_1 = \frac{Z_{0\lambda/4}^2}{100} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{Z_1} \geq \frac{25^2}{100} = \boxed{6'25} \\ \boxed{Z_1} \le \frac{100^2}{100} = \boxed{100}\end{cases}$

Como: $Z_1 = Z_{0\lambda/8}\cdot\frac{Z_L + jZ_{0\lambda/8}\cdot tg(\pi/4)}{Z_{0\lambda/8} + jZ_{0\lambda/8}\ tg(\pi/4)} = \begin{Bmatrix} Z_L = R_L(1+j) \\ Z_{0\lambda/8} = R_L\cdot\sqrt{2}\end{Bmatrix} = \ldots = 3'414\cdot R_L$; $(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} R_L \geq \frac{6'25}{3'414} = 1'83\ (\Omega) \\ R_L \le \frac{100}{3'414} = 29'29\ (\Omega)\end{cases}$

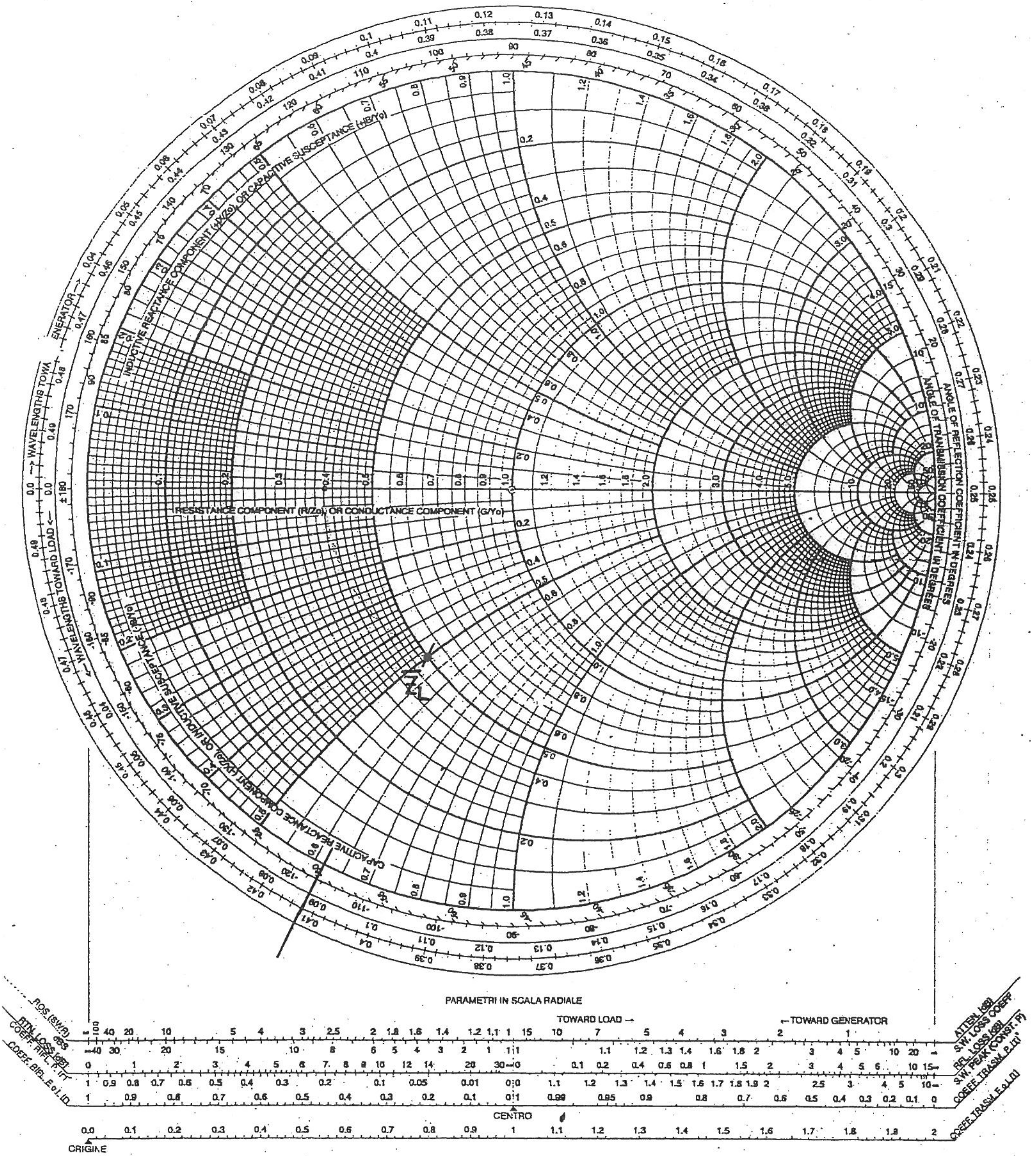
50

Carta di Smith

IEEE Student Branch dell'Università di Pavia

anno MMI

4/



61

1º Test TPO 2012-2013

Problema 1

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2\angle 0^\circ & 0{,}5\angle 45^\circ \\ 0{,}3\angle -45^\circ & 0{,}2\angle 0^\circ \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}707 \\ 0{,}707 & 0 \end{pmatrix}$$

1) La matriz S_1 es:

a) Recíproca y sin pérdidas

b) Recíproca y con pérdidas.

c) No recíproca y sin pérdidas

d) No recíproca y con pérdidas. ←

- Si es recíproca: → $S_{ij} = S_{ji}$; $S_{ii} = S_{jj}$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j \\ \frac{3\sqrt{2}}{20} - \frac{3\sqrt{2}}{20} j & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} S_{ii} = S_{jj} \\ S_{ij} \neq S_{ji} \end{matrix} \rightarrow \text{es no recíproca.}$$

- Si no tiene pérdidas:

$S \cdot S^{T*} = I$ (no se va a cumplir)

2) Pérdidas de retorno cuando la carga está adaptada:

$$-10\log(|\rho_L|^2) = -20\log(|\rho_L|) = -20\log(|S_{11}|) = 13{,}979\,dB$$

3) Pérdidas de retorno cuando hay un cortocircuito en el puerto 2:

$S_{11} = \rho_L$ sólo cuando la carga está adaptada.

cortocircuito → $\rho_L = -1$

$$\rho_e = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \rho_L}{1 - \rho_L S_{22}} \longrightarrow -20\log(\overbrace{|\rho_e|}^{\text{módulo}})$$

4) La matriz S_2 es:

a) ...

b) Recíproca y con pérdidas. ←

c) ...

d) ...

Es recíproca

$$S \cdot S^{T*} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0{,}707 \\ 0{,}707 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0{,}707 \\ 0{,}707 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{con pérdidas.}$$

Problema 2

Apartado A

Nos daban unos datos de una LT: R, L, G y C, de tal forma que:

$$\frac{L\omega}{R} = 2781 \rightarrow R \ll L\omega \qquad \frac{C\omega}{G} = 2781;\ G \ll C\omega \qquad f = 1\,GHz$$

5) ¿Qué tipo de ldt es?

a) Línea de bajas pérdidas. ←

b) Cable coaxial

c) Línea con pérdidas.

d) Línea sin pérdidas.

Como se cumple $R < L\omega$ y $G < C\omega$ es una ldt de bajas pérdidas.

*El cable coaxial también es de bajas pérdidas, pero como no sabemos qué tipo de cable puede ser decimos que es una ldt de bajas pérdidas.

⑥ ¿ Z_0?

Como es LdT de bajas pérdidas $\longrightarrow Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$

⑦ ¿ V de propagación?

$$V=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

⑧ ¿ Longitud de onda?

$V=\lambda\cdot f \longrightarrow \lambda=\frac{V}{f}$ $\longrightarrow$ lo hemos sacado en el apartado anterior. $\longrightarrow$ dato del enunciado.

⑨ ¿ Atenuación de la línea? $\longrightarrow$ Bajas pérdidas: $\alpha(Np/m)=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}+\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ Np/m

$1\,Np/m=0,115\,dB/m$ (Por razonamiento sabes que el neperio es una unidad más pequeña que los dBs).

$8,68\,Np/m=1\,dB/m$

$\alpha=0,023\,Np/m \longrightarrow \alpha=0,2\,dB/m$

Apartado b

Con el mismo tipo de línea se construye una LT con $L=5m$; $Z_g=50\Omega$; $V_g=10V$; $P_{in}=20dBm$; $P_{recibida}(en\ x=0)=11,01dBm$; Z_L de valor desconocido; hay un máximo de tensión en $z=0,04421$ cm.

$|\rho_L|=X<1$

$\lambda=0,1\,m \longrightarrow \lambda/2=0,05m$

$0,5\lambda=\lambda/2 \longrightarrow 0,05cm$
$x^{o} \longrightarrow 0,4421cm$ $\longrightarrow x=\frac{\lambda/2\cdot 0,04421}{0,05}=\lambda\cdot 0,4421$

Hay un máximo en $z=0,4421\lambda$

$360^{o} \longrightarrow \lambda/2$
$x^{o} \longrightarrow 0,4421\lambda$ $\quad x=\frac{360\cdot 0,4421}{\lambda\cdot 0,5}=318,312^{o}=\measuredangle\rho_L$

Ya tendríamos módulo y fase de $\rho_L \longrightarrow$ ya podemos situarlo en la carta de Smith.

⑩ Tensión vista por el generador cortocircuito.

$$V_i=\frac{1}{2}Re\left[\frac{V_G}{2}\cdot\frac{V_G^*}{2Z_0}\right]=\frac{|V_G|^2}{8Z_0}$$

⑪ ¿ Z_L?

Con el desarrollo de arriba.

⑫ ¿Pérdidas en la LT?

a/ La línea de transmisión no consume potencia ⟶ FALSO

20dBm $A=0,5\cdot 2m=1dB$ 19dB

$P_{in}=10^{20/10}=10^{2}=100\ mW$

$P_{out}=10^{19/10}=79,43\ mW$

$P_{consumida_{LT}}=100mW-79,43mW=20,56\ mW$

⑬ ¿SWR?

Habiendo sacado la circunferencia de $|\rho_L|=cte$ en Smith ya está hecho.

⑭ ρ en la carga si $Z_L=Z_0$

⑮ ρ en bornas del generador si hay un circuito abierto.

Tema 2

ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

ÍNDICE

		Página
2.1	DIAGRAMA DE SMITH.	3
	2.1.1 Normalización de impedancias.	5
	2.1.2 Diagrama de Smith para impedancias.	5
	2.1.2.1 Circunferencias para la parte real de Z_N.	6
	2.1.2.2 Circunferencias para la parte imaginaria de Z_N	6
	2.1.3 Diagrama de Smith para admitancias.	8
	2.1.4 La Relación de Onda Estacionaria, ROE, en el diagrama de Smith.	9
	2.1.5 Valores máximo y mínimo de impedancia en línea.	11
2.2	ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS EN LÍNEA.	15
	2.2.1 Sección adaptadora terminada en cortocircuito.	15
	2.2.2 Sección adaptadora terminada en circuito abierto.	16
	2.2.3 Sintonizador simple.	17
	2.2.4 Sintonizador doble.	20
	2.2.5 Adaptador en $\lambda/4$.	24

*Nota
Grados del coeficiente de reflexión no son los grados eléctricos de la línea de tx.
*Nota
$Z = R + jX \equiv$ Impedancia $\begin{cases} R = \text{Resistencia} \\ X = \text{Reactancia} \end{cases}$ (Ω)

$Y = G + jB \equiv$ Admitancia $\begin{cases} G = \text{Conductancia} \\ B = \text{Susceptancia} \end{cases}$ $\mho$ ó S

2.1.- DIAGRAMA DE SMITH.

Es una herramienta que facilita la resolución gráfica de problemas de adaptación de impedancias en líneas de transmisión, aunque también está extendido su uso en otras aplicaciones relacionadas con la alta frecuencia.

En rigor, para resolver problemas de adaptación, el diagrama sólo es aplicable a líneas sin pérdidas, pero, dadas las pequeñas longitudes de línea que se suelen emplear en los casos de adaptación de impedancias, el diagrama se puede usar con una excelente aproximación en el caso de líneas de bajas pérdidas.

En esencia, el diagrama de Smith es una representación en coordenadas polares del coeficiente de reflexión para tensiones.

En el capítulo anterior se obtuvo el coeficiente de reflexión en cualquier punto de una línea en función del coeficiente de reflexión en la carga:

$$\left.\begin{array}{l} \rho(z) = \rho_L e^{-2jkz} \\ \\ \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\rho_L| e^{j\phi_L} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(z) = |\rho_L| e^{j(\phi_L - 2kz)}$$

Comprobemos los valores que adquiere el módulo del coeficiente de reflexión para valores extremos de la carga conectada a la línea:

a) Línea cortocircuitada.

$$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{0 - Z_0}{0 + Z_0} = -1 \Rightarrow |\rho_L|_{Z_L = 0} = 1$$

b) Línea terminada por Z_0.

$$Z_L = Z_0 \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0 \Rightarrow |\rho_L|_{Z_L = Z_0} = 0$$

c) Línea terminada en circuito abierto.

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\infty - Z_0}{\infty + Z_0} = 1 \Rightarrow |\rho_L|_{Z_L = \infty} = 1$$

Los valores obtenidos representan los límites de variación del módulo del coeficiente de reflexión: $|\rho(z)|$ sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1.

Por otro lado, como el argumento del coeficiente de reflexión toma valores de la expresión $\phi_L - 2kz$, para longitudes de línea (z) superiores a media longitud de onda, el argumento podrá tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 2π.

De lo anterior ($0 \leq |\rho(z)| \leq 1$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$), se deduce que el diagrama de Smith, como lugar geométrico de todos los posibles valores de $\rho(z)$ es un círculo de radio unidad.

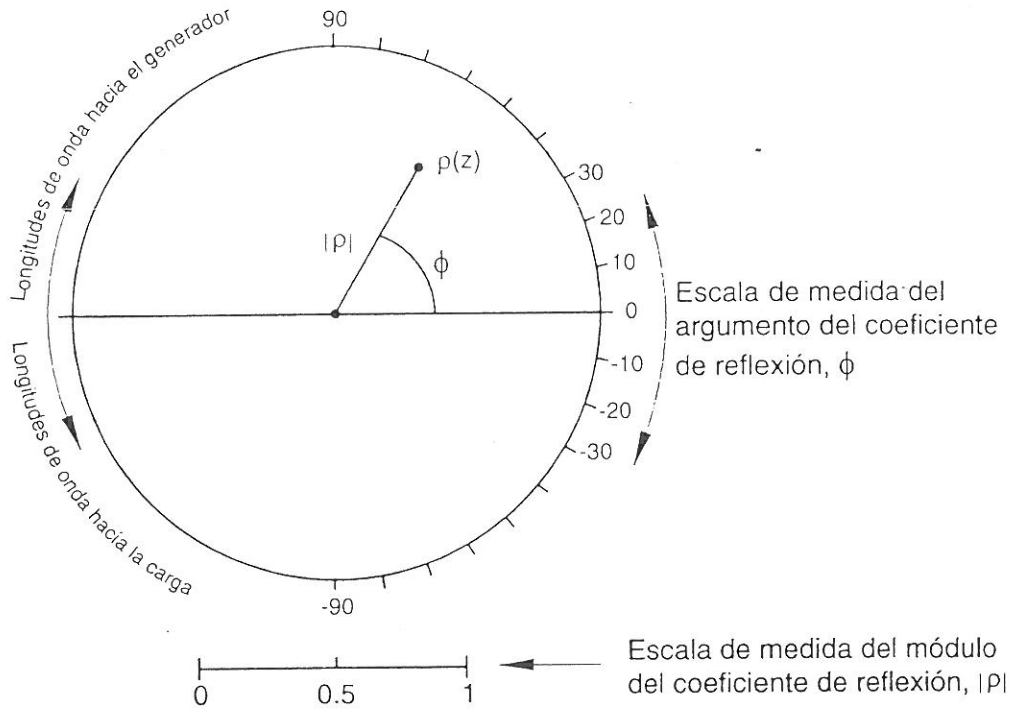


Fig. 2.1. Representación de ρ(z) en el diagrama de Smith.

Para medir variaciones del argumento del coeficiente de reflexión, $\phi_L - 2kz$, es cómodo utilizar dos escalas que existen en el diagrama y que permiten expresar z en función del incremento en longitudes de onda, tanto si el desplazamiento por la línea se realiza hacia el generador, como hacia la carga.

Puesto que el módulo del coeficiente de reflexión en una línea sin pérdidas es constante para toda la línea (e igual al $|\rho_L|$), el lugar geométrico de todos los posibles $\rho(z)$ será una circunferencia con radio igual a $|\rho_L|$ y centro el centro del diagrama, tal como se representa en la figura 2.2.

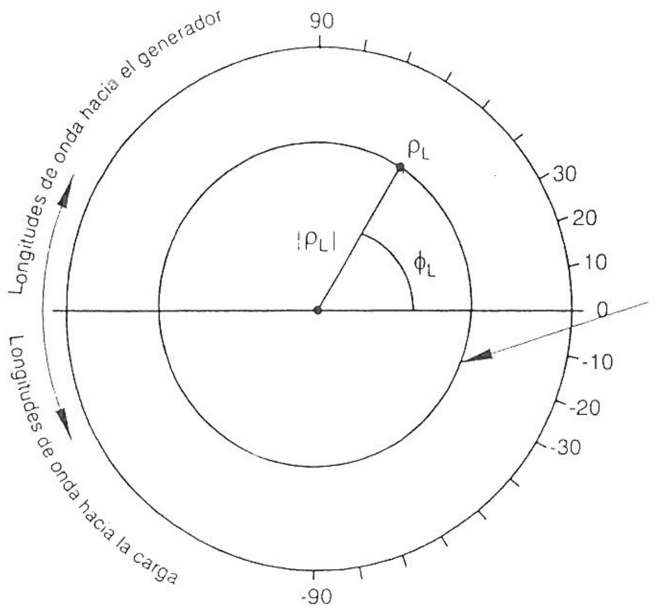


Fig. 2.2. Circunferencia de posibles valores de $\rho(z)$ en una línea.

2.1.1.- Normalización de impedancias.

En líneas, se emplea como impedancia de normalización el valor de la impedancia característica de la línea, Z_0. Con ello, para obtener el valor normalizado de una impedancia, basta dividirla por Z_0.

Así, el valor normalizado de la impedancia que presenta una línea a una distancia z de la carga será:

$$Z_N(z) = \frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{Z_0 \dfrac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}}{Z_0} = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

2.1.2.- Diagrama de Smith para impedancias.

La relación anterior,

$$Z_N(z) = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

permite hacer corresponder a cada punto del diagrama, $\rho(z)$, su valor correspondiente de impedancia normalizada en línea.

35

Para leer el valor de impedancia normalizada que corresponde a cada punto del diagrama de Smith, se utilizan dos familias de curvas: una para la parte real de Z_N y otra para la parte imaginaria.

Clave en el ejercicio serie - paralelo

2.1.2.1.- Circunferencias para la parte real de Z_N.

El lugar geométrico de todos los puntos que tienen el mismo valor de parte real de impedancia normalizada, es una circunferencia interior al diagrama y tangente a la circunferencia que lo limita por el punto (1, 0). Para cada valor de $Re[Z_N]$, existe una circunferencia, siendo mayor su radio cuanto menor es el valor de la parte real correspondiente. El valor de parte real que corresponde a cada circunferencia está indicado en la intersección de la misma con el eje real.

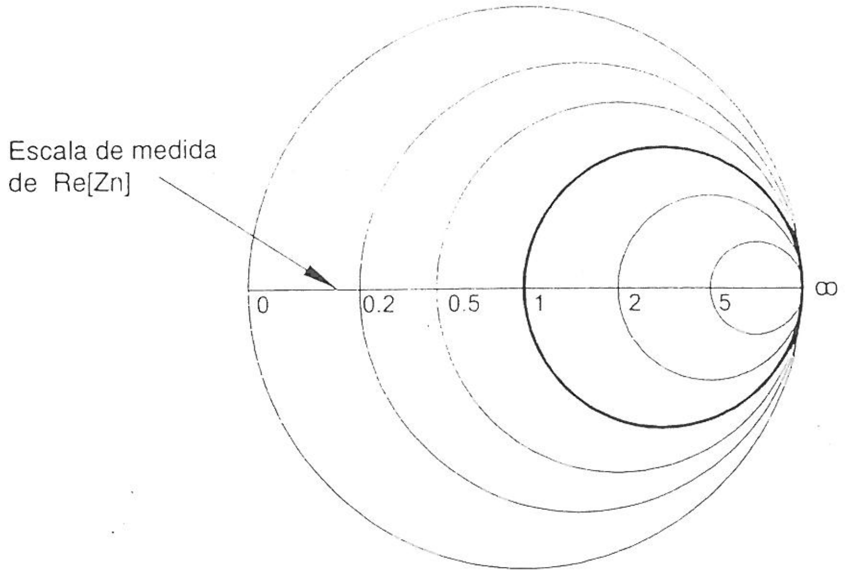


Fig. 2.3. Circunferencias de Re[Z]=cte.

La circunferencia que se encuentra resaltada en la figura 2.3 es la de $Re[Z_N]=1$, la cual tiene una importancia relevante en los problemas de adaptación, pues a todos los puntos de la misma les corresponde, una vez desnormalizados, el valor Z_0, el cual es el que hay que conseguir como carga de la línea para que exista adaptación de impedancias.

2.1.2.2.- Circunferencias para la parte imaginaria de Z_N.

El lugar geométrico de todas las impedancias que tienen la misma parte imaginaria son arcos de circunferencia tangentes al eje real por el punto (1,0).

Los arcos de circunferencia que se encuentran por encima del eje real corresponden a reactancias inductivas, es decir, a partes imaginarias positivas.

Los arcos de circunferencia que se encuentran por debajo del eje real corresponden a reactancias capacitivas, es decir, a partes imaginarias negativas.

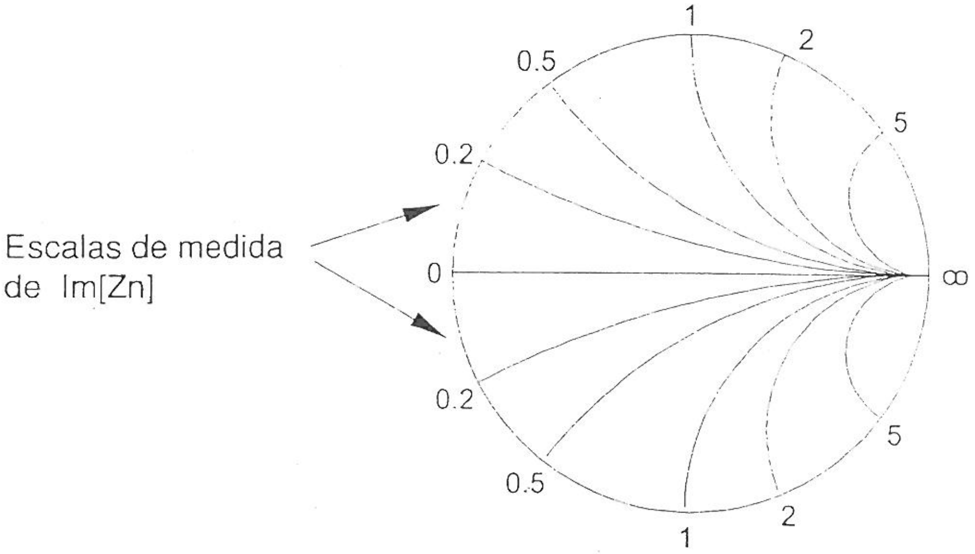


Fig. 2.4 Circunferencias de Im[Z]=cte.

Ejemplo 2.1: Una línea sin pérdidas de $Z_0 = 50\,\Omega$ se encuentra terminada por una impedancia de carga $Z_L = 60 - 100j\,\Omega$, tal como se muestra en la figura 2.5. Determinar la impedancia que aparece en la entrada de la línea.

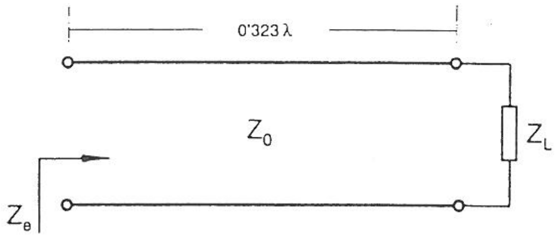


Fig. 2.5

El primer paso será obtener el valor de la impedancia de carga normalizada y transportarlo al diagrama.

$$Z_{LN} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{60 - 100j}{50} = 1'2 - 2j$$

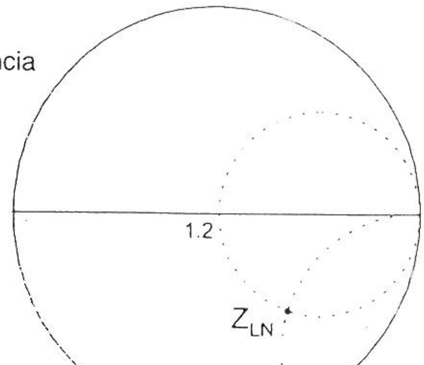


Fig. 2.6

36

Los posibles valores de impedancia en la línea se encontrarán en una circunferencia con centro el origen y que contenga a Z_L.

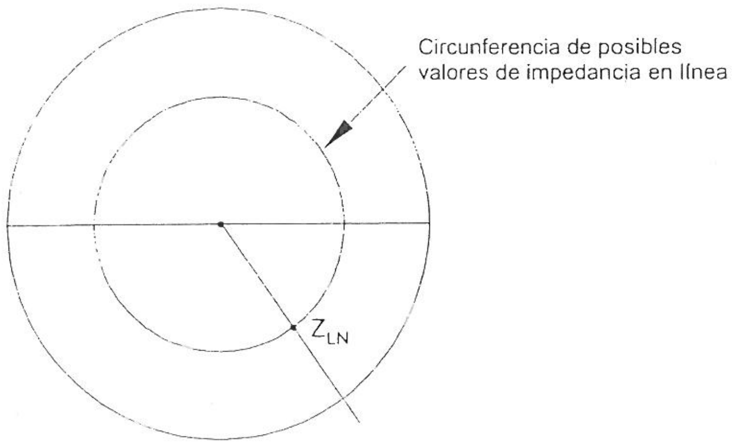


Fig. 2.7.

El valor de la impedancia de entrada a la línea se encontrará en la circunferencia de **posibles valores de impedancia en línea** y para determinarlo, bastará recorrer desde la carga los 0'323 λ de su longitud. Para ello se empleará la escala **longitudes de onda hacia el generador**.

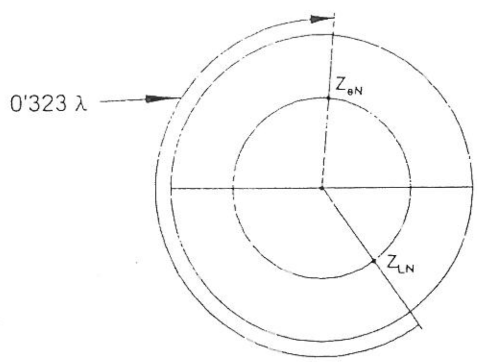


Fig. 2.8

El valor leído en el diagrama es $Z_{eN} = 0'4 + j$, con lo que, desnormalizando, se obtiene:

$$Z_e = Z_{eN}\, Z_0 = (0'4 + j)50 = 20 + 50j\ \Omega$$

2.1.3.- Diagrama de Smith para admitancias.

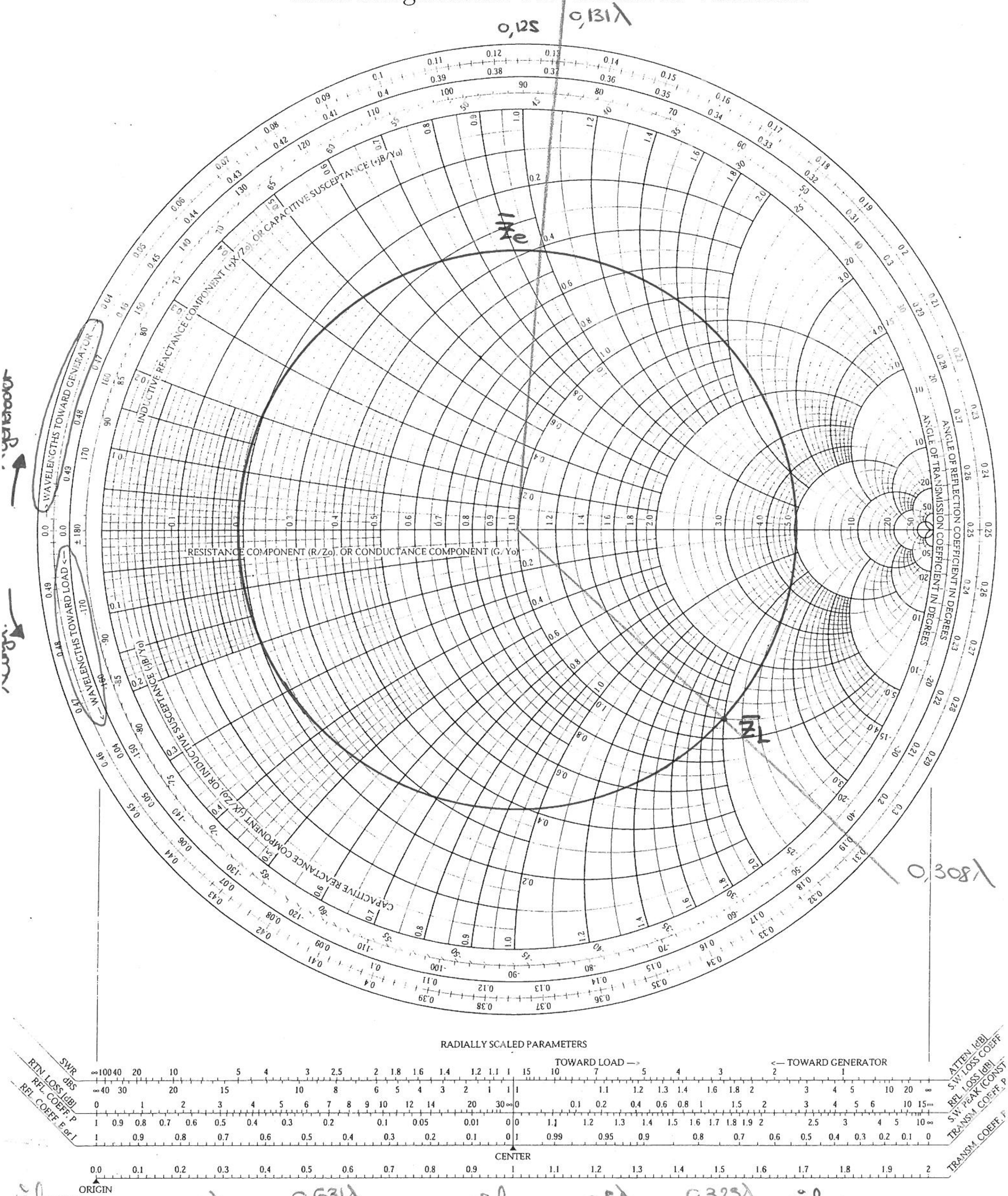
Las mismas curvas que se emplean para determinar valores de impedancia normalizada en el diagrama de Smith, se pueden emplear para trabajar con admitancias normalizadas.

Ejemplo 2.1.

λ generador → azimut generador
λ carga → azimut carga.

Carta de Smith

Electromagnetismo. Universidad de Valladolid

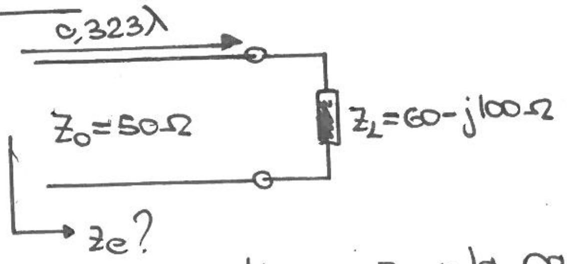


1ª forma: $0,308\lambda + 0,823\lambda = 0,631\lambda \longrightarrow 0,631\lambda - 0,5 = 0,131\lambda$

2ª forma: $0,5\lambda - 0,308\lambda = 0,192\lambda$ $\quad 0,323\lambda - 0,192\lambda = 0,131\lambda$

3ª forma: $\cancel{0,058\lambda}$ $\quad 0,058\lambda + 0,073\lambda = 1,131\lambda$

Ejemplo 2.1



En primer lugar, normalizamos Z_L y la posicionamos en la carta:

$$\overline{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_0} = 1{,}2 - 2j$$

Trazamos la circunferencia $|\rho|$=cte que pasa por $\overline{Z_L}$.

Debemos desplazarnos por esta circunferencia 0,323λ hacia generador hasta encontrar $\overline{Z_e}$.

$$\overline{Z_e} = 0{,}4 + j \longrightarrow Z_e = 20 + j50\ (\Omega)$$

La relación entre impedancia y admitancia es inversa también para valores normalizados:

$$Y_N = \frac{Y}{Y_0} = \frac{1/Z}{1/Z_0} = \frac{1}{Z/Z_0} = \frac{1}{Z_N}$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = \frac{1}{\frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}} = \frac{1-\rho(z)}{1+\rho(z)}$$

De las relaciones anteriores se observa que, efectivamente, la expresión para representar impedancias normalizadas se puede emplear para admitancias con sólo aplicarla a $-\rho(z)$ en lugar de a $\rho(z)$.

Como $-\rho(z)$ tiene el mismo módulo que $\rho(z)$, pero sus argumentos se encuentran desfasados 180°, ambos valores se encontrarán representados en el diagrama de Smith por puntos simétricos respecto del origen. Con ello, el valor de Y_N se encontrará representado en el diagrama en un punto simétrico de Z_N respecto del punto central.

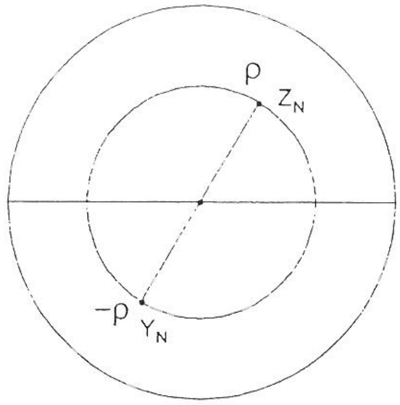


Fig. 2.9 Representación de Y a partir de Z y viceversa.

1° Parcial de clase

2.1.4.- La Relación de Onda Estacionaria, ROE, en el diagrama de Smith.

En los puntos del semieje real positivo, el argumento del coeficiente de reflexión es nulo, con lo cual:

$$\rho(\text{semieje real positvo}) = |\rho_L| e^{j0} = |\rho_L|$$

38

Por lo tanto, para los puntos del semieje real positivo, el valor de la impedancia normalizada será:

Pillada 1º Parcial

$$Z_N(\text{semieje real positivo}) = \frac{1+\rho(\text{semieje real positvo})}{1-\rho(\text{semieje real positvo})} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} \equiv \text{ROE}$$

$|\rho_L| \rightarrow$ módulo!

Con lo que la escala para medir resistencias del semieje real positivo se puede emplear como escala de medida de la relación de onda estacionaria en una línea. Una vez que se conoce la circunferencia de posibles valores de impedancia en la línea, el punto de corte con el semieje real positivo indicará el valor de ROE en la misma.

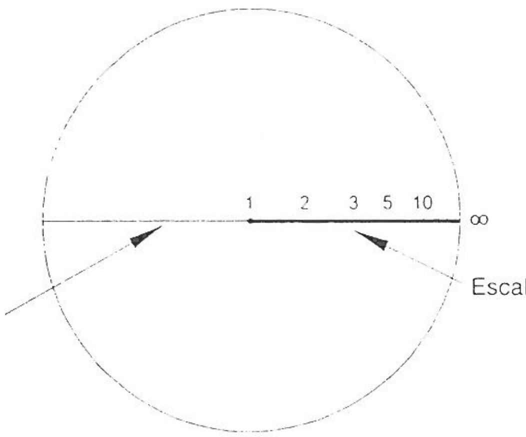


Fig. 2.10 Medida de ROE en el diagrama de Smith

En los puntos del semieje real negativo, el argumento del coeficiente de reflexión es 180°, con lo cual:

$$\rho(\text{semieje real negativo}) = |\rho_L| e^{j180^\circ} = -|\rho_L|$$

Por lo tanto, para los puntos del semieje real negativo, el valor de la impedancia normalizada será:

$$Z_N(\text{semieje real negativo}) = \frac{1+\rho(\text{semieje real negativo})}{1-\rho(\text{semieje real negativo})} = \frac{1-|\rho_L|}{1+|\rho_L|} \equiv \frac{1}{\text{ROE}}$$

Con lo cual, el semieje real negativo puede servir de escala al valor inverso de la relación de onda estacionaria.

z inductiva → encontramos máx
z capacitiva → 1º encontramos mínimo

2.1.5.- Valores máximo y mínimo de impedancia en línea.

Cuando se analizaron ondas estacionarias en el tema anterior se vio que en ciertos puntos de una línea no cargada por Z_0, aparecían máximos de tensión coincidiendo con mínimos de intensidad. En dichos puntos la línea presenta un máximo de impedancia. Para calcular este valor máximo, se emplearán las expresiones obtenidas en el apartado 1.5, resaltando que tanto el máximo de tensión como el mínimo de intensidad se encuentran en fase.

$$Z_{máx} = \frac{V_{máx}}{I_{mín}} = \frac{|V^+|[1+|\rho_L|]}{\frac{|V^+|}{Z_0}[1-|\rho_L|]} = Z_0 \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|}$$

$$Z_{máxN} = \frac{Z_{máx}}{Z_0} = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} \equiv ROE$$

De lo anterior se deduce que el valor máximo de impedancia en línea es real, coincide con ROE y se encuentra en los puntos del semieje real positivo. Asimismo, en dichos puntos se encontrará el máximo de tensión en la línea y el mínimo de intensidad.

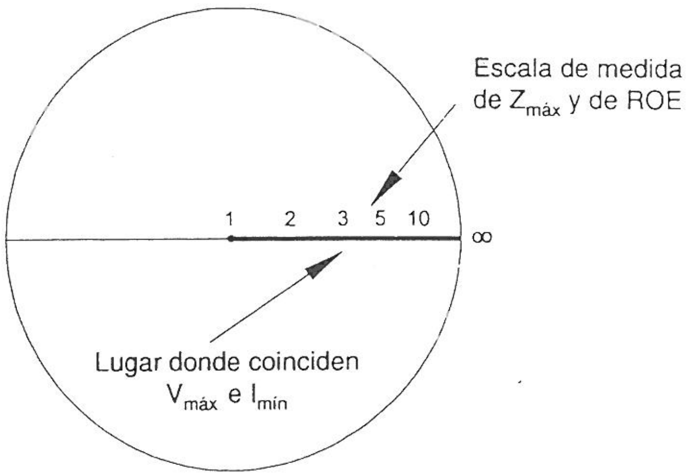


Fig. 2.11 Posición de $Z_{máx}$, $V_{máx}$ e $I_{mín}$ en el diagrama.

En los puntos de la línea donde existen mínimos de tensión, coinciden máximos de intensidad: en dichos puntos la línea presentará mínimos de impedancia.

82

$$Z_{mín} = \frac{V_{mín}}{I_{máx}} = \frac{|V^+|[1-|\rho_L|]}{\frac{|V^+|}{Z_0}[1+|\rho_L|]} = Z_0 \frac{1-|\rho_L|}{1+|\rho_L|}$$

$$Z_{mínN} = \frac{Z_{mín}}{Z_0} = \frac{1-|\rho_L|}{1+|\rho_L|} \equiv \frac{1}{ROE}$$

Se observa que los puntos del diagrama en que aparecen mínimos de impedancia en la línea coinciden con el semieje real negativo, en donde estarán, los mínimos de tensión y los máximos de intensidad.

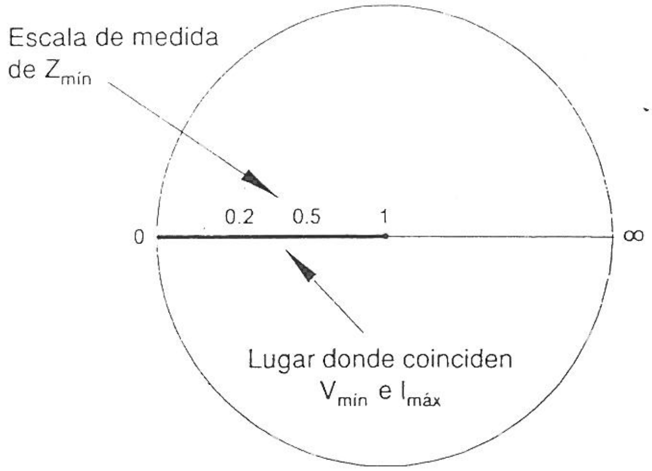


Fig. 2.12 Posición de $Z_{mín}$, $V_{mín}$ e $I_{máx}$ en el diagrama.

Ejemplo 2.2: Un generador se encuentra enviando energía a una carga a través de una línea de transmisión sin pérdidas, tal como se muestra en la fig. 2.13. El diagrama de onda estacionaria en el tramo de línea más cercano a la carga se muestra en la fig. 2.14. Se pide determinar:

1. Coeficiente de reflexión en la carga, en módulo y fase.
2. Valor de la impedancia de carga de la línea y de la admitancia de entrada a la misma.
3. Valores máximo y mínimo de impedancia en la línea.
4. Potencia disipada en la carga.
5. Módulo de la tensión en la entrada de la línea y en la carga.
6. Tensión del generador, sabiendo que $Z_g = Z_0$.

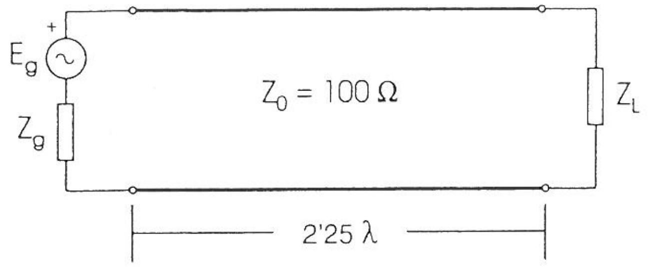


Fig. 2.13

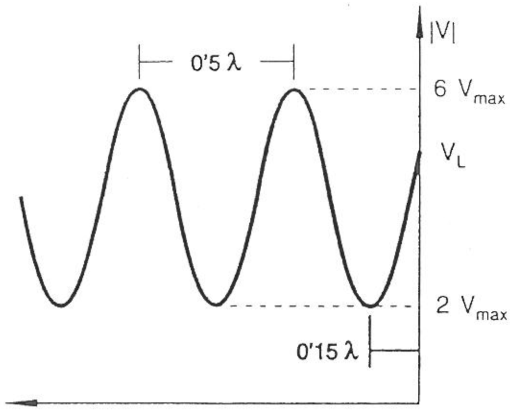


Fig. 2.14

SOLUCIÓN

1| De los datos reflejados en la figura 2.14 se puede obtener el valor de la relación de onda estacionaria:

$$ROE = \frac{|V|_{max}}{|V|_{mín}} = \frac{6}{2} = 3$$

Llevando este valor al diagrama de Smith (al semieje real positivo), se traza la circunferencia de posibles valores de impedancia y coeficiente de reflexión en la línea (circunferencia con centro en el propio centro del diagrama y radio tal que pase por el punto marcado con 3 en el semieje real positivo). Como en el diagrama de onda estacionaria se indica la existencia de un mínimo de tensión (semieje real negativo) a 0'15 λ de la carga, recorriendo la circunferencia trazada anteriormente en la dirección de la carga, desde el semieje real negativo 0'15 λ, se marca el punto correspondiente a la carga y se lee:

$$\rho_L = 0'5\underline{|-72^\circ}$$

→ Coeficiente de reflexión su fase dada en ángulos normales.

$$Z_{LN} = 0'8 - j \quad \Rightarrow \quad Z_L = Z_{LN} Z_0 = 80 - 100j\ \Omega$$

2| Para calcular la admitancia de entrada a la línea, comenzaremos por determinar el valor de la impedancia de entrada. Para ello, conocemos que la longitud de la línea es 2'25 λ. Avanzaremos sobre la circunferencia de posibles valores de impedancia en la línea desde la carga y con dirección hacia el generador 2 λ (son cuatro vueltas completas y por tanto nos encontraremos de nuevo en un valor idéntico a la carga), mas 0'25 λ (media circunferencia), obteniéndose:

$$Z_{eN} = 0'48 + 0'61j \quad \Rightarrow \quad Z_e = Z_{eN} Z_0 = 48 + 61j\ \Omega$$

$$Y_{eN} = \overset{0'8 - j}{\cancel{1 - 0'8j}} \quad \Rightarrow \quad Y_e = \frac{Y_{eN}}{Z_0} = \overset{0{,}008 - 0{,}01j}{\cancel{0{,}01 - 0{,}008j}}\ \Omega^{-1}$$

Asimismo, la circunferencia de posibles valores de impedancia en la línea corta al eje real en dos puntos: el del semieje positivo corresponde al valor de impedancia máxima y el del semieje negativo corresponde al valor de impedancia mínima. Leyendo en la carta se obtiene:

40

3

$\overline{Z_{max} = ROE}$

$$Z_{máxN} = 3 \quad \Rightarrow \quad Z_{máx} = Z_{máxN} Z_0 = 300\ \Omega$$

$$Z_{mínN} = 0'333 \quad \Rightarrow \quad Z_{mín} = Z_{mínN} Z_0 = 33'3\ \Omega$$

Como estos dos valores de impedancia son reales y del diagrama de onda estacionaria se conoce el valor de la tensión en dichos puntos, en cualquiera de ellos se puede calcular la potencia de la señal transmitida.

$$P = \frac{1}{2}\frac{|V|^2_{máx}}{Z_{máx}} = \frac{1}{2}\frac{6^2}{300} = 60\ \mathrm{mW}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{|V|^2_{mín}}{Z_{mín}} = \frac{1}{2}\frac{2^2}{33'3} = 60\ \mathrm{mW}$$

Como la línea es sin pérdidas, toda esta potencia llega a la carga, con lo cual:

$$P_L = 60\ \mathrm{mW}$$

$$P_L = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_L]\,|I_L|^2 \quad \Rightarrow \quad |I_L| = \sqrt{\frac{2P_L}{\mathrm{Re}[Z_L]}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0'06}{80}} = 0'0387\ A_{máx}$$

$$|V_L| = |I_L|\cdot|Z_L| = 0'0387\cdot|80-100j| = 4'96\ V_{máx}$$

Asimismo, la tensión en la entrada de la línea y la tensión del generador son inmediatas de calcular:

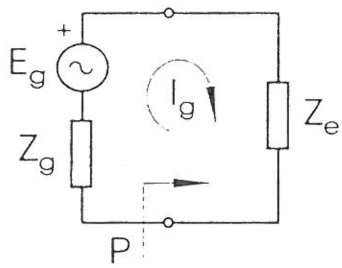


Fig. 2.15

$$|I_g| = \sqrt{\frac{2P}{\mathrm{Re}[Z_e]}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0'06}{48}} = 0'05\ A_{máx}$$

$$|V_e| = |I_g|\cdot|Z_e| = 0'05\cdot|48+61j| = 3'88\ V_{máx}$$

$$|E_g| = |I_g|\cdot|Z_g + Z_e| = 0'05\cdot|148+61j| = 8\ V_{máx}$$

Comentario Raúl

El módulo de z es para calcular una V, y la tensión cae tanto en la parte real como en la imaginaria en una impedancia.

Pero para calcular las P hay que coger la parte real.