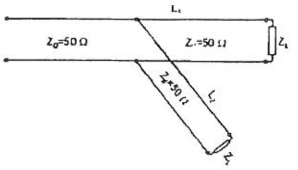
Transmisión y Propagación de Ondas I

Problema 1
Junio 2010

Se desea analizar la utilización del siguiente circuito para la adaptación de impedancias. La impedancia característica de todas las lineas de transmisión es la misma y ambas lineas de transmisión (l_1 y l_2) están terminadas con la misma impedancia característica .

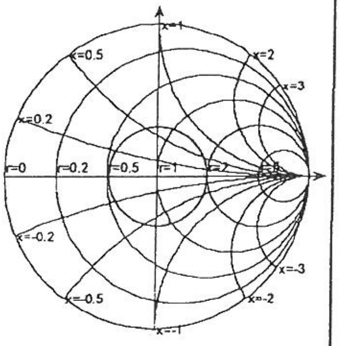


1.- Si la longitud de ambas ramas (L_1 y l_2) es la misma ($l = l_1 = l_2$) determine el conjunto de impedancias que se puede adaptar con este circuito modificando la longitud de las ramas (l,). Especifique el valor (conjunto de valores) de Z_L que se pueden adaptar cuando $l = l_1 = l_2 = \frac{\lambda}{8}$

Como ambas ramas terminan en la misma impedancia y tiene la misma longitud, la impedancia que presentan en la unión es la misma. Como están en paralelo, la impedancia que deben presentar para que haya adaptación de impedancias es

$$Z_1 = Z_2 = 2Z_0$$

Así pues, la circunferencia de *la figura representan todas las* impedancias Z_L que se pueden adaptar con esta configuración

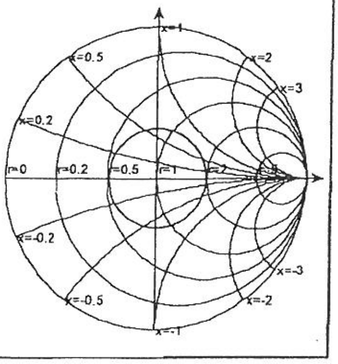


2.- Repita el apartado anterior si las ramas (l_1 y l_2) están en serie.

Como ambas ramas terminan en la misma impedancia y tiene la misma longitud, la impedancia que presentan en la unión es la misma. Como están en paralelo, la impedancia que deben presentar para que haya adaptación de impedancias es

$$Z_1 = Z_2 = \frac{Z_0}{2}$$

Así pues, la circunferencia de la figura representan todas las impedancias Z_L que se pueden adaptar con esta configuración que son las mismas que en el apartado anterior



3.- Demuestre que dos impedancias conjugadas $Z_B = Z_A^*$ se representan en el diagrama de Smith sobre la misma circunferencia de modulo de coeficiente de reflexión constante.

Es fácil comprobar que (Z_B, Z_A) presentan el mismo módulo de coeficiente de reflexión

$$Z_A = R + jX \Rightarrow \rho_A = \frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0} \Rightarrow |\rho_A| = \frac{\sqrt{(R - Z_0)^2 + X^2}}{\sqrt{(R + Z_0)^2 + X^2}}$$

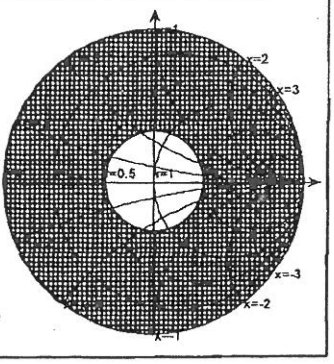
$$Z_B = R - jX \Rightarrow \rho_B = \frac{R - jX - Z_0}{R - jX + Z_0} \Rightarrow |\rho_B| = \frac{\sqrt{(R - Z_0)^2 + X^2}}{\sqrt{(R + Z_0)^2 + X^2}}$$

$\rho_A \neq \rho_B$ pero esta claro que $|\rho_A| = |\rho_B|$

4.- Si la longitud de ambas ramas (l_1 y l_2) puede ser distinta y ambas ramas vuelven a estar en paralelo, determine el conjunto de impedancias que se puede adaptar con este circuito modificando la longitud de las ramas (l_1 y L_2)

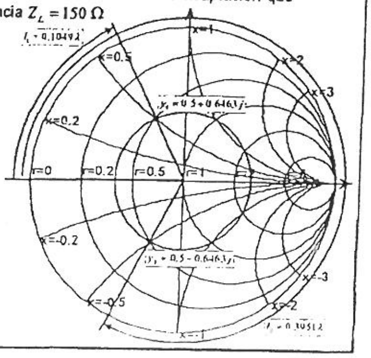
Como ambas ramas terminan en la misma impedancia, al comienzo de cada rama vamos a estar sobre la misma *circunferencia* de módulo de coeficiente de reflexión. Pero ahora no tienen porque ser ambas admitancias iguales, sino que una puede ser la conjugada de la otra (así se compensan) mientras la susceptancia es *la mitad de* Y_0

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{Y_0}{2} + jB \\ Y_2 &= \frac{Y_0}{2} jB \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y_1 + Y_2 = Y_0$$



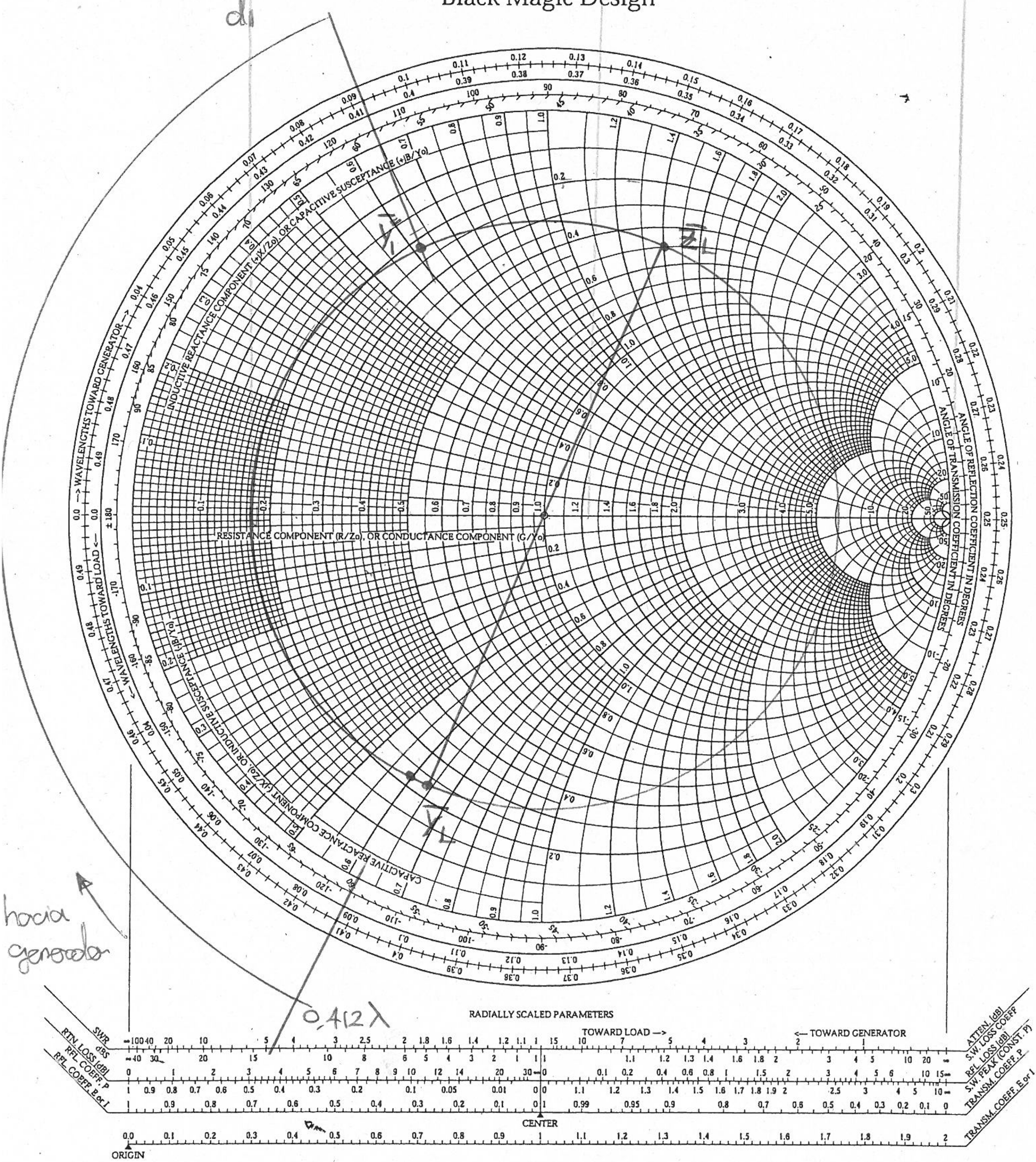
La zona oscura de la figura anterior representa las impedancias que se pueden adaptar

5.- Utilizando el circuito anterior encuentre la red de adaptación que permite adaptar la impedancia $Z_L = 150\ \Omega$



The Complete Smith Chart

Black Magic Design

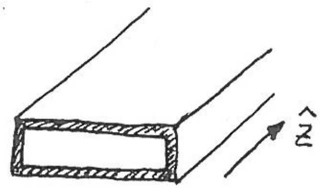


TEMA 3: Guías de onda:

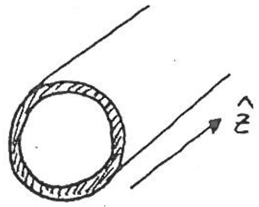
1.- INTRODUCCIÓN:

Sirven para transmitir información de un punto a otro del espacio sin que exista radiación.

Vamos a estudiar dos tipos de guías:



GUÍA RECTANGULAR



GUÍA CIRCULAR.

No confundir con las líneas de transmisión

NOTA: Al resolver las ecuaciones de Maxwell en el interior de las guías se obtienen campos de esta forma:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_t}_{\text{transversal}} + \underbrace{\vec{E}_z}_{\text{longitudinal}}$$

→ En cartesianas: $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$

→ En cilíndricas: $\vec{E} = E_\rho \hat{\rho} + E_\varphi \hat{\varphi} + E_z \hat{z}$

$$\vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z$$

→ En cartesianas: $\vec{H} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y} + H_z \cdot \hat{z}$

→ En cilíndricas: $\vec{H} = H_\rho \hat{\rho} + H_\varphi \hat{\varphi} + H_z \hat{z}$

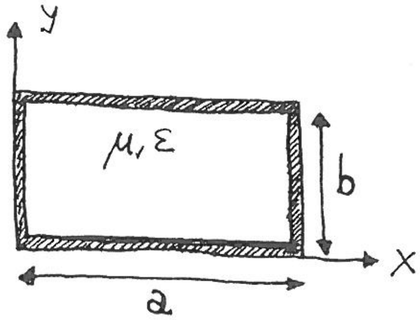
Así clasificamos todas las soluciones posibles en cuatro grupos o modos:

- Modo TEM (Transversal electromagnético): $E_z = 0 = H_z$
  Se propagan en el espacio libre o en las líneas de trx, pero NO en las guías rectangulares o circulares.
- Modos híbridos: $E_z \neq 0 \neq H_z$ → OFF
  Se propagan en fibras ópticas.
- MODOS TE (Transversales eléctricos): $E_z = 0$ pero $H_z \neq 0$.
- MODOS TM (" magnéticos): $E_z \neq 0$ pero $H_z = 0$.

Son los que entran.

2.- ESTUDIO DE GUÍAS:

2.1.- GUÍA RECTANGULAR:

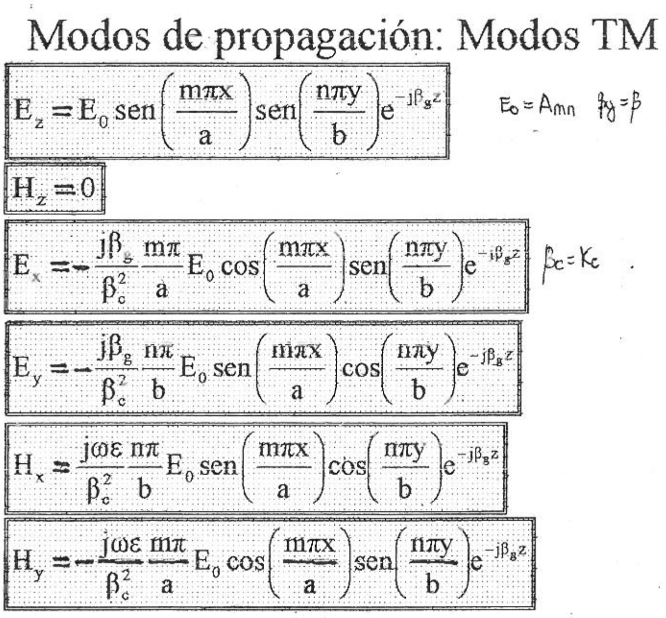


- **MODOS TM:** $(H_z = 0)$

Se resuelve la siguiente ecuación de onda, y la siguiente condición de contorno: (Helmholtz)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\overset{K_c^2}{\cancel{\beta_0^2 + \gamma^2}}) E_z = 0 \qquad y \qquad E_z \Big|_{\text{Conductora}} = 0$$

Haciéndolo obtenemos:



Modos de propagación: Modos TM

$$E_z = E_0 \,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$E_0 = A_{mn}$ $\beta_g = \beta$

$$H_z = 0$$

$$E_x = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$\beta_c = K_c$

$$E_y = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0 \,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0 \,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$TM_{m,n}$

* Nota

Modos TM empiezan en el TM_{11}

$$\vec{E_t} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$$

$$\vec{H_t} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y}$$

Campos asociados al modo $TM_{m,n}$ con: $m = 1, 2, 3, 4, ..$
$n = 1, 2, 3, 4, ..$

∴ 1er modo TM en la guía rectangular el $TM_{1,1}$

MODOS TE: $(E_z=0)$

Se resuelve la siguiente ecuación de onda, y la siguiente condición de contorno:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+(\beta_0^2+\gamma^2)\cdot H_z=0 \qquad y \qquad \left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right]_{Conductora}=0$$

n en la fórmula $\frac{\partial H_z}{\partial n}$ es la dirección normal al conductor en cuestión.

Haciéndolo obtenemos:

Modos de propagación: Modos TE

$$\boxed{E_z=0}$$

$$\boxed{H_z=H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}} \qquad H_0=B_{mn} \quad \beta_g=\beta$$

$$\boxed{E_x=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}} \qquad \beta_c=k_c$$

$$\boxed{E_y=-\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{H_x=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{H_y=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\vec{E_t}=E_x\hat{x}+E_y\hat{y}$$
$$\vec{H_t}=H_x\hat{x}+H_y\hat{y}$$

Campos asociados al modo $TE_{m,n}$ con: $m=0,1,2,3,\ldots$
$n=0,1,2,3,\ldots$

NO VÁLIDO A LA VEZ $m=0$ y $n=0$.

* Nota → el 1^{er} modo de la guía rectangular es el $TE_{1,0}$ (si $a>b$)

2.1.1.- FÓRMULAS IMPORTANTES: (para chuletario)

- $\overset{\overset{k}{=}}{\beta_0} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$; (m^{-1}) siendo $\omega = 2\pi f$ con f = FRECUENCIA DE TRABAJO
- $\overset{\overset{k_c}{=}}{\beta_c} = \omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}$; (m^{-1}) ≡ Constante de fase de corte o número de onda de corte.

  siendo: $\omega_c = 2\pi f_c$ con f_c ≡ FRECUENCIA DE CORTE DEL MODO.

f modo

- $\gamma = \sqrt{\underset{\overset{\shortparallel}{\sqrt{k_c^2 - k^2}}}{\beta_c^2 - \beta_0^2}} = 2\pi\cdot\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2 - f^2}$; (m^{-1}) ≡ CONSTANTE DE PROPAGACIÓN DEL MODO.

  Si $f > f_c \Rightarrow \boxed{\gamma = j\beta_g} = j\,\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$; (m^{-1}) siendo β_g la constante de fase del modo, que se propaga.

*Tóreles

  Si $f < f_c \Rightarrow \boxed{\gamma = \alpha} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2 - f^2}$; (Np/m) siendo α la constante de atenuación del modo, que NO se propaga.

- Además: $\overset{\overset{k_c}{=}}{\beta_c} = \sqrt{\underset{\overset{\shortparallel}{k_x^2}}{\beta_x^2} + \underset{\overset{\shortparallel}{k_y^2}}{\beta_y^2}} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = 2\pi f_c\sqrt{\mu\varepsilon}$, (m^{-1}) ∴

*Nota

Esta fórmula no es válida para la guía circular.

en el dieléctrico ó en el medio indefinido → $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_{0 = k}}$; (m) ≡ Longitud de onda en espacio libre.

$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_{c = k_c}}$; (m) ≡ " " " de corte.

$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g}$; (m) ≡ " " " guiada o del modo.

$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$ si el modo se propaga, es decir si $f > f_c$.

$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$ si " " " " , " " " " .

Al revés que la propagación de ondas

- $V_\varphi = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{V_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; (m/s) ≡ VELOCIDAD DE FASE. Siendo: $V_0 = \frac{C_0}{\sqrt{\mu_r\,\varepsilon_r}}$; (m/s)
- $V_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta_g} = V_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$; (m/s) ≡ VELOCIDAD DE GRUPO. " " " . Ó DE PROPAGACIÓN DEL MODO.
- Las guías son medios dispersivos porque la velocidad de propagación o de grupo depende de la frecuencia.

- $Z_{TM} = \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$; (Ω) ≡ Impedancia del modo TM.

  si el modo se propaga $(f > f_{c_{TM}})$ ⇒ $Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$; (Ω)

  siendo: $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$; (Ω)

  si el modo no se propaga $(f < f_{c_{TM}})$ ⇒ $Z_{TM} = \frac{\alpha}{j\omega\varepsilon} = -j\frac{\alpha}{\omega\varepsilon}$; (Ω) ∘∘ capacitiva.

- $Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$; (Ω) ≡ Impedancia del modo TE.

  si el modo se propaga $(f > f_{c_{TE}})$ ⇒ $Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; (Ω)

  siendo: $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$; (Ω)

  si el modo no se propaga $(f < f_{c_{TE}})$ ⇒ $Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\alpha}$; (Ω) ∘∘ inductiva.

2.1.2.- FRECUENCIAS DE CORTE:

$$f_{c_{TE_{m,n}}} = \frac{v_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\cdot\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} \;;\ (Hz)$$

‥ $m = 0,1,2,3\ldots$

$n = 0,1,2,3\ldots$

$m = 0 = n$ NO VÁLIDO A LA VEZ.

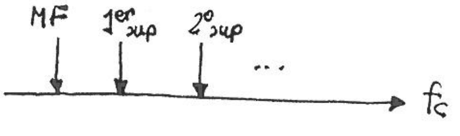
$f_{c_{TM_{m,n}}} =$ " = " ; (Hz) ‥ $m = 1,2,3,4\ldots$

$n = 1,2,3,4\ldots$

Los modos de la guía rectangular se ordenan por sus frecuencias de corte, de la más baja en adelante:

MODO FUNDAMENTAL O DOMINANTE ≡ El que tiene la frecuencia de corte más baja.
(Si a>b es el TE_{10})

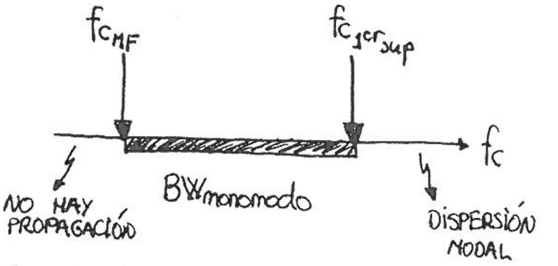
1^{er} modo superior.
2^{o} modo superior.
3^{er} " " .
⋮



COMENTARIOS IMPORTANTES:

- ANCHO DE BANDA MONOMODO ≡ Margen de frecuencias en las que sólo se propaga el modo fundamental. (ES EL OBJETIVO)

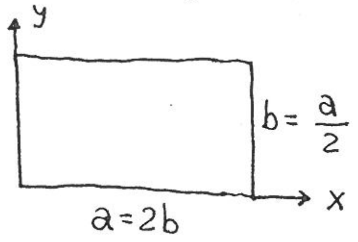
$$\boxed{BW_{monomodo} = fc_{1er_{sup}} - fc_{MF}}$$



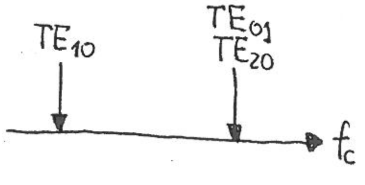
- Si $f > fc$ ⇒ El modo se propaga. $(\gamma = j\beta_g)$
  Si $f < fc$ ⇒ " " NO se propaga o está al corte $(\gamma = \alpha)$. SE ATENÚA RAPIDAMENTE.

- Si dos modos tienen la misma frecuencia de corte se dice que estos modos son degenerados (Todo modo TM tiene un TE degenerado.)

- Se llama guía óptima a aquella en la que $a = 2b$:



- Máximo ancho de banda monomodo posible, reduciendo la atenuación de los conductores y aumentando la potencia transmitida por el TE_{10}.



$$fc_{MF} = fc_{TE_{10}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot a}$$

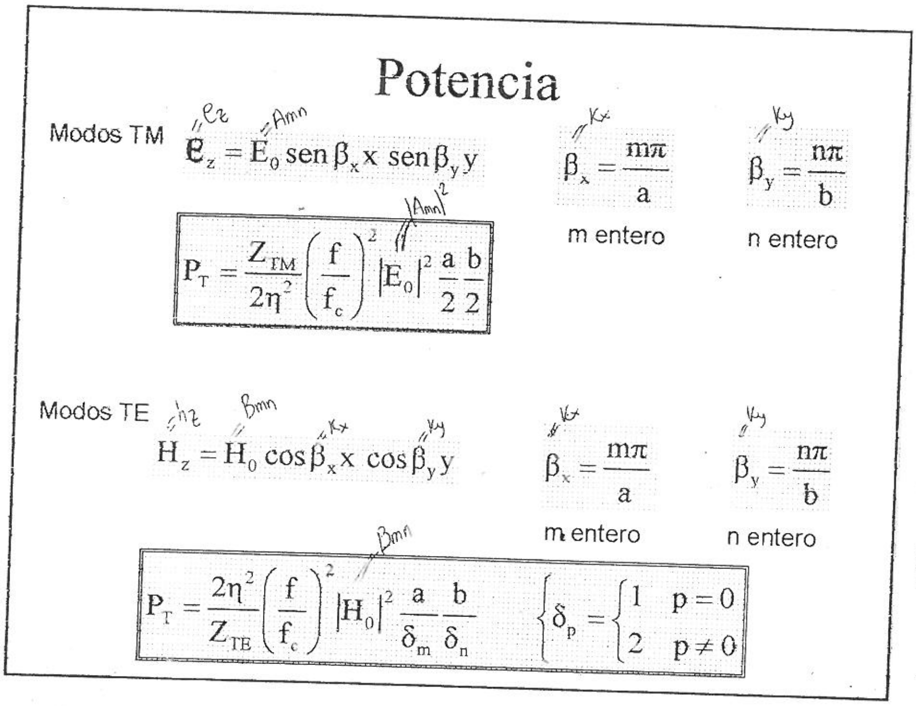
$$fc_{1er_{sup}} = fc_{TE_{20}} = fc_{TE_{01}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot a} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot b}$$

- Se cumple que:

$$fc_{TE_{m,0}} = m \cdot fc_{TE_{10}}$$

$$fc_{TE_{0,n}} = n \cdot fc_{TE_{01}}$$

2.1.3.- POTENCIA TRANSMITIDA SI LA GUÍA NO TIENE PÉRDIDAS:



Potencia

Modos TM

$$\overset{e_z}{e_z} = \overset{A_{mn}}{E_0} \operatorname{sen} \beta_x x \operatorname{sen} \beta_y y \qquad \overset{K_x}{\beta_x} = \frac{m\pi}{a} \qquad \overset{K_y}{\beta_y} = \frac{n\pi}{b}$$

m entero   n entero

$$\boxed{P_T = \frac{Z_{TM}}{2\eta^2}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \overset{|A_{mn}|^2}{|E_0|^2} \frac{a}{2}\frac{b}{2}}$$

Modos TE

$$\overset{h_z}{H_z} = \overset{B_{mn}}{H_0} \cos \overset{K_x}{\beta_x} x \cos \overset{K_y}{\beta_y} y \qquad \overset{K_x}{\beta_x} = \frac{m\pi}{a} \qquad \overset{K_y}{\beta_y} = \frac{n\pi}{b}$$

m entero   n entero

$$\boxed{P_T = \frac{2\eta^2}{Z_{TE}}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 \overset{B_{mn}}{|H_0|^2} \frac{a}{\delta_m}\frac{b}{\delta_n} \qquad \left\{\delta_p = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 2 & p \neq 0 \end{cases}\right.}$$

usar esta expresión

La fórmula de partida para el cálculo de P_T es:

$$P_T = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right] \vec{dS}$$

NOTA: Estas fórmulas de P_T sólo son válidas si $f > f_c$, ya que de lo contrario el modo no se propaga.

Además estas fórmulas vienen multiplicadas por "$e^{-2\alpha_c z} \cdot e^{-2\alpha_d z}$" si hay pérdidas en los conductores ($\alpha_c \neq 0$) y en el dieléctrico ($\alpha_d \neq 0$) respectivamente.

2.1.4.- ATENUACIÓN:

● PÉRDIDAS DEBIDAS AL DIELÉCTRICO:

Si el dieléctrico tiene $\sigma_D \neq 0$ entonces: $\varepsilon_c = \varepsilon_r \varepsilon_0 - j\frac{\sigma_D}{\omega} = \varepsilon - j\frac{\sigma_D}{\omega}$

$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$

no confundir con profundidad penetración $\xrightarrow{}$ $\operatorname{tg}\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma_D}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0}$

Si el dieléctrico tiene bajas pérdidas: $\operatorname{tg}\delta \ll 1$ ó $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ ó $\frac{\sigma_D}{\omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \ll 1$

llegamos a:

$$\boxed{\alpha_d \approx \frac{\overset{K}{\cancel{\beta_0}}\left(\varepsilon''/\varepsilon'\right)}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{1}{2}\overset{K}{\cancel{\beta_0}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}} \quad (Np/m)$$

$\therefore \beta_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c_0}$;(m^{-1})

NOTA: Las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ cuando hay pérdidas en el dieléctrico vienen multiplicadas por $e^{-\alpha_d \cdot z}$, y las de P_T por $e^{-2\alpha_d z}$.

● PÉRDIDAS DEBIDAS A LOS CONDUCTORES:

Si los conductores no son perfectos ($\sigma \neq \infty$) generan una constante de atenuación (α_c) dada por:

Modos TM:

$$\boxed{\alpha_c = \frac{2R_s}{ab\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\frac{m^2b^3+n^2a^3}{(mb)^2+(na)^2}}$$

Modos TE:

$$\boxed{\alpha_c = \frac{2R_s}{b\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\left\{\left(\delta_m+\delta_n\frac{b}{a}\right)\left(\frac{f_c}{f}\right)^2+\frac{b}{a}\left[1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]\left[\frac{m^2ab+(na)^2}{(mb)^2+(na)^2}\right]\right\}}$$

$$\boxed{\delta_p = \begin{cases} 2 & p=0 \\ 1 & p\neq 0 \end{cases}}$$

siendo:

$R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$;(Ω) la resistencia superficial del conductor.

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$;(Ω) la impedancia del dieléctrico.

NOTA: Misma nota que la anterior pero con $e^{-\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_c z}$.

Estas α_c están calculadas en (Np/m) y sabemos que 1Np = 8'7 dB.

modo que más aparece

2.1.5.- CASO PARTICULAR: (Guía rectangular con a>b ⟺ MODO FUNDAMENTAL TE_{10})

Si a>b el modo fundamental es el TE_{10} del que sabemos que:

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_{g_{10}}\cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\beta_{g_{10}}}{\beta_{c_{10}}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z}$$

$$H_y = 0$$

$$E_x = 0$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{c_{10}}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z}$$

" llamamos $\boxed{|E_{0y}|} = \left|\frac{-j\omega\mu}{\beta_{c_{10}}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\right| = \boxed{\frac{\omega\mu\cdot a}{\pi}|H_0|}$ (V/m)

CAMPO ELÉCTRICO MÁXIMO DEL MODO TE_{10}.

siendo: $\beta_{c_{10}} = \frac{\pi}{a}$; $\beta_{g_{10}} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f}\right)^2}$;

Por otro lado:

$$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot a} \; ; (H_z)$$

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \; ; (\Omega)$$

$$P_T(TE_{10}) = \frac{|E_{0y}|^2}{4\cdot Z_{TE_{10}}}\cdot a\cdot b \; ; (W)$$ ≡ POTENCIA TRANSMITIDA POR EL MODO TE_{10}.

$$\alpha_{c_{TE_{10}}} = \frac{R_s}{b\cdot\eta}\cdot\frac{\left[1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2\right]}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2}} \; ; (Np/m)$$

Si aumenta b disminuye $\alpha_{c_{TE_{10}}}$ ⇒ guía óptima a=2b.

$$\alpha_{d_{TE_{10}}} = \frac{1}{2}\beta_0\cdot\frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \; ; (Np/m)$$

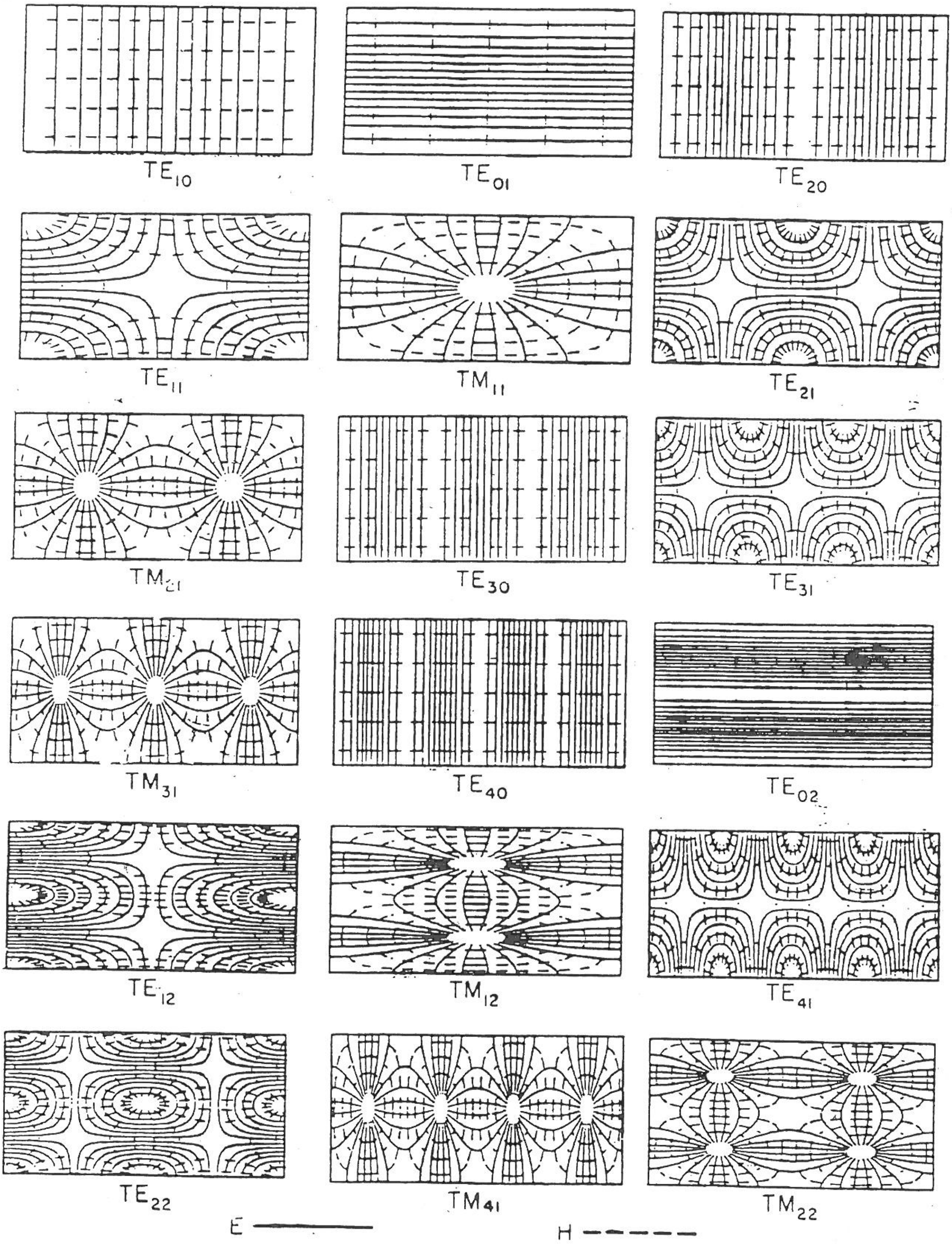
¿Modo TE ó TM?

Observando las líneas de $|\vec{H}|$ (- - - - -) vemos que se cierra en la sección transversal → $H_z = 0$

→ Modo TM

'' '' $\vec{E}$ (———) vemos que no se cierra en la sección transversal

→ $H_z \neq 0$ → modo TE



TE$_{10}$ TE$_{01}$ TE$_{20}$

TE$_{11}$ TM$_{11}$ TE$_{21}$

TM$_{21}$ TE$_{30}$ TE$_{31}$

TM$_{31}$ TE$_{40}$ TE$_{02}$

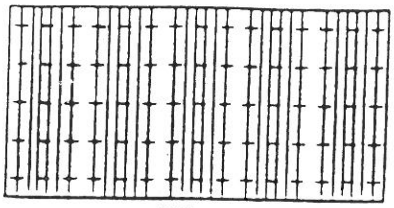
TE$_{12}$ TM$_{12}$ TE$_{41}$

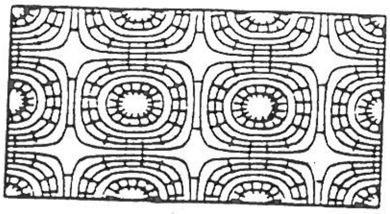
TE$_{22}$ TM$_{41}$ TM$_{22}$

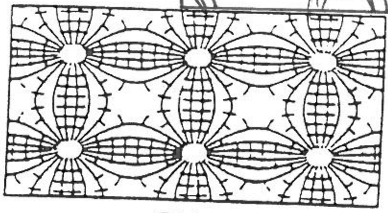
'' Si no veo claro que se cierran → son TE m = número de veces que se repite en x el mismo dibujo.

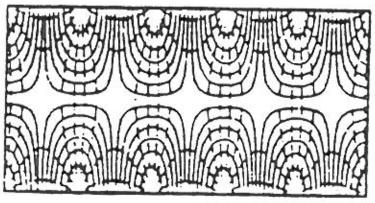
n = // // // y // ---

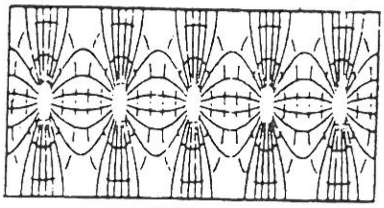
* Se va repitiendo el mismo dibujo.

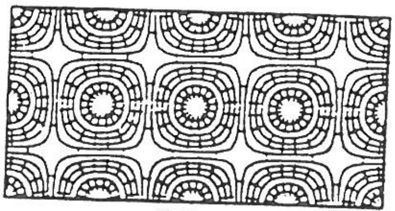

TE_{50}

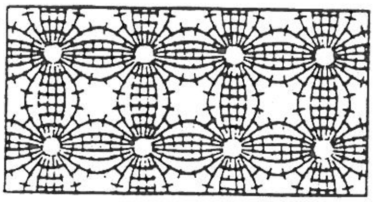

TE_{32}

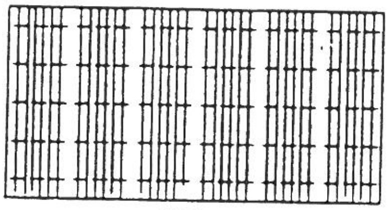

TM_{32}

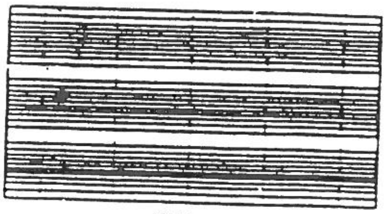

TE_{51}

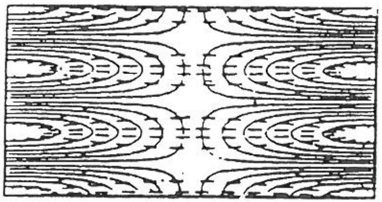

TM_{51}

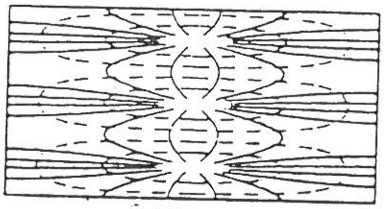

TE_{42}

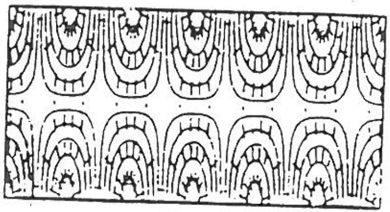

TM_{42}

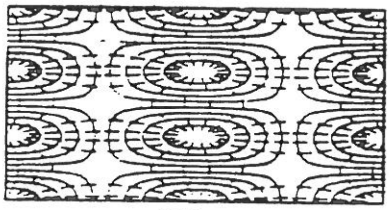

TE_{60}

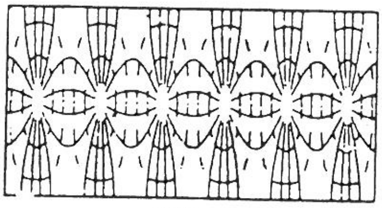

TE_{03}

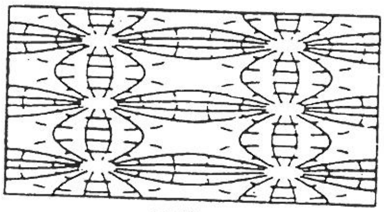

TE_{13}

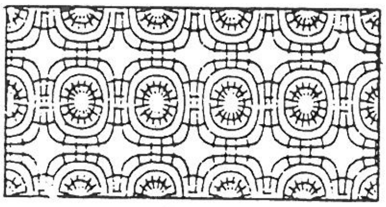

TM_{13}

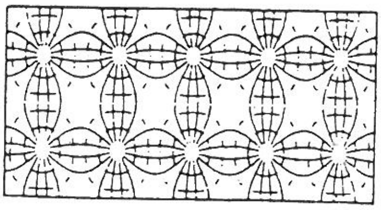

TE_{61}

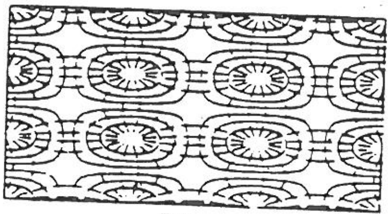

TE_{23}


TM_{61}


TM_{23}

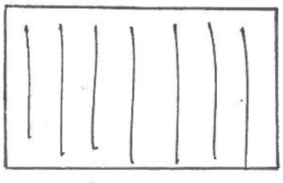

TE_{52}

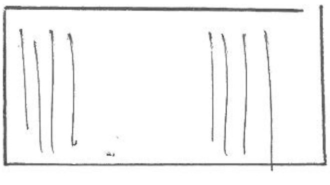

TM_{62}

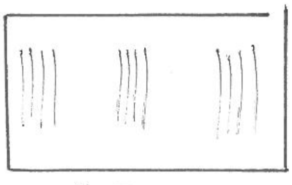

TE_{33}

E ———— H - - - -

Para distinguir:

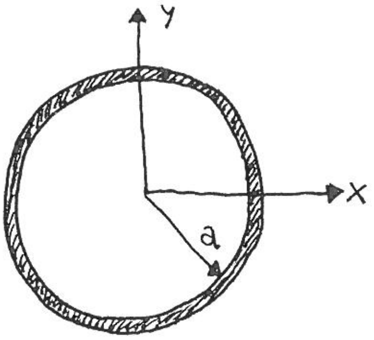

TE_{10}




TE_{30}

huecos en blanco marcan el número

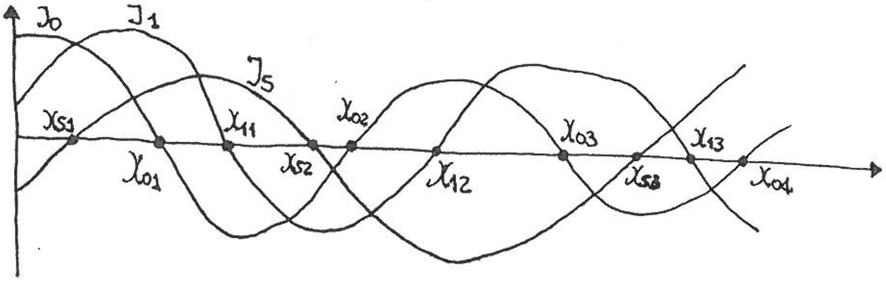
2.2.- GUÍA CIRCULAR:



NOTA TEÓRICA: "FUNCIONES DE BESSEL"

- J_m ≡ Función de Bessel de 1ª especie y orden m. $(m=0,1,2,3\ldots)$

Son funciones oscilantes:



Por tanto: $\boxed{\chi_{mn} \equiv n\text{-ésimo cero de } J_m}$

Estos ceros están tabulados:

m \ n	1	2	3
0	**2'405**	5'52	8'654
1	3'832	7'016	10'174
2	5'135	8'417	11'62

χ_{mn}

- J'_m ≡ Derivada de la función de Bessel de 1ª especie y orden m. $(m=0,1,2,3,\ldots)$

Análogamente son funciones oscilantes y sus ceros (χ'_{mn}) también están tabulados:

$\boxed{\chi'_{mn} \equiv n\text{-ésimo cero de } J'_m}$

m \ n	1	2	3
0	3'832	7'016	10'174
1	**1'841**	5'331	8'536
2	3'054	6'706	9'970

χ'_{mn}

FIN NOTA TEÓRICA.

● MODOS TM : $(H_z = 0)$

Se resuelve la siguiente ecuación de onda $\overset{= \text{Helmholtz}}{}$, y la siguiente condición de contorno:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \overset{k_c^2}{\cancel{(\beta_0^2+\gamma^2)}}E_z = 0 \quad y \quad E_z\Big]_{\rho=a} = 0$$

Haciéndolo obtenemos:

Modos de propagación: Modos TM

$$\boxed{E_z(\rho,\varphi) = J_m(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}} \quad \beta_g=\beta \qquad \overset{k_c}{\overset{/\!/}{\beta_c}} = \frac{\chi_{mn}}{a}$$

$$\boxed{H_z = 0}$$

$$\boxed{E_\rho = -\frac{j\beta_g}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}} \qquad J'_m(x) = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x} \qquad \vec{E_t} = E_\rho\cdot\hat{\rho} + E_\varphi\cdot\hat{\varphi}$$

$$\boxed{E_\varphi = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}} \qquad \vec{H_t} = H_\rho\cdot\hat{\rho} + H_\varphi\cdot\hat{\varphi}$$

$$\boxed{H_\rho = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\text{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\text{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

Campos asociados al modo $TM_{m,n}$ con: $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Observamos que: $\overset{k_c}{\overset{/\!/}{\beta_c}} = \frac{\chi_{mn}}{a} \Rightarrow 2\pi f_c\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\chi_{mn}}{a} \Rightarrow$ Despejando:

$$\boxed{f_{c_{TM_{mn}}} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\cdot\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

De la tabla de χ_{mn} observamos que el modo TM_{mn} que va a tener la frecuencia de corte más baja es el TM_{01}: $f_{c_{TM_{01}}} = \frac{2'405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

<u>NOTA</u>: El modo TM_{01}, y en general todos los modos con $m=0$, tienen la característica de que sus campos <u>NO</u> dependen de la coordenada φ.

● MODOS TE : $(E_z = 0)$

Se resuelve la siguiente ecuación de onda y la siguiente condición de contorno:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \overset{k_c^2}{\cancel{(\beta_0^2 + \gamma^2)}}\cdot H_z = 0 \quad y \quad \left.\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

Haciéndolo obtenemos:

Modos de propagación: Modos TE

$$\boxed{E_z = 0}$$

$$\boxed{H_z(\rho,\varphi) = J_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{E_\rho = -\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{E_\varphi = \frac{j\omega\mu}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{H_\rho = -\frac{j\beta_g}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi + B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\boxed{H_\varphi = -\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi - B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}}$$

$$\beta_c = \frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$J'_m(x) \equiv \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

$$\vec{E}_t = E_\rho\cdot\hat{\rho} + E_\varphi\cdot\hat{\varphi}$$

$$\vec{H}_t = H_\rho\cdot\hat{\rho} + H_\varphi\cdot\hat{\varphi}$$

Campos asociados al modo TEmn con: $m = 0, 1, 2, 3, ..$
$n = 1, 2, 3, 4, ...$

Observamos que: $\beta_c = \frac{\chi'_{mn}}{a} \Rightarrow 2\pi f_c\cdot\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\chi'_{mn}}{a} \Rightarrow$ Despejando:

$$\boxed{f_{c_{TE_{mn}}} = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

De la tabla de χ'_{mn} observamos que el modo TEmn que va a tener la frecuencia de corte más baja es el TE_{11}: $\boxed{f_{c_{TE_{11}}} = \frac{1'841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}}$

NOTA: El TE_{11} siempre es el modo fundamental de la guía circular.

Tablas de Bessel al chuletario ⟶ no las dan

2.2.1.- FÓRMULAS IMPORTANTES:

Son las mismas que las del punto 2.1.1. excepto una de las fórmulas que NO vale para guía circular.

2.2.2.- FRECUENCIAS DE CORTE:

$$f_{c_{TE_{mn}}} = \frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad y \quad f_{c_{TM_{mn}}} = \frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Como en la guía circular las fc de los distintos modos vienen de χ'_{mn} y χ_{mn}, y estas están tabuladas siempre ocurre que:

MODO FUNDAMENTAL : TE_{11} ; $f_{c_{TE_{11}}} = \dfrac{1'841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

1^{er} MODO SUPERIOR : TM_{01} ; $f_{c_{TM_{01}}} = \dfrac{2'405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\boxed{BW_{monomodo} = \frac{2'405-1'841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{0'564}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

y además: $\boxed{\dfrac{f_{c_{TM_{01}}}}{f_{c_{TE_{11}}}} = \dfrac{2'405}{1'841} = \boxed{1'3}}$

Ancho de banda relativo menor que la guía rectangular óptima. (a=2b)

NOTA: Además sabemos que los modos TE_{0n} y TM_{1n} siempre tienen la misma frecuencia de corte. (Modos degenerados)

2.2.3.- POTENCIA TRANSMITIDA SI LA GUÍA NO TIENE PÉRDIDAS:

$$\boxed{P_T} = \iint_S \frac{1}{2} \,\mathrm{Re}\left[\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right] \cdot \vec{dS} = \boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{Re} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*\right) \cdot \rho \, d\rho \, d\phi \cdot \hat{z}} \; (W)$$

NOTA: Esta fórmula sólo es válida si el modo se propaga ($f > f_c$) y además si hay pérdidas en los conductores y el dieléctrico viene multiplicada respectivamente por $e^{-2\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z}$.

2.2.4.- ATENUACIÓN:

- **PÉRDIDAS DEBIDAS AL DIELÉCTRICO:**

  Exactamente igual que en guía rectangular.

- **PÉRDIDAS DEBIDAS A LOS CONDUCTORES:**

  Ahora las fórmulas de α_c son:

Modos TM:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Modos TE:

$$\alpha_c = \frac{2R_s}{a\eta\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \left\{ \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{(\chi'_{mn})^2 - m^2} \right\}$$

siendo:

$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$; (Ω) la resistencia superficial del conductor.

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, (Ω) la impedancia del dieléctrico.

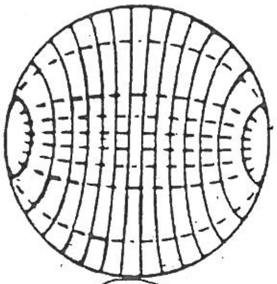
Calculados en (Np/m). Sabemos que 1Np = 8'7dB

NOTA: Cuando hay pérdidas, las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ anteriores, así como la potencia P_T, vienen multiplicadas por $e^{-\alpha_d z} \cdot e^{-\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z} \cdot e^{-2\alpha_c z}$ respectivamente.

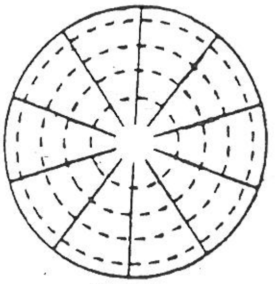
Están ordenados

¿Modo TE ó TM?

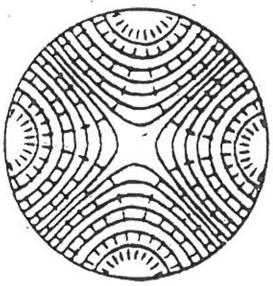
$$m = \frac{\text{nº de veces dibujo radial}}{2}$$



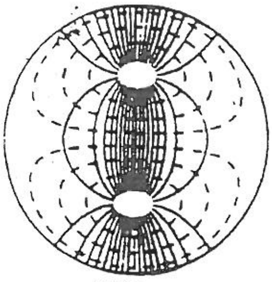
TE$_{11}$



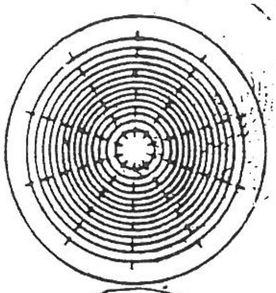
TM$_{01}$



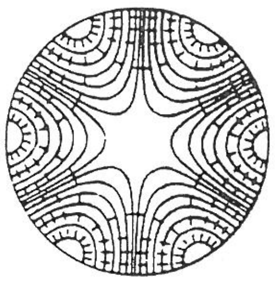
TE$_{21}$



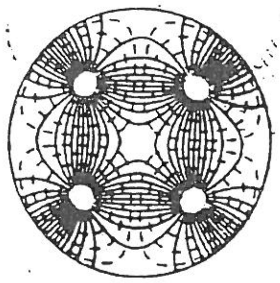
TM$_{11}$



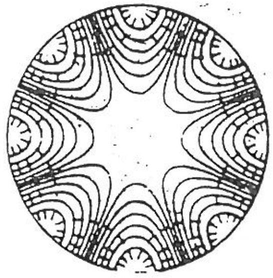
TE$_{01}$



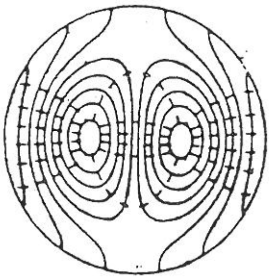
TE$_{31}$



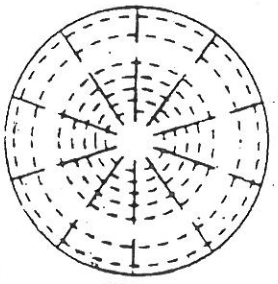
TM$_{21}$



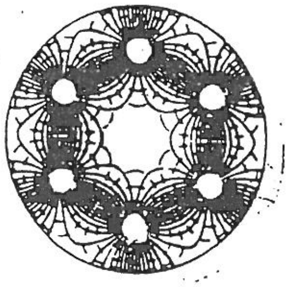
TE$_{41}$



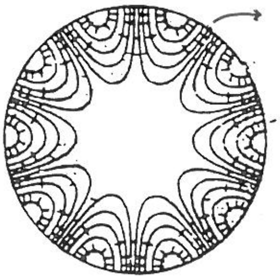
TE$_{12}$



TM$_{02}$

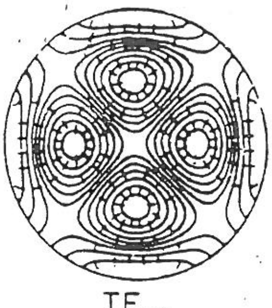


TM$_{31}$

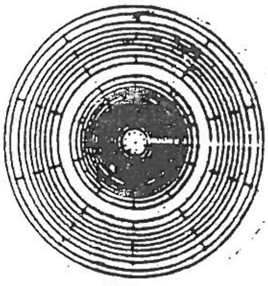


TE$_{51}$

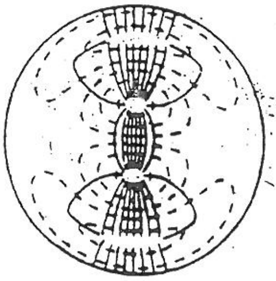
→ 5 =



TE$_{22}$

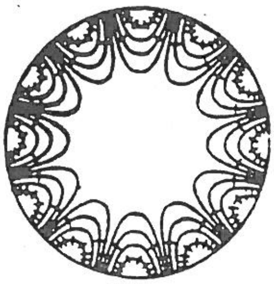


TE$_{02}$

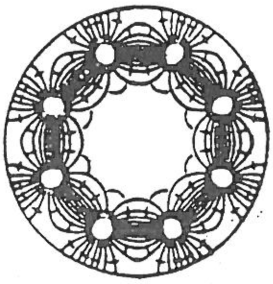


TM$_{12}$

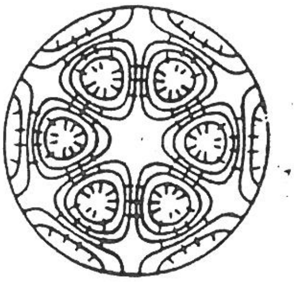
E ———— H - - - - -



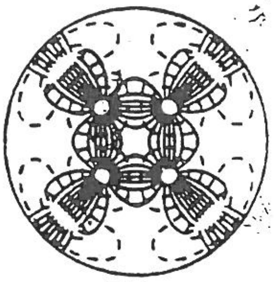
TE_{61}



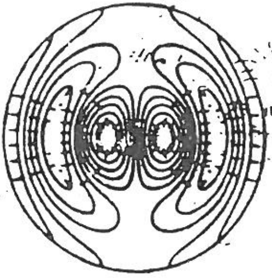
TM_{41}



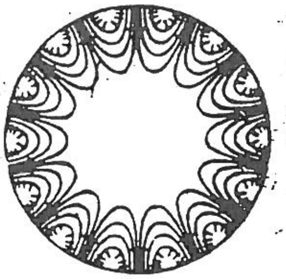
TE_{32}



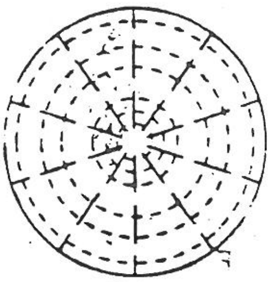
TM_{22}



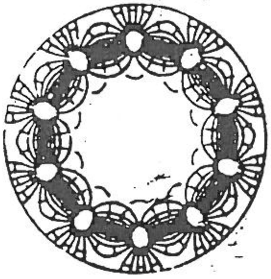
TE_{13}



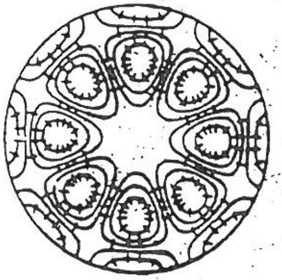
TE_{71}



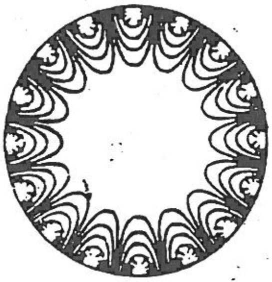
TM_{03}



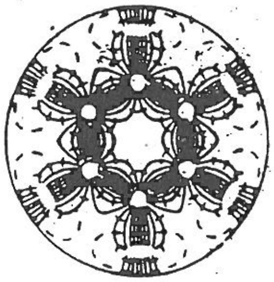
TM_{51}



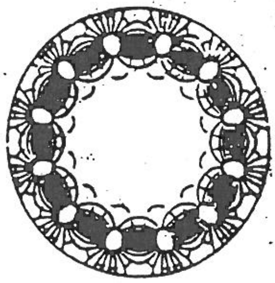
TE_{42}



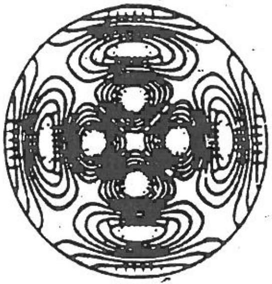
TE_{81}



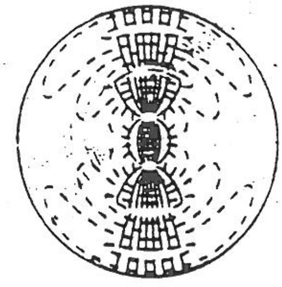
TM_{32}



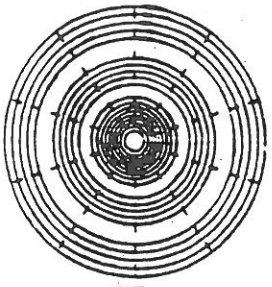
TM_{61}



TE^{2}_{23}



TM_{13}



TE_{03}

E ——— H - - - -

• TPO - Guía Ondas.

• Modos TE : $E_z=0$; $H_z\neq 0$ • Modos TM: $E_z\neq 0$; $H_z=0$

Guía Rectangular -

Modos $TM_{m,n}$ → Desde TM_{11}

$$E_z=E_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$H_z=0$

$$E_x=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_y=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_x=\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_y=-\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

- No válido a la vez $m=0$; $n=0$

• Modos $TE_{m,n}$ - El 1º modo de la guía rectangular

$E_z=0$

$$H_z=H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_x=\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_y=-\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_x=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_y=\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{n\pi}{b}H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{-j\beta_g z}$$

Fórmulas Importantes -

β → cte de fase ó número de onda ; V_f → velocidad de fase

γ → cte de propagación del modo ; V_g → velocidad de grupo ó propagación del modo

λ → longitud de onda

$\beta_0=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$; $\omega=2\pi f$ → con frecuencia de trabajo

$\beta_c=\omega_c\sqrt{\mu\varepsilon}$; $\omega_c=2\pi f_c$ → con frecuencia de corte

$\gamma=\sqrt{\beta_c^2-\beta_0^2}=2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2-f^2}$

- Si $f>f_c$ → $\gamma=j\beta_g=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-(f_c/f)^2}$ $[m^{-1}]$
- Si $f<f_c$ → $\gamma=\alpha=2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^2-f^2}$ $[Npm^{-1}]$

además: $\underbrace{}_{}$ no vale para guía circular.

$\beta_c=\sqrt{\beta_x^2+\beta_y^2}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}=2\pi f_c\sqrt{\mu\varepsilon}$ $[m^{-1}]$;

$\lambda_0=\frac{2\pi}{\beta_0}$ [m] $\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta_g}$ [m] $=\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$

$\lambda_c=\frac{2\pi}{\beta_c}$ [m] $\frac{1}{\lambda_0^2}=\frac{1}{\lambda_g^2}+\frac{1}{\lambda_c^2}$

$V_f=\frac{\omega}{\beta_g}=\frac{V_0}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ $[ms^{-1}]$. siendo $V_0=\frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$ $[ms^{-1}]$

$V_g=\frac{\partial\omega}{\partial\beta_g}=V_0\cdot\sqrt{1-(f_c/f)^2}$ $[ms^{-1}]$

$\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ $[\Omega]$

- Si el modo se propaga $(f>f_{cTM})$ → $Z_{TM}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$ $[\Omega]$

Impedancia del modo TM: $Z_{TM}=\frac{\gamma}{j\omega\varepsilon}$ $[\Omega]$ - Si el modo no se propaga $(f<f_{cTM})$ → $Z_{TM}=\frac{\alpha}{j\omega\varepsilon}\xrightarrow{\text{capacitiva}}=\frac{-j\alpha}{\omega\varepsilon}$ $[\Omega]$

Impedancia del modo TE $=Z_{TE}=\frac{j\omega\mu}{\gamma}$ $[\Omega]$ $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ $[\Omega]$

- Si el modo se propaga $(f>f_{cTE})$: $Z_{TE}=\frac{\eta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$ $[\Omega]$ ← inductiva
- Si el modo no se propaga $(f<f_{cTE})$: $Z_{TE}=\frac{j\omega\mu}{\alpha}$ $[\Omega]$

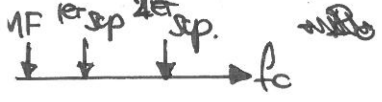
Frecuencias de corte -

$TE\begin{cases}m=0,1,2,3\ldots\\ n=0,1,2,3\ldots\end{cases}$ $m=0=n$ no válido a la vez

$$f_{cTE_{m,n}}=f_{cTM_{m,n}}=\frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}=\frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\ Hz$$

$TM\begin{cases}m=1,2,3,\ldots\\ n=1,2,3\ldots\end{cases}$

Los modos de la guía rectangular se ordenan por sus frecuencias de corte, de la más baja en adelante.



- Potencia transmitida si la guía no tiene pérdidas-

La fórmula de partida es: $P_T=\iint_S \frac{1}{2} R_e\left[\overrightarrow{E_t} \times \overrightarrow{H_t^*}\right]\overrightarrow{ds}$

Estas fórmulas de P_T sólo si $f>f_c$

Modos TM:

$$P_T=\frac{Z_{TM}}{2\eta^2}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2|E_0|^2\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}$$

Si hay pérdidas en los conductores $\rightarrow \alpha_c \neq 0$

" " " " " " dieléctrico $\rightarrow \alpha_d \neq 0$

odos TE:

$$P_T=\frac{2\eta^2}{Z_{TE}}\left(\frac{f}{f_c}\right)^2|H_0|^2\frac{a}{\delta_m}\cdot\frac{b}{\delta_n}\left\{\delta_p=\begin{cases}1 & p=0\\ 2 & p\neq 0\end{cases}\right.$$

$$\varepsilon_c=\varepsilon_r\varepsilon_0-j\frac{\sigma_0}{\omega}=\varepsilon-j\frac{\sigma_0}{\omega}$$

- Atenuación-

Pérdidas debidas al dieléctrico: Si en el dieléctrico $\sigma_0\neq 0$, entonces: $\varepsilon_c=\varepsilon'-j\varepsilon''$

Si el dieléctrico tiene bajas pérdidas: $tg\,\delta<<1$ ó $\varepsilon''<<\varepsilon'$ ó $\frac{\sigma_0}{\omega\varepsilon}<<1$ $\quad tg\,\delta=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}=\frac{\sigma_0}{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}$

$$\alpha_d=\frac{\beta_0(\varepsilon''/\varepsilon')}{2\sqrt{1-(f_c/f)^2}}=\frac{1}{2}\beta_0\frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\ [Np\,m^{-1}]\ ;\ \beta_0=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{2\pi f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c_0}\ [m^{-1}]$$

* Las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ cuando hay pérdidas en el dieléctrico vienen multiplicadas por $e^{-\alpha_d z}$ y las de P_T por $e^{-2\alpha_d z}$.

Pérdidas debidas a los conductores.

Si los conductores no son perfectos:

$$\underbrace{R_s}_{\text{Resistencia Superficial del conductor.}}=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\ [\Omega] \qquad \underbrace{\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\text{Impedancia del dieléctrico}}\ [\Omega]$$

Modos TM:

$$\alpha_c=\frac{2R_s}{ab\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}\cdot\frac{m^2b^3+n^2a^3}{(mb)^2+(na)^2}$$

*Misma nota que la anterior pero con $e^{-\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_c z}$.

$\alpha_c\rightarrow[Np\,m^{-1}]$

$1Np=8{,}7dB$

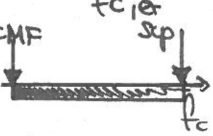
odos TE:

$$\alpha_c=\frac{2R_s}{b\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\left[\left(\delta_m+\delta_n\frac{b}{a}\right)\left(\frac{f_c}{f}\right)^2+\frac{b}{a}\left[1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right]\frac{m^2ab+(na)^2}{(mb)^2+(na)^2}\right]$$

$$\delta_p=\begin{cases}2 & \text{si } p=0\\ 1 & \text{si } p\neq 0\end{cases}$$

Notas-

Ancho de banda monomodo: Margen de frecuencias en las que sólo se propaga el fundamental.



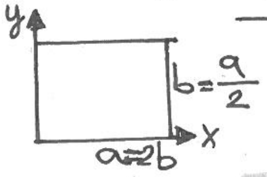
$BW_{monomodo}=f_{c\,1er\,sup}-f_{cMF}$

- Si dos modos tienen la misma f_c son modos degenerados.

si $f>f_c\rightarrow$ el modo se propaga ($\gamma=j\beta_g$)

si $f<f_c\rightarrow$ el modo no se propaga ó está al corte ($\gamma=\alpha$) $\underbrace{\text{Se atenúa}}$

Se llama guía óptima a aquella en la que $a=2b$:



$\rightarrow$ Máximo ancho de banda monomodo posible, reduciendo la atenuación de los conductores y aumentando la potencia tx por el TE_{10}.

- Caso Particular- (Guía rectangular con $a>b\longrightarrow$ modo Fundamental TE_{10})

$E_z=H_y=E_x=0$

$$E_y=-\frac{j\omega\mu}{\beta_{c10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\cdot sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_{g10}\cdot z}$$

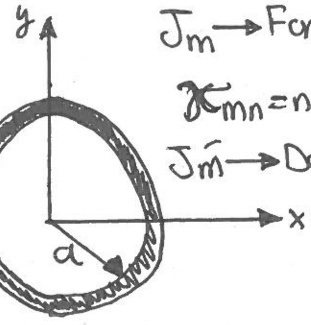
siendo $\beta_{c10}=\frac{\pi}{a}$;

$\beta_g=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\sqrt{1-(f_{cTE10}/f)^2}$

$$H_z=H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_{g10}\cdot z}$$

$$H_x=\frac{j\beta_{g10}}{\beta_{c10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\cdot H_0\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_{g10}\cdot z}$$

- Guía Circular -



$J_m \rightarrow$ Función de Bessel de 1ª especie y orden m $(m=0,1,2,3\ldots)$

χ_{mn} = n-ésimo cero de J_m

$J'_m \rightarrow$ Derivada de la función de Bessel de 1ª especie y orden m.

$$\beta_c=\frac{\chi_{mn}}{a} \qquad J'_m(x)=\frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$$

Modos TM_{mn} $m=0,1,2\ldots$ $n=1,2,3\ldots$

$$E_z=J_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_z=0$$

$$E_\rho=-\frac{j\beta_g}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_\varphi=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi-B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_\rho=\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2}\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi-B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_\varphi=-\frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$f_{cTM_{mn}}=\frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

* Modo TM con la fc más baja: $f_{cTM_{01}}=\frac{2{,}405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

* El modo TM_{01} y todos los modos con $m=0$ → sus campos no dependen de la coordenada φ.

Modos $TE_{m,n}$ $m=0,1,2,3\ldots$ $n=\cancel{0}2,3,4\ldots$

$$J'_m(x)=\frac{\partial J_m(x)}{\partial x} \qquad \beta_c=\frac{\chi'_{mn}}{a}$$

$$E_z=0$$

$$H_z(\rho,\varphi)=J_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_\rho=-\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2}\cdot\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi-B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$E_\varphi=\frac{j\omega\mu}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_\rho=-\frac{j\beta_g}{\beta_c}J'_m(\beta_c\rho)(A\,\mathrm{sen}\,m\varphi+B\cos m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$H_\varphi=-\frac{j\beta_g}{\beta_c^2}\cdot\frac{m}{\rho}J_m(\beta_c\rho)(A\cos m\varphi-B\,\mathrm{sen}\,m\varphi)e^{-j\beta_g z}$$

$$f_{cTE_{mn}}=\frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- El modo TE_{mn} que va a tener la frecuencia de corte más baja es el TE_{11}: $f_{cTE_{11}}=\frac{1{,}841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$
- El TE_{11} es el modo fundamental de la guía circular siempre.

Fórmulas Importantes- → Igual que en guía rectangular.

Frecuencias de Corte-

$$f_{cTE_{mn}}=\frac{\chi'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}\ ;\ f_{cTM_{mn}}=\frac{\chi_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

En la guía circular siempre ocurre que:

MODO FUND: $TE_{11} \rightarrow f_{cTE_{11}}=\frac{1{,}841}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

1er MODO SUP: $TM_{01} \rightarrow f_{cTM_{11}}=\frac{2{,}405}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$BW_{monomodo}=\frac{0{,}564}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

demás: $\frac{f_{cTM_{01}}}{f_{cTE_{11}}}=\frac{2{,}405}{1{,}841}=1{,}3$ * Ancho de banda relativo menor que la guía rectangular óptima $(a=2b)$

Todos TE_{0n} y TM_{1n} son modos degenerados.

Potencia transmitida si la guía no tiene pérdidas-

$$P_T=\iint_S \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E_t}\times\vec{H_t^*}\right]\cdot\vec{ds}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}(\vec{E_t}\times\vec{H_t^*})\rho\,d\rho\,d\phi\,\hat{z}\ [W]$$

- Esta fórmula sólo es válida si el modo se propaga $(f>f_c)$ y además si hay pérdidas en los conductores y el dieléctrico viene multiplicada respectivamente por $e^{-2\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z}$.

- Atenuación -

Calculadas en $Np\,m^{-1}$
$1Np = 8,7dB$

Pérdidas debidas al dieléctrico → Igual que en la guía rectangular.

Pérdidas debidas a los conductores

Modos TM → $\alpha_c = \frac{R_s}{a\eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(f_c/f)^2}}$

Modos TE: $\alpha_c = \frac{2R_s}{a\eta\sqrt{1-(f_c/f)^2}}\left[\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 + \frac{m^2}{(\chi_{mn})^2 - m^2}\right]$

$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}$ → Resistencia superficial del conductor ; $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ → Impedancia dieléctrico

* Cuando hay pérdidas, las expresiones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ anteriores, así como la potencia P_T, vienen multiplicadas por $e^{-\alpha_d z} \cdot e^{-\alpha_c z}$ y $e^{-2\alpha_d z} \cdot e^{-2\alpha_c z}$ respectivamente.

Anotaciones Ejercicios

- Guía dimensiones óptimas: $a = 2b$. • $a > b$ → Modo fundamental: TE_{10}
- a → anchura de la guía ; b → altura de la guía. • Si no nos dicen nada: $\varepsilon_r = 1$; $\mu_r = 1$
- x siempre con a (m) / y siempre con b (n). • Truco: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_c^2}}$
- Para campos armónicos → $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega\vec{E}$
- Para aplicar Maxwell hay que conocer totalmente nuestro campo.
- Para aplicar Maxwell hay que conocer unidades de todos los elementos que aparezcan en la ec. Al final de Maxwell, indicar el valor y unidades de todos los elementos que aparezcan en la ec.
- "Rango de frecuencias en las que hay propagación en un único modo" → BW monomodo
- Para indicar BW monomodo → "Desde f_{cMF} a $f_{c\,1er\,sup}$" → evitar corchete.
- Al calcular la potencia, las exponenciales de $\vec{E}_t$ y $\vec{H}_t^*$ se anulan entre sí.
- Cuidado con los extremos de los límites de la integral → no siempre da 1/2.
- Cambio trigonométrico → $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1-\cos(\pi x/a)}{2}$
- Cuando nos pidan la potencia, no sustituir a y b al hacer la integral, se ve mejor.
- Cuando nos pidan hallar $\vec{H}$, mirar si nos piden la potencia más adelante. Si no piden la potencia, dejar $\vec{H}$ para el final.

Truco para hallar el modo: $f_{cTE_{0n}} = f_{cTE_{01}} \cdot n$ / $f_{cTE_{m0}} = f_{cTE_{10}} \cdot m$

Datos que ellos dan para resolver apartados no han coincidido nunca con las soluciones.

$At(dB) = \alpha d\,(Np \cdot m^{-1})\ 8,68\,(dB\,Np^{-1}) \cdot long\,(m)$

- $f_T = \frac{f_{cMF} + f_{c\,1er.sup}}{2}$

Al calcular campos, incluir sus pérdidas según sean dieléctrico ó conductor en la ecuación.

Al hacer Maxwell, calcularlo y añadir pérdidas al final.

En chuletario incluir tablas de Bessel.

•Tablas de Bessel•

n \ m	0	1	2	3	4	5
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,771
2	5,520	7,106	8,417	9,7661	11,065	12,339
3	8,645	10,173	11,620	13,015	14,372	—
4	11,792	13,324	14,796	—	—	—

X_{mn} (para todos Modos TM_{mn})

n \ m	0	1	2	3	4	5
1	3,832	1,841	3,054	4,201	5,317	6,416
2	7,016	5,331	6,706	8,015	9,282	10,520
3	10,173	8,536	9,696	11,346	12,682	13,987
4	13,324	11,706	13,170	—	—	—

X'_{mn} (para modos TE_{mn})

PROBLEMA 1. (3.5 Ptos.) Julio 2003

Dada una guía rectangular que cumple la relación entre la anchura,a, y la altura,b, dada por: a=1.5b y con frecuencia de corte del modo TM42 igual a 50 GHz.

Se pide:

a) Calcular las dimensiones de una guía circular con dieléctrico aire para que el modo fundamental tenga el mismo ancho de banda que el correspondiente al de la guía rectangular cuando por la misma se propagan exclusivamente los dos primeros modos.

b) Calcule la constante de propagación en la guía circular a una frecuencia un 20% inferior a la frecuencia de corte del modo fundamental.

c) Estime el valor de las pérdidas por dieléctrico aire en dB/100m a una frecuencia de 1.6 veces mayor que la frecuencia de corte del modo fundamental. (dato: tan δ =0.01)

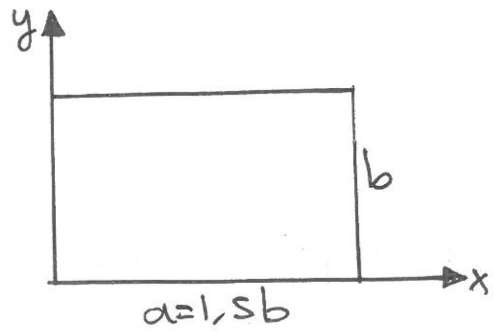
d) Razone que diferencias existen entre la guía rectangular y circular en el tamaño y ancho de banda trabajando ambas en el modo fundamental

TE	m1	m2	m3
0n	3.83	7.02	10.2
1n	1.84	5.33	8.53
2n	3.05	6.7	9.96

TM	m1	m2	m3
0n	2.4	5.52	8.65
1n	3.83	7.01	10.2
2n	5.13	8.41	11.61

• Problema 1 Julio 2013 •

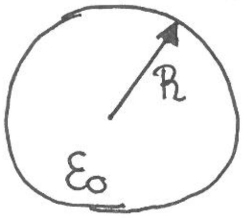
* La última vez que salió un problema de Guía circular fue 2005.



$f_{c_{TM_{42}}} = 50$ GHz

1)

Guía Rectangular



$$f_{c_{TM_{42}}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{4^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}} = 50\cdot10^9\ Hz \quad \text{(Ecuación 2)}$$

$$\begin{matrix} a=15\ mm \\ b=10\ mm \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} f_{c_{TE_{10}}} = 10\ GHz \\ f_{c_{TE_{01}}} = 15\ GHz \\ f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}} = 18\ GHz. \end{cases}$$

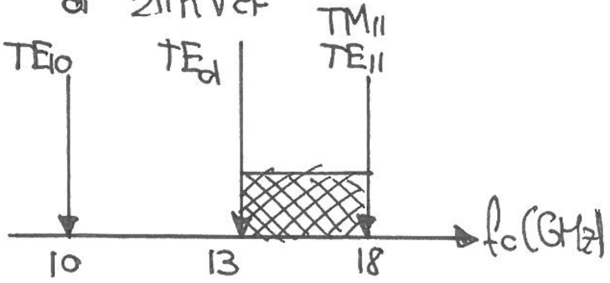
Guía Circular

Siempre MF TE_{11}: $f_{c_{TE_{mn}}} = \dfrac{\chi'_{mn}\cdot c}{2\pi R\sqrt{\varepsilon_r}} \longrightarrow f_{c_{TE_{11}}} = \dfrac{1'84\cdot c}{2\pi R\sqrt{1}}$

Preguntar este apartado en el examen.

Siempre 1º sup. TM_{01}: $f_{c_{TM_{mn}}} = \dfrac{\chi_{mn}\cdot c}{2\pi R\sqrt{\varepsilon_r}} \longrightarrow f_{c_{TM_{01}}} = \dfrac{2,4\cdot c_0}{2\pi R\sqrt{\varepsilon_r}}$

$f_{c_{TM_{01}}} - f_{c_{TE_{11}}} = 3\ GHz$ (De 15 a 18 GHz en la rectangular se propagan 2 modos).



2) $$\gamma_{circular}\Big| = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\omega_c^2\mu_0\varepsilon_0 - \omega_T^2\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\sqrt{f_c^2 - f_T^2} = 124,1\ Np\cdot m^{-1}$$

$$f_T = 0,8\cdot f_{c_{MF}} = 0,8\cdot f_{c_{TE_{11}}} = 0,8\cdot 9,87\ GHz = 7,9\ GHz$$

Lógicamente a esta frecuencia $\gamma = \alpha$ ya que el modo está al corte.

3) $\varepsilon = \varepsilon_0$ ó $\varepsilon_r = 1$ y $tg\delta = 0,01$ ¿α (dB/km)?

$$\alpha_d\,(Np/m) = \frac{1}{2}k\cdot\frac{tg\delta}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{1}{2}\,2\pi f_T\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{0,01}{\sqrt{1-(1/1,6)^2}}$$

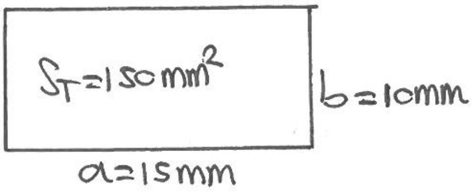
3)

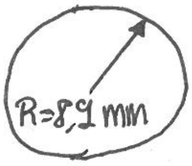
Guía Rectangular: $f_T = 1,6\, f_{cTE10} = 16\,GHz \rightarrow \alpha d\,(Npm^{-1}) = 2,146\, Npm^{-1} \rightarrow \alpha d\,(dB/100m)$

$\alpha d\,(dB/100m) = 1867\, dB/100m$

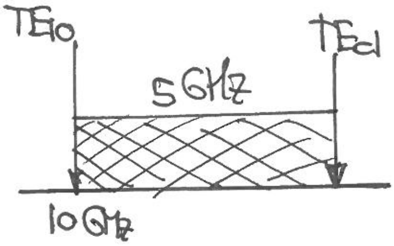
Guía Circular: $f_T = 1,6 \cdot f_{cTE10} = 15,75\,GHz \rightarrow \alpha d\,(dB/100m) = 1843\, dB/100m$

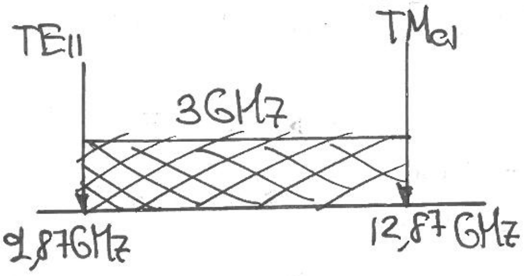
d)





$S_T = \pi R^2 = 237,63\,mm^2$





Junio 2002

* Ejercicio con pillada

PROBLEMA 6. (3.5 Ptos.)

Por una guía rectangular se propagan de forma simultánea los dos modos de menor frecuencia de corte. El campo eléctrico total viene dado por:

$$\vec{E} = 10\cdot \text{sen}(52.3598\cdot x)\cdot e^{-j119.97z}\cdot e^{j\omega\cdot t} + 5\cdot \text{sen}(104.7196\cdot x)\cdot e^{-j78.54z}\cdot e^{j\omega\cdot t}\,\hat{y}\,V/m$$

donde x, z están expresados en metros

Calcule:

a) El campo magnético total en el interior de la guía
b) Cuáles son los modos que se están propagando y cuáles son sus frecuencias de corte.
c) Frecuencia de trabajo.
d) Suponiendo que la anchura de la guía es el triple de la altura a = 3b, calcule la frecuencia de corte de los tres siguientes modos.
e) Potencia transmitida por la guía en el modo fundamental.

PROB 6 JUNIO 2002 (Pg ~~41~~ 26)

DATOS:

Por una guía rectangular se propagan de forma simultánea los 2 modos de menor fc.

$$\overrightarrow{E_{TOTAL}} = 10\,\hat{y}\cdot \text{sen}(52'3598\cdot x)\, e^{-j119'97\,z}\cdot e^{j\omega t} + 5\,\hat{y}\cdot\text{sen}(104'7196\,x)\cdot e^{-j78'54\,z}\cdot e^{j\omega t},\ (V/m)$$

"x" y "z" en metros.

SOLUCIÓN:

a) Por las ecuaciones de Maxwell:

$$\boxed{\overrightarrow{H_{TOTAL}}} = \frac{\nabla\times\overrightarrow{E_{TOTAL}}}{-j\omega\mu_0} = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\cdot\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x}\right) =$$

$$= \frac{j\cdot 523'598}{2\pi f_T\cdot\mu_0}\, e^{j\omega_T t}\left[\left[\cos(52'3598\,x)\hat{z} + \frac{j\,119'97}{52'3598}\text{sen}(52'3598\,x)\hat{x}\right]e^{-j119'9\,z} + \left[\cos(104'7196\,x)\cdot\hat{z} + \frac{j\,78'54}{104'7196}\text{sen}(104'7196\,x)\hat{x}\right]e^{-j78'54\,z}\right],\ (A/m)$$

Además: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m

f_T no la calculamos xq en el apartado c).

2/

b) Como se propagan los 2 primeros modos, sabemos que seguro se propaga el TE_{10}; pero el segundo modo podría ser el TE_{20} ó el TE_{01}. Si fuera el TE_{01}, el campo total dado tendría variación con la coordenada y, es decir tendría una expresión con forma de "sen$(\beta_y \cdot y)$" y por tanto el segundo modo es el TE_{20}.

Pillado/a

Identificando en el primer modo tenemos que:

$$\beta x_1 = \frac{m\pi}{a} \underset{\substack{\uparrow \\ m=1}}{=} \frac{\pi}{a} = 52'3598 \ (\text{rad/m}) \Rightarrow \beta_{c_{TE_{10}}} = \beta x = 2\pi \cdot f_{c_{TE_{10}}} \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{c_{TE_{10}}} = \frac{\beta x \cdot C_0}{2\pi} = 2'5 \ \text{GHz}}$$

y lógicamente: $\boxed{f_{c_{TE_{20}}} = 2 \cdot f_{c_{TE_{10}}} = 5 \ \text{GHz}}$

c) La frecuencia de trabajo la obtenemos de λg en cualquiera de los 2 modos:

$$\beta g_1 = \frac{2\pi}{\lambda g_1} = 119'97 \Rightarrow \lambda g_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f_T}\right)^2}} = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - (\underset{\substack{\shortparallel \\ 2'5\cdot 10^9 \ Hz}}{f_{c_{TE_{10}}}})^2}} = \frac{2\pi}{119'97} \ (m)$$

Operando: $\boxed{f_T \approx 6'25 \ \text{GHz}}$

Como comprobación calculamos la frecuencia de trabajo con λg_2.

$$\beta g_2 = \frac{2\pi}{\lambda g_2} = 78'54 \Rightarrow \lambda g_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{20}}}}{f_T}\right)^2}} = \frac{C_0}{\sqrt{(f_T)^2 - (f_{c_{TE_{20}}})^2}} = \frac{2\pi}{78'54} \ (m)$$

Operando: $\boxed{f_T \approx 6'25 \ \text{GHz}}$

27

d) En el modo TE_{10} sabemos que: $\beta_x = 52'3598 = \frac{\pi}{a} \Rightarrow$

$\boxed{a = 0'06 \text{ m} = 6 \text{ cm}} \Rightarrow \boxed{b = 2 \text{ cm}}$

Sabemos que todas las frec. de corte tienen la siguiente expresión:

$$f_c = \frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Los tres siguientes modos al TE_{10} y el TE_{20} son:

$$f_{c_{TE_{30}}} = f_{c_{TE_{01}}} = 7'5 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}} \simeq 7'906 \text{ GHz}$$

e) $\boxed{P_{t_{TE_{10}}}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_t} \left(\vec{E}_{t_{TE_{10}}} \times \vec{H}_{t_{TE_{10}}}^{*}\right) d\vec{S}_t =$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \left[10 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \hat{y} \times \frac{(-\hat{x}) \cdot 1199'7}{2\pi f_T \cdot \mu_0} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] dx\, dy\, \hat{z} =$$

$$= \frac{11997}{4\pi f_T \cdot \mu_0} b \cdot \frac{a}{2} = \frac{11997 \cdot 0'02 \cdot 0'06}{8\pi \cdot 6'25 \cdot 10^{9} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 7'2933 \cdot 10^{-5} =$$

$$\boxed{\simeq 73\ \mu W}$$

NOTA: Otra forma:

$$\boxed{P_T(TE_{10})} = \frac{|E_{0y}|^2}{4 \cdot Z_{TE_{10}}} \cdot a \cdot b = \frac{|E_{0y}|^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f_T}\right)^2}}{4 \cdot \eta} a \cdot b = \frac{(10)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2'5}{6'25}\right)^2} \cdot 0'06 \cdot 0'02}{4 \cdot 120\pi} =$$

$$= \boxed{73 \cdot 10^{-6}\ W} = \boxed{73\ \mu W}$$

Problema 2 Junio 2007

PROBLEMA 2 (4 puntos)

Por una guía rectangular se propaga en el modo fundamental una onda de frecuencia igual a 12.5 GHz, valor que coincide con la frecuencia central del intervalo en el que ocurre propagación en un único modo.

Se observa que cuando la guía se termina por un cortocircuito, el mínimo de campo eléctrico más próximo a la posición del cortocircuito está a una distancia de éste igual a 20 mm.

Por otra parte, se observa que cuando la guía se termina por una carga desconocida, el mínimo de campo eléctrico más próximo a la carga está situado a 5 mm de la misma, y que la potencia medida en un máximo es de -10 dBm y la potencia medida en un mínimo es de -19 dBm

Calcule:

a) Dimensiones de la guía.
b) Frecuencia de corte de los cuatro primeros modos.
c) Valor de la impedancia de carga desconocida normalizada respecto a la impedancia característica de la guía.

Cuando la guía se termina por una carga adaptada, se observa que la expresión del campo eléctrico asociado a la onda que se propaga por la guía en el modo fundamental, tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{y}$$ siendo *a* la anchura de la guía.

Calcule:

d) Porcentaje de potencia que atraviesa la sección sombreada de la figura 1 en comparación con la potencia total que atraviesa la guía.
e) Densidad superficial de corriente que se induce en la pared superior de la guía $y = b$
f) Corriente que atraviesa la línea recta C que une los puntos $(0 ,b ,\lambda_g)$ (a, b, λ_g) en la figura 2

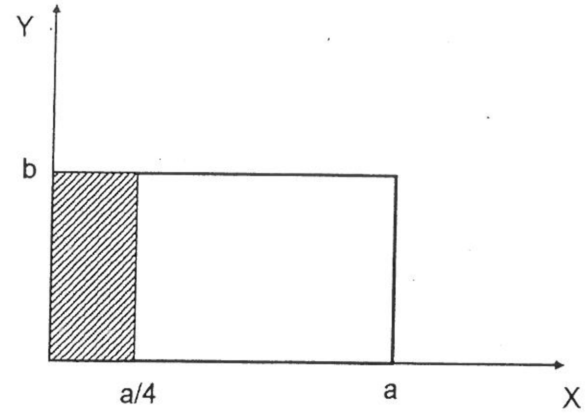


Figura 1

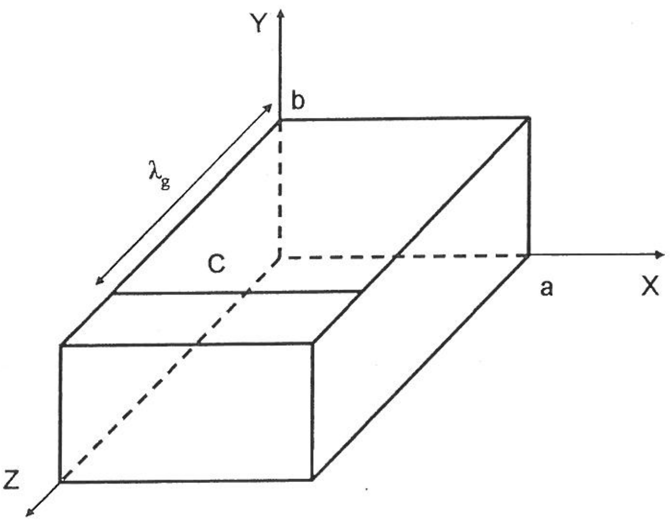


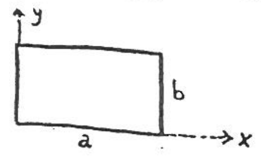
Figura 2

Si la guía se rellena por un dieléctrico con $\varepsilon_r = 4$, $\tan\delta = 0.001$, calcule:

g) Frecuencia de corte de los cuatro primeros modos.
h) Constante de atenuación en dB/m para una onda que se propaga por la guía en el modo fundamental a una frecuencia 1.2 veces superior a la frecuencia de corte del modo fundamental.

PROB 2 JUNIO 2007 (Pág 61)

$f = 12'5$ GHz ≡ Central del monomodo.



SUPONEMOS QUE LA GUÍA ESTÁ VACÍA.

SOLUCIÓN:

a) Cuando se termina en un corto medimos:

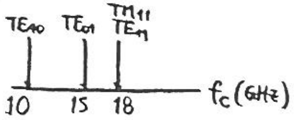
$$\underbrace{\frac{\lambda_g}{2}}_{\text{Clave}} = 20\text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 40\text{mm} = 0'04 = \frac{c_0}{\sqrt{f_t^2 - f_{c_{MF}}^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{c_{MF}} = \sqrt{f_t^2 - \left(\frac{c_0}{0'04}\right)^2} = 10\text{ GHz}$$

Suponiendo $a > b \Rightarrow 10^{10} = \frac{c_0}{2a} \Rightarrow \boxed{a = \frac{c_0}{2\cdot 10^{10}} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^{10}} = 15\text{ mm}}$

Como 12'5 GHz es el centro del monomodo: $15\text{ GHz} = \frac{c_0}{2b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{c_0}{2\cdot 15\cdot 10^9} = 10\text{ mm}}$

b) $\boxed{f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \boxed{18'03\text{ GHz}}$



c) $P_{max} = -10\text{ dBm} \cong 0'1\text{ mW}$

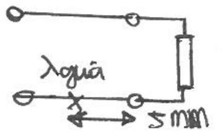
$P_{min} = -19\text{ dBm} \cong 0'01259\text{ mW}$

$$\frac{E_{max}^2}{E_{min}^2} = ROE^2$$

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{E_{max}^2}{E_{min}^2} = \frac{0'1}{0'01259} = 7'94328 \Rightarrow \boxed{ROE = 2'818}$$ Trazamos esta $|\rho| = cte$ en la carta.

Como el mínimo de campo eléctrico más cercano a $\bar{Z}_L$ está a $5\text{mm} = \frac{\lambda_g}{8}$, así pues desplazándonos desde el mínimo $\frac{\lambda_g}{8}$ hacia carga obtenemos $\bar{Z}_L$:

$$\boxed{\bar{Z}_L = 0'61 - j0'79}$$ ①



Ahora la guía ya está adaptada.

d) $$P_{T_{TE_{10}}} = \frac{|E_0|^2\cdot a\cdot b}{4\cdot Z_{TE_{10}}} = \frac{|E_0|^2\cdot 0'015\cdot 0'01}{4\cdot \frac{120\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{10}{12'5}\right)^2}}} = 5'968\cdot 10^{-8}|E_0|^2 \ ;(W)$$

Calculamos el campo $\vec{H}$ asociado al campo $\bar{E}$ dado:

$$\vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\cdot\left[\frac{-\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[j\beta_g\cdot E_0\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}\,\hat{x} + E_0\cdot\frac{\pi}{a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}\cdot\hat{z}\right]$$

$$\boxed{P_{T_{TE_{10}}}\left(0\le x\le\frac{a}{4}\right)} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\iint_{S_t}\left(\vec{E}_t\times\vec{H}_t^*\right)\cdot d\vec{S}_t =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Re}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a/4}|E_0|^2\cdot\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\frac{\beta_g}{\omega\mu_0}\cdot\hat{z}\cdot dx\,dy\,\hat{z} = \frac{|E_0|^2\cdot\beta_g\cdot b}{2\cdot\omega\cdot\mu_0}\cdot\int_{x=0}^{a/4}\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\,dx =$$

$$= \frac{|E_0|^2\cdot 2\pi\cdot b}{\lambda_g\cdot 2\cdot 2\pi f_t\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{a}{4} - \frac{a}{2\pi}\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\Big|_0^{a/4}\right] =$$

$$= \frac{|E_0|^2\cdot b\cdot 10^7}{\lambda_g\cdot 2\cdot f_t\cdot 4\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{a}{4} - \frac{a}{2\pi}\right] = \frac{|E_0|^2\cdot 0'01\cdot 10^7\cdot 0'015\cdot 0'09}{40\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 12'5\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 2} = \boxed{|E_0|^2\cdot 5'422\cdot 10^{-9}\ W}$$

$$\frac{5'422\cdot 10^{-9}}{5'968\cdot 10^{-8}} = \frac{5'422}{59'68} = 0'09 \cong \boxed{9\%}$$

e) $$\boxed{\bar{J}_S(y=b)} = \hat{y}\times\left[\bar{H}(y=b^+) - \bar{H}(y=b^-)\right] = \left\{\vec{H} = \left[\frac{-\beta_g\cdot E_0\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\omega\mu_0}\hat{x} + \frac{jE_0\cdot\pi}{\omega\mu_0\cdot a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{z}\right]e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right\}$$

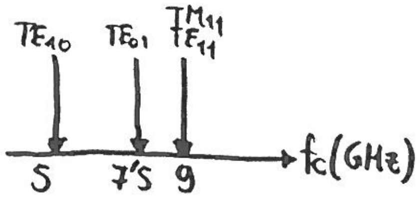
$$\boxed{= \frac{-\beta_g\cdot E_0\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{z}}{\omega\mu_0}e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t} - \frac{jE_0\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\omega\mu_0\cdot a}\cdot\hat{x}\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}}\ (A/m)$$

f) La corriente sólo es por $\bar{J}_S(y=b)\big|_z$:

$$\boxed{I} = \int_C \bar{J}_S(y=b)\cdot\hat{z}\cdot dl = \int_{x=0}^{a}\frac{-\beta_g\cdot E_0\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}}{\omega\mu_0}\Bigg|_{z=\lambda_g}\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{\beta_g E_0\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}}{\omega\mu_0}\cdot\frac{a}{\pi}(-2)\Bigg|_{z=\lambda_g} =$$

$=$

g) Las mismas divididas entre 2. $\Rightarrow$



h)

$$\alpha_d = \frac{1}{2}\beta_0 \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_t}\right)^2}} = \frac{1}{2}\, 2\pi\cdot 1'2\cdot 5\cdot 10^9 \cdot \frac{\sqrt{4}}{c_0}\cdot \frac{0'001}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1'2}\right)^2}} = 0'2273 \ Np/m$$

$$\boxed{\alpha_d\,(dB/m) = 1'9778 \ dB/m}$$

(*) Al desnormalizar en guías, se desnormaliza multiplicando la impedancia característica del modo

PROBLEMA 2 (5 puntos) (ENERO 2012)

Cuando se envía señal en la dirección del eje z a través de una guía rectangular de dimensiones óptimas en el modo fundamental, terminada por una carga en z = 0, se observa que el campo eléctrico tiene la siguiente expresión temporal:

$$\vec{E} = 20\cos\left(\frac{2\pi z}{37{,}5}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{25}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y} \quad (V/m)$$

Donde x, z están expresados en mm, siendo z la distancia a la carga.

Determine:

a) La expresión temporal del campo magnético en el interior de la guía

b) Frecuencia de corte del modo fundamental

c) Frecuencia de trabajo

d) Potencia media que se propaga por la guía

e) La expresión temporal del campo eléctrico asociado a la onda incidente

f) Potencia media asociada a la onda incidente

g) Amplitud del campo eléctrico en un máximo y en un mínimo

h) Impedancia y coeficiente de reflexión de la carga

i) Impedancia y coeficiente de reflexión a una distancia de 9,37 mm de la carga

j) Potencia media disipada en la carga

Eneo 2012

a) ¿$\vec{H}(t)$?

b) $f_{c10} = \frac{6}{2a} = \frac{3\cdot10^{11}}{2\cdot 25} = 6\,GHz$

c) $\lambda_{g10} = 37,5\,mm = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}}$

d) $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re(\vec{E} \times \vec{H}) = 0\ (W)$ → * En ondas estacionarias no se disipa potencia.

e) $\vec{E}_{inc}(t) = E_0 \cdot sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) cos(\omega t - \beta_{g10} z)\,\hat{y}$

$\hookrightarrow E_0 = 10\,Vm^{-1}$ (****)

f) $P_{PTE_{10}} = \frac{E_0^2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot Z_{TE10}}$

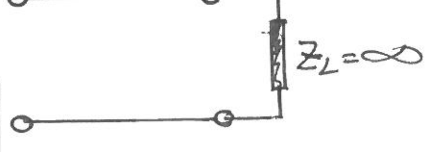
g) $E_{max_{TOTAL}} = \rightarrow$ [illegible] $20\,sen\left(\frac{\pi x}{25}\right) cos\,\omega t$ si $cos\left(\frac{2\pi z}{37,5}\right) = \pm1 \rightarrow$ $E_{max_{TOTAL}} = 20\,Vm^{-1}$

$E_{min_{TOTAL}} = \rightarrow$ [illegible] 0 si $cos\left(\frac{2\pi z}{37,5}\right) = 0$

h) $Z_L = \infty$

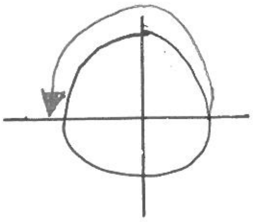
$\rho_L = +1$

i) $9,37\,mm = \lambda_g/4$



$\hookrightarrow Z = Z_{TE10} \cdot \frac{Z_L + j Z_{TE10} \cdot tg(g_c^\circ)}{Z_{TE10} + j Z_L\, tg(g_c^\circ)} = \frac{Z_{TE10}^2}{Z_L} = 0$

$\hookrightarrow \rho_{in} = -1$

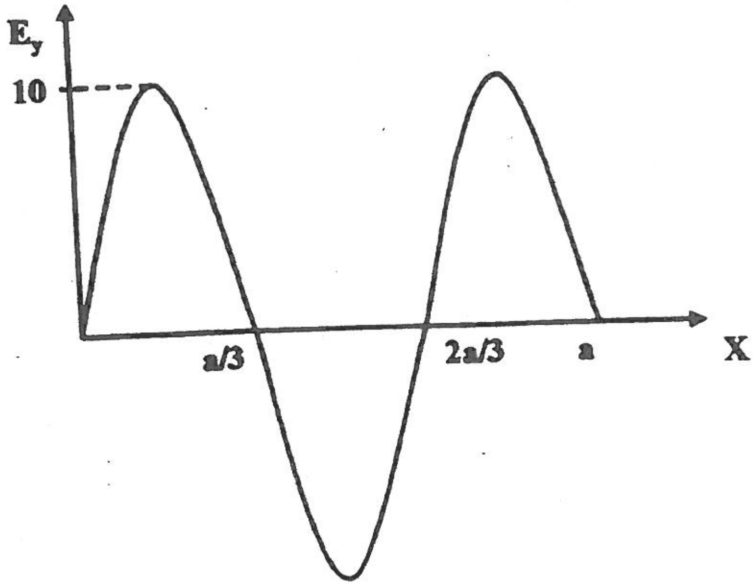


j) $P_{disipada_L} = 0$ ya que $Z_L = \infty$

Febrero 2000

PROBLEMA 5. (4 Ptos)

Por una guía rectangular de dimensiones óptimas se propaga en la dirección del eje z a la frecuencia de 18 GHz un modo cuya longitud de onda en el interior de la guía es $\lambda_g =$ 30.15 mm Se conoce que las componentes E_x, E_z del campo eléctrico asociado a este modo son nulas. La componente E_y del campo eléctrico no tiene variación en el eje y, teniendo la siguiente variación en el eje x, donde *a* es la anchura de la guía:



Determine:

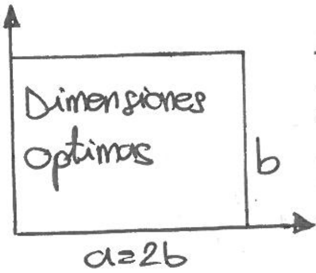
1.- Expresión matemática de E_y.

2.- Campo magnético asociado a este modo.

3.- De qué modo se trata.

4.- Dimensiones de la guía.

Febrero 2000. Problema 5

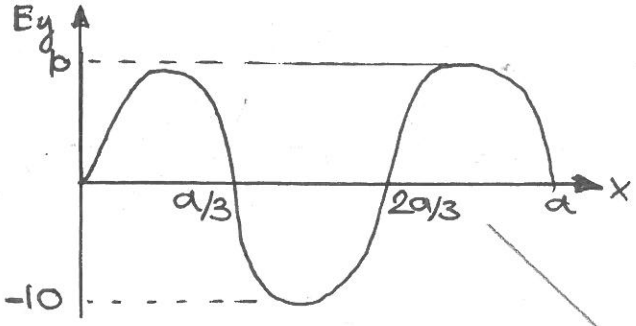


$f_T = 18\,GHz$

$\lambda_g = 30,15\,mm$ $\boxed{TE_{mn}}$

$E_x = 0 = E_z$

E_y no depende de y



Corta 3 veces en cero en un mismo periodo

1] E_y?

Observamos que es una función seno con amplitud $10\,Vm^{-1}$.

Como se trata de un campo eléctrico que se propaga por una guía, su variación con la coordenada x es con $sen\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ ó $cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$

Así pues:

$$E_y = 10\,sen\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad m = 0,1,2,3\ldots$$

Observamos que debe ser $m=3 \longrightarrow E_y = b \cdot sen\left(\frac{3\pi x}{a}\right) Vm^{-1} \longrightarrow \vec{E} = 10\,sen\left(\frac{3\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z}\,\hat{y}\ Vm^{-1}$

$E_x = E_z = 0$

* Para aplicar Maxwell hay que conocer totalmente nuestro campo

2] ¿$\vec{H}$?

Por la ecuación de Maxwell: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\vec{B} = -j\omega\mu_0\vec{H}$

Para campos armónicos

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[j\beta_g \cdot 10\,sen\left(\frac{3\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_g z}\,\hat{x} + \frac{3\pi}{a}10\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_g z}\,\hat{z}\right] Am^{-1}$$

siendo $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 18 \cdot 10^9\ rad\,s^{-1}$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ Hm^{-1}$

$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{30,15 \cdot 10^{-3}}\ rad\,m^{-1}$

3] Como $E_z = 0$ y $H_z \neq 0 \longrightarrow$ el modo es TE_{mn}

Como ningún campo depende de la coordenada y, debe ser $n=0$

Identificando en $\vec{E}$ la función $sen\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ con $sen\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$ vemos que $m=3$.

El modo es el TE_{30}.

2\

4] $a=2b \longrightarrow$ Guía de dimensiones óptimas.

$$\lambda_g = 30{,}15\,mm = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{(V_0/f_T)}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c_{30}}^2}} = \frac{3\cdot10^8}{\sqrt{(18\cdot10^9)^2 - f_{c_{30}}^2}}$$

$\mu_r, \varepsilon_r = 1$ $\downarrow$

$$f_c = \frac{C_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} \longrightarrow f_{c_{30}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2} = \frac{C_0\cdot 3}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,a} = \frac{C_0 3}{2a}$$

$$\lambda_g = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c_{30}}^2}}\ ;\ \sqrt{f_T^2 - f_{c_{30}}^2} = \frac{C_0}{\lambda_g}\ ;\ f_T^2 - f_{c_{30}}^2 = \left(\frac{C_0}{\lambda_g}\right)^2 ;\ f_{c_{30}}^2 = f_T^2 - \left(\frac{C_0}{\lambda_g}\right)^2$$

$$f_{c_{30}} = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{C_0}{\lambda_g}\right)^2}\ ;\ \frac{C_0\cdot 3}{2a} = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{C_0}{\lambda_g}\right)^2}\ ;\ a = \frac{C_0\cdot 3}{2\sqrt{f_T^2 - (C_0/\lambda_g)^2}}$$

$$a = \frac{3\cdot10^8\cdot 3}{2\sqrt{(18\cdot10^9)^2 - (3\cdot10^8/30{,}15\cdot10^{-3})^2}} \simeq 3\,cm \longrightarrow b = \frac{a}{2} \simeq 1{,}5\,cm$$

*Notas del Ejercicio

En la gráfica vemos 3 pasos por cero en un mismo periodo $\longrightarrow$ $m=3$.

Al aplicar Maxwell, conocer campo entero, no componentes

En ecuaciones armónicas: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E}$

x siempre va con a (m) / y siempre va con b (n).

Guía rectangular óptima: $a=2b$

Sabemos que el modo es TE_{mn} porque $\vec{E}$ no tiene componente en la dirección de propagación de la onda $\longrightarrow$ $E_z=0$; $H_z\neq0$

" Como ningún campo depende de la coordenada y" $\longrightarrow$ $n=0$

Al terminar de calcular $\vec{H}$ por Maxwell, dejar indicado el valor y unidades de todos los términos de la ecuación.

PROBLEMA 2 (4 puntos) Diciembre 2004

El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga por el interior de una guía rectangular de dimensiones a = 2.25b, en el modo fundamental tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta_g z) \exp(j\omega t)\, \hat{y}$$

donde

$E_0 = 10\ \mathrm{Vm^{-1}}$

$\beta_g = 158.27\ \mathrm{m^{-1}}$

$\omega = 2\pi\ 10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}$

Calcule:

a) Dimensiones de la guía y frecuencia de corte del modo fundamental.

b) Rango de frecuencias en las que hay propagación en un único modo.

c) Campo magnético asociado.

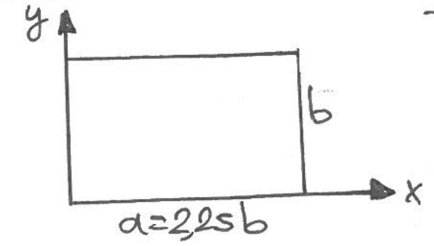
d) Potencia que se propaga por la guía.

e) Longitud de una guía que tuviera la mitad de la anchura de la guía del enunciado para que el modo fundamental propagándose por ella se atenúe 100 dB.

*Notas del Ejercicio

- $a > b \longrightarrow$ Modo fundamental: TE_{10}
- Como no nos dicen nada, suponemos $\varepsilon_r = 1$
- Truco: $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_c^2}}$
- "Rango de frecuencias en las que hay propagación en un único modo" → Ancho de banda monom
  Desde f_{cMF} a $f_{c\,1^{er}\,sup}$ → poner de esta manera (sin el corchete → preguntar en examen
- Campos armónicos → $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$
- Expresar todos los valores y unidades en Maxwell.
- Al calcular la potencia, las exponenciales de $\vec{E_t}$ y $\vec{H_t}^*$ se anulan entre sí
- Cuidado con los extremos de la integral
- Cambio trigonométrico → $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}$
- At (dB) = ~~At~~ α (Np m^{-1}) · longitud (m) · 8,7 dB Np^{-1}

• Diciembre 2004. Problema 2.



$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t}\,\hat{y}$$

Modo fundamental $\longrightarrow TE_{10}$ $(a>b)$

$E_0 = 10\,Vm^{-1}$

$\beta_g = 158{,}27\,m^{-1}$

$\omega = 2\pi 10^{10}\,s^{-1} \longrightarrow f_T = 10^{10}\,Hz$

(Como no nos dicen nada $\longrightarrow \varepsilon_r = 1$).

Sabemos que $\lambda_g = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \dfrac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_c^2}}$; $\lambda_g\sqrt{f_T^2 - f_c^2} = c_0$; $f_T^2 - f_c^2 = \left(\dfrac{c_0}{\lambda_g}\right)^2$

$$f_c^2 = f_T^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2;\ f_c = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2} = \sqrt{(10^{10})^2 - \left(\frac{3\cdot 10^8}{(2\pi/158{,}27)}\right)^2} \simeq 6{,}52\ GHz.$$

$f_T = 10\,GHz > f_{c_{MF}} = 6{,}52\,GHz \longrightarrow$ el modo se propaga

Como $a>b$ el modo fundamental es el TE_{10} por tanto: $f_c = \dfrac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{b}\right)^2}$

$$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\cdot a} = f_{c_{MF}} = 6{,}52\,GHz \longrightarrow \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,a} = f_{c_{MF}};\ a = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\ f_{c_{MF}}}$$

$$a = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 6{,}52\cdot 10^9} = \frac{15}{652}\,m \simeq 23\,mm \longrightarrow b = \frac{a}{2{,}25} \simeq 10{,}2\,mm.$$

El modo que sigue al fundamental:

$$f_{c_{TE_{20}}} = 2\cdot f_{c_{TE_{10}}} = 2\cdot 6{,}52\,GHz = 13{,}04\,GHz$$

$$f_{c_{TE_{01}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,b} = \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10{,}2\cdot 10^{-3}} \simeq 1{,}47\cdot 10^{10}\,Hz = 14{,}7\,GHz$$

El rango monomodo es de 6,52 GHz a 13,04 GHz $\longrightarrow$

* Diciéndolo así, no indicas el corchete, $\rightarrow$ preguntar en examen $[6{,}52\,GHz, 13{,}04\,GHz]$

Sabemos por la ecuación por la ecuación de Maxwell-Faraday:

$$\vec{\nabla\times E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \longrightarrow \text{Para campos armónicos: } \vec{\nabla\times E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{\nabla\times E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[j\beta_g E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}\hat{x} + \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}\hat{z}\right) =$$

$$= \frac{-\beta g}{\omega \mu_0} E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{x}\, e^{-j\beta g z} \cdot e^{j\omega t} + \frac{j}{\omega \mu_0} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{z}\, e^{-j\beta g z} e^{j\omega t} \quad Am^{-1}$$

siendo:

$E_0 = 10\, Vm^{-1}$; $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}\, rad\, s^{-1}$; $\beta g = 158,27\, rad\, m^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, Hm^{-1}$; $a \simeq 23\, mm$

1] 1° forma

Exponenciales de $\overrightarrow{Et}$ y $\overrightarrow{Ht^*}$ se anulan mutuamente

$$P_t = \frac{1}{2} Re \iint_{St} (\overrightarrow{Et} \times \overrightarrow{Ht^*}) \overrightarrow{dSt} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \frac{\beta g}{\omega \mu_0} E_0^2 \overbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)} \hat{z} \cdot \hat{z}\, dx\, dy =$$

cuidado con los límites de la integral, no siempre da 1.

$$\circledast$$

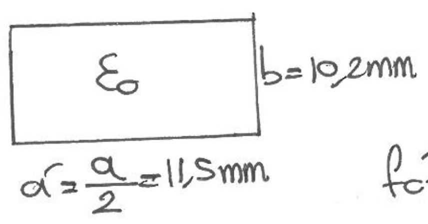
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta g}{\omega \mu_0} E_0^2\, b \int_{x=0}^{a} \overbrace{\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{2}} dx = \frac{\beta g \cdot E_0^2 \cdot b \cdot a}{4 \omega \mu_0} = \frac{158,27 \cdot 10^2 \cdot 10,2 \cdot 23 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 2\pi \cdot 10^{10} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \simeq 11,78\, \mu W$$

2° forma

$$P_{TE10} = \frac{|E_{0y}|^2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot Z_{TE10}} = \frac{|E_{0y}|^2 a b \sqrt{1-(fc/f_T)^2}}{4 \cdot \eta} = \frac{100 \cdot 225 (10,2 \cdot 10^{-3})^2 \sqrt{1-\left(\frac{6,52}{10}\right)^2}}{4 \cdot 120\pi} \simeq 11,78\, \mu W$$

$$Z_{TE10} = \frac{\eta}{\sqrt{1-(fc/f_T)^2}} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\, \Omega$$

3]



Sigue siendo a>b y por tanto el modo fundamental sigue siendo el TE10, pero su nueva fc es:

$$f'_{cTE10} = \frac{c_0}{2a'} = 13,04\, GHz > f_T = 10\, GHz \longrightarrow \text{el modo estará en corte.}$$

$$\gamma_{TE10}\Big|_{f=10GHz} = \alpha_{TE10} = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{(\omega_c'\sqrt{\mu\varepsilon})^2 - (\omega\sqrt{\mu\varepsilon})^2} = 2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{f_c^{2\prime} - f_T^2} =$$

$$= \frac{2\pi}{c_0}\sqrt{f_c^{2\prime} - f_T^2} = \frac{2\pi}{3 \cdot 10^8}\sqrt{(13,04 \cdot 10^9)^2 - (10 \cdot 10^9)^2} = 175,281\, Npm^{-1}$$

$At(dB) = 100\, dB$

$$At(dB) = \alpha_{TE10}(Npm^{-1}) \cdot 8,78\, dBNp^{-1} \cdot long(m) \longrightarrow long = \frac{100}{175,28 \cdot 8,7} \simeq 0,656\, m$$

$\circledast$ Cambio trigonométrico: $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}$

ILE

PROB 2 DICIEMBRE 2004 (Pág $\overset{39}{\cancel{70}}$ 39)

$$\vec{E} = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \hat{y}$$

$E_0 = 10$ V/m

$\beta_{g_{10}} = 158'27$ m^{-1}

$\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ s^{-1}

$a = 2'25 \cdot b$

Modo fundamental.

Si $a > b \rightarrow$ modo fundamental TE_{10} (SEGURO!)

COPY 2.1.5 teoría

a) Como $\omega = 2\pi \cdot 10^{10}$ s^{-1} $\Rightarrow$ $f_T = 10^{10}$ Hz

Suponiendo guía vacía: $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 1$

Como $$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = 158'27 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \lambda_g = 0'0397 \text{ (m)} = \frac{\overset{\text{no es la del vacío}}{\lambda_0} = \frac{c_0}{f_T\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_T}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_c^2}} \text{ (m)}$$

Como el campo eléctrico sólo tiene componente en $\hat{y}$ se trata de un modo TE, y como $a > b$ el modo fundamental es el TE_{10}, por tanto, suponiendo que en la guía $\mu_r = 1 = \varepsilon_r$ tenemos que:

$$f_c = f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \Rightarrow \lambda_g = 0'0397 \text{ (m)} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(10^{10})^2 - \left(\frac{3\cdot 10^8}{2a}\right)^2}} \text{ (m)}$$

Operando obtenemos:

$$\boxed{a = 0'023 \text{ m} = 23 \text{ mm}} \quad \boxed{b = 10'\hat{2} \text{ mm}}$$

$$\boxed{f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a} = \frac{3\cdot 10^8}{2 \cdot 0'023} = 6'52 \text{ GHz}}$$

rango de frec. en los que hay prop. de un único modo

b) Como $a > 2b$ el siguiente modo es el TE_{20}:

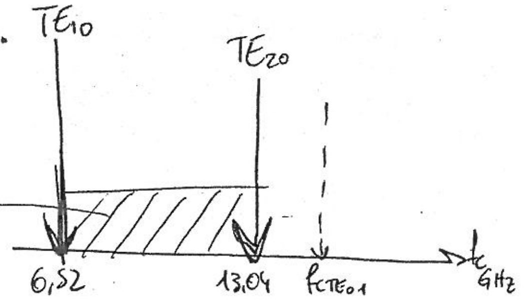
$$f_{c_{TE_{20}}} = 2 \cdot f_{c_{TE_{10}}} = 13'04 \text{ GHz} = \frac{c_0}{a}$$

lo pongo a competir con: $f_{c_{TE_{01}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\, b} = \frac{c_0 \cdot 2{,}25}{2a} \rightarrow f_{c_{TE_{20}}}$

El rango monomodo es: $(6'52 ; 13'04]$ GHz.

BW$_{mono}$ = 6,52 GHz

Donde 6,52 a 13,04 GHz



Campo magnético asociado.

c) Sabemos por las ecs de Maxwell que:

$$\vec{H}(\bar{r}) = \frac{\nabla \times \bar{E}(\bar{r})}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{2\pi\cdot 10^{10}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}\cdot\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x}\right) =$$

$$= \frac{j\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}}{2\pi\cdot 10^{10}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}\left[E_0\cdot\frac{\pi}{a}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{z} + E_0\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot \underset{\text{en }\hat{x}}{\boxed{j}}\,\beta_g\cdot\hat{x}\right] =$$

$$= \frac{E_0\cdot e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}}{8\pi^2\cdot 10^3}\cdot\left[\overset{\text{No en }\hat{z}}{\boxed{j}}\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z} - \beta_g\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x}\right], \quad (A/m)$$

siendo: $E_0 = 10\ V/m$; $\beta_g = 158'27\ m^{-1}$; $\omega = 2\pi\cdot 10^{10}\ s^{-1}$; $a = 0'023\ m$

La componente Hz no afecta al ser $\vec{dS_t} = dS_t\cdot\hat{z}$

Potencia que se propaga por la guía

FORMULA TEÒRICA XQ ES EL TE_{10} Y ME PIDEN TODA LA GUÍA.

d) $$\boxed{P_t} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\iint_{S_t}\left(\bar{E}_t \times \bar{H}_t^*\right)\vec{dS_t} =$$

$$\frac{|E_{0y}|^2\cdot a\cdot b}{4\cdot Z_{TE_{10}}} = \begin{cases} |E_{0y}| = 10\ V/m \\ Z_{TE_{10}} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{cTE_{10}}}{f_T}\right)^2}} = \dfrac{120\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{6{,}52}{10}\right)^2}} \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{11{,}782\ \mu W}}$$

FALSO! da la mitad

$$= \frac{1}{2}\,\text{Re}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}\frac{E_0^2\cdot\beta_g}{8\pi^2\cdot 10^3}\cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z}\cdot dx\,dy\,\hat{z} =$$

$$= \frac{E_0^2\cdot\beta_g\cdot\frac{a}{2}\cdot b}{2\cdot 8\pi^2\cdot 10^3} = \frac{100\cdot 158'27\cdot\frac{(0'023)^2}{2\cdot 2'25}}{16\pi^2\cdot 10^3} = 11'782\cdot 10^{-6}\ W =$$

$$= \boxed{11'782\ \mu W}$$

Long. de una guía q. tuviese mitad de anchura de la guía del enunciado xq q. modo fund se atenúe en ella 100 dB

e) Si tuviera la mitad de la anchura sería una guía con:

$a' = 11'5\ mm = \frac{a}{2}$
$b = 10'2\ mm$

$(a' > b)$

Su modo fundamental sigue siendo el TE_{10} pero su nueva frecuencia de corte sería:

$$f'_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a'\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = 13'04\ GHz > f_T = 10GHz$$

Este modo a la frecuencia de trabajo $f_T = 10^{10}\ Hz = 10\ GHz$ estaría al corte y se atenuaría con:

$$\gamma'_g = \boxed{\alpha'} = \sqrt{\beta'^2_c - \beta_0^2} = \sqrt{\omega'^2_c(\mu_0\epsilon_0) - \omega_T^2(\mu_0\epsilon_0)} = \frac{2\pi}{c_0}\sqrt{f'^2_c - f_T^2} = \boxed{175'28\ Np/m}$$

En dB: $\alpha\,(dB/m) = 1524'95\ dB/m$; Para que se atenúe 100 dB: $\boxed{long = 0'0656\ metros}$

↳ si me sale negativa lo pongo en más

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS II

JUNIO 2006

PROBLEMA 1 (4 puntos)

El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga por el interior de una guía rectangular tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_0 \,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{x}$$

donde:

y, *z* vienen expresados en metros, *t* en segundos

$E_0 = 10 \text{ V m}^{-1}$
$\beta_g = 277{,}16 \text{ m}^{-1}$
$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$

La altura de la guía es $b = 0{,}02$ m = 2 cm.
La relación que existe entre las frecuencias de corte de los modos TE_{22} y TE_{10} es: $\frac{f_{C22}}{f_{C10}} = 3{,}6$

Determine

a) De qué modo se trata
b) La expresión del campo magnético asociado a la onda
c) La ~~altura~~ de la guía = ANCHURA
d) La potencia transmitida
e) Qué otros modos se propagan

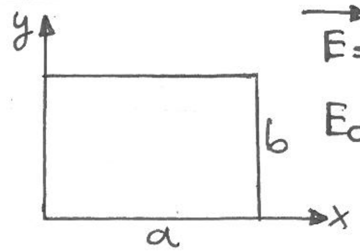
5

*Notas del Ejercicio

- x siempre con m / y siempre con n.
- $f_{cTE_{0n}} = f_{cTE_{01}} \cdot n$ → Para hallar el modo

  $f_{cTE_{m0}} = f_{cTE_{10}} \cdot m$ ↗
- En Maxwell, expresar resultados y unidades al final.
- Cuando nos piden sacar $\vec{H}$, mirar si piden la potencia más adelante
  - ↳ Apartados relacionados.
- Cuando nos piden potencia, no sustituir a y b en la expresión hasta calcularla finalmente → se ve mejor la integral.

Junio 2006. Problema 1



$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{x}$

$E_0 = 10\ Vm^{-1}$

$\beta_g = 277,16\ m^{-1}$; $\omega = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^9\ s^{-1} \longrightarrow f = 20\ GHz$

$b = 0,02 m = 2 cm$

$\frac{f_{cTE_{22}}}{f_{cTE_{10}}} = 3,6$

a] ¿Qué modo es?

Como vemos que $E_z = 0$, el modo es TE_{mn} ($\vec{E}$ no tiene componente en la dirección de prop.)

La expresión general de la componente $\hat{x}$ de un modo TE es:

$$E_x = \underbrace{\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot H_0}_{E_0} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t}$$

Vemos que m=0 ya que la expresión dada no depende de x ∘○ $\boxed{TE_{0n}}$

Por otro lado:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_c^2}} \longrightarrow \lambda_g \cdot \sqrt{f_T^2 - f_c^2} = c_0 ;\ f_T^2 - f_c^2 = \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2 ;\ f_c^2 = f_T^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2$$

$$f_c = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2} = \sqrt{(20 \cdot 10^9)^2 - \left(\frac{3 \cdot 10^8}{(2\pi/277,16)}\right)^2} = 15\ GHz$$

Las frecuencias de corte de los distintos modos son: $\underbrace{TE_{mn} \quad f_{cTE_{mn}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

y por tanto las frecuencias de corte de los TE_{0n} son: $f_{cTE_{0n}} = f_{cTE_{01}} \cdot n = \frac{c_0}{2b} \cdot n = 15\ GHz$

$\frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,02} \cdot n = 15 \cdot 10^9$; $n = \frac{15 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 0,02}{3 \cdot 10^8} = 2 \longrightarrow$ El modo es el TE_{02}.

b] Mediante la ecuación de Maxwell: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \underset{\uparrow}{=} -j\omega\mu_0 \vec{H} \longrightarrow \vec{H} = \frac{\overrightarrow{\nabla \times E}}{-j\omega\mu_0}$

Funciones armónicas

$$\vec{H} = \frac{\overrightarrow{\nabla \times E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0} \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0} \left[-j\beta_g E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{y} - \frac{n\pi}{b} E_0 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{z}\right] =$$

Siendo

$E_0 = 10\ Vm^{-1}$; $\beta_g = 277,16\ m^{-1}$; $\omega = 2\pi \cdot 20 \cdot 10^9\ rads^{-1}$; $b = 2\ cm$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Hm^{-1}$; $n=2$

$$= \left[0,07 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \hat{y} - \frac{j}{16\pi} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \hat{z}\right] e^{-j277,16 \cdot z} \cdot e^{j4\pi \cdot 10^{10} t}$$ Am^{-1} con z en m, t en s, y en cm.
b=2cm

*Preguntar en el examen si dejarlo indicado o tenemos que operar.

c] $f_{cTE_{mn}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\mu_r \varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

$$\frac{f_{cTE_{22}}}{f_{cTE_{10}}} = 3{,}6 = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{C_0}{\cancel{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}}\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}}{\frac{\cancel{C_0}}{2\cancel{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}}\cdot\frac{1}{a}} = \sqrt{4 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2}; \quad 4 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2 = 3{,}6^2; \quad \frac{2a}{b} = \sqrt{3{,}6^2 - 4}$$

Para ver mejor la forma de la integral no sustituir b hasta el resultado de la potencia.

$$a = \frac{0{,}02\cdot\sqrt{3{,}6^2-4}}{2} = 0{,}03\,m = 3\,cm$$

d]

$$P_T = \frac{1}{2}\iint_{St} (\vec{E_t} \times \vec{H_t}^*)\, dS_z \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} Re \int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a} \overbrace{0{,}7 \cdot sen^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\hat{z}\cdot\hat{z}\cdot dx dy} = \frac{1}{2}\, 0{,}7 a \frac{b}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0{,}7\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot\frac{1}{2} = 105{,}27\,\mu W$$

* Cuando nos pidan $\vec{H}$ ver si piden la potencia después → Apartados relacionados.

e] $f_T = 20$ GHz

Para que un modo se propague debe cumplir $f_T > f_{c\,modo}$ → estrictamente mayor.

$f_{cTE_{10}} = \frac{C_0}{2a} = 5$ GHz → Sí se propaga

Calcular modos en hoja en sucio y despacio

$f_{cTE_{20}} = \frac{C_0}{2a}\cdot 2 = 10$ GHz → //

$f_{cTE_{30}} = \frac{C_0}{2a}\cdot 3 = 15$ GHz → //

$f_{cTE_{40}} = \frac{C_0}{2a}\cdot 4 = 20$ GHz → no se propaga

$f_{cTE_{01}} = 7{,}5$ GHz sí se propaga

$f_{cTE_{02}} = 15$ GHz //

$f_{cTE_{03}} = 22{,}5$ GHz → no se propaga

$f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = \frac{C_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 9{,}014$ GHz → sí se propaga

$f_{cTE_{21}} = f_{cTM_{21}} = \ldots = 12{,}5$ GHz → sí se propaga

$f_{cTE_{12}} = f_{cTM_{12}} = \ldots = 15$ GHz

$f_{cTE_{31}} = f_{cTM_{31}} = 16{,}77$ GHz → sí se propaga

$f_{cTE_{22}} = f_{cTM_{22}} = 18$ GHz → sí se propaga.

$f_{cTE} = f_{cTM} = 15\sqrt{2}$ GHz → no se propaga.

Septiembre 2005

PROBLEMA 3 (3 PUNTOS)

El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga por el interior de una guía rectangular en el modo fundamental tiene la siguiente expresión:

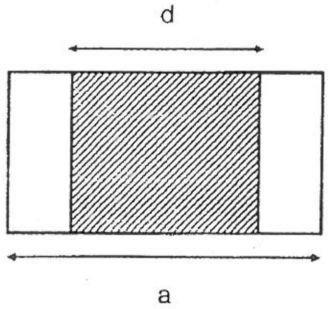
$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z)\exp(j\omega t)\hat{y}$$

$$\beta_g = 102.75 \text{ m}^{-1} \qquad \omega = 2\pi \cdot 7 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

El segundo modo tiene una frecuencia de corte un 60% superior a la frecuencia de corte del modo fundamental.

a) Determine las dimensiones de la guía y las frecuencias de corte de los tres primeros modos

b) Determine, respecto de la potencia total que se propaga por la guía, qué porcentaje de potencia se propaga a través de una sección central de la guía de anchura *d* en el caso en el que *d* = *a*/2. (Ver figura)



Si no ha podido determinar las dimensiones de la guía, para resolver los siguientes apartados elija los siguientes valores: a = 60 mm; b = 37.5 mm

Si la guía se rellena por un dieléctrico con permitividad eléctrica $\varepsilon_r = 4$ y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0.001$, determine:

c) Rango de frecuencias en los que ocurre propagación en un único modo

d) Longitud de la guía para que una onda electromagnética, cuya frecuencia es la central del intervalo calculado en el apartado anterior, se atenúe 10 dB.

e) Longitud de la guía para que una onda electromagnética, cuya frecuencia es la mitad de la frecuencia del apartado anterior, se atenúe 30 dB.

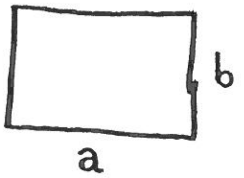
* Nota

* Datos que ellos dan para resolver apartados no han coincidido nunca con las soluciones.

*Notas del Ejercicio

- $a>b \longrightarrow$ Modo fundamental TE_{10}
- Modo TE_{m0} porque no depende de la coordenada y.

PROB 3 SEPT 2005 (Pág 48)



$$\vec{E} = E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\,102'75\,z} \cdot e^{j\,2\pi\cdot 7\cdot 10^9 t} \cdot \hat{y}$$

↳ MODO FUNDAMENTAL. (Observamos que es el $TE_{10} \Leftrightarrow a > b$) porque no depende de la coordenada y.

$$fc_{1er\,sup} = 1'6 \cdot fc_{MF} = 1'6 \cdot fc_{TE_{10}}$$

Suponemos que la guía está vacía.

SOLUCIÓN:

a) $$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{2\pi}{102'75} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{fc_{TE_{10}}}{f_T}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c_{TE_{10}}}^2}} = \frac{3\cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(7\cdot 10^9)^2 - \left(\frac{c_0}{2a}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (7\cdot 10^9)^2 - \left(\frac{3\cdot 10^8}{2a}\right)^2 = \left(\frac{3\cdot 10^8 \cdot 102'75}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow \frac{9\cdot 10^{16}}{4a^2} = 49\cdot 10^{18} - \frac{9\cdot 10^{16}\cdot (102'75}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9\cdot 10^{16}}{4a^2} = 2'493\cdot 10^{19} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{9\cdot 10^{16}}{4\cdot 2'493\cdot 10^{19}}} = 0'03 \text{ m} \cong 3\text{cm}}$$

Como $fc_{1er\,sup} = 1'6 \cdot fc_{MF}$ el modo superior debe ser el TE_{01} :

$$\frac{c_0}{2b} = 1'6 \cdot \frac{c_0}{2a} \Rightarrow \boxed{b = \frac{a}{1'6} = 1'875 \text{ cm}}$$

$$\boxed{fc_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a} = \boxed{5 \text{ GHz}}$$ MODO FUNDAMENTAL

$$\boxed{fc_{TE_{01}}} = \frac{c_0}{2b} = 1'6 \cdot fc_{TE_{10}} = \boxed{8 \text{ GHz}}$$ 1er superior

$$\boxed{fc_{TE_{11}} = fc_{TM_{11}}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2}} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1^2 + 1'6^2}{a^2}} = \frac{c_0}{2a}\sqrt{1 + 1'6^2} =$$

$$= 5 \cdot \sqrt{1 + 1'6^2} \text{ GHz} = \boxed{9'434 \text{ GHz}}$$ 2º superior.

b) La potencia transmitida total es:

$$\boxed{P_T\,(TE_{10})} = \frac{|E_{0y}|^2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot Z_{TE_{10}}} = \frac{|E_0|^2 \cdot 0'03 \cdot 0'01875}{4 \cdot \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{c_{TE_{10}}}}{f_T}\right)^2}}} = \frac{|E_0|^2 \cdot 0'03 \cdot 0'01875 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}}{4 \cdot 120\pi} =$$

$$= \boxed{|E_0|^2 \cdot 2'61 \cdot 10^{-7}}\ W$$

Para calcular la potencia que se propaga por un trozo de sección transversal, necesitamos el campo magnético, para lo cual tenemos 2 opciones:

- <u>1ª forma de calcular el campo magnético total en función de E_0:</u>

Hace operativa

Por teoría sabemos que para el modo TE_{10}:

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_{c_{10}}^2} \cdot \frac{\pi}{a} H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z} = \left\{ \text{Como } \beta_{c_{10}}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right\} =$$

$$= -\frac{j\, 2\pi f_T \cdot \mu_0 \cdot a}{\pi} H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g_{10}} z} = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z}$$

Por tanto: $-j\, 2 f_T \cdot \mu_0 \cdot a \cdot H_0 = E_0 \Rightarrow \boxed{H_0 = \frac{E_0}{-j\, 2 f_T\, \mu_0\, a} = \frac{j E_0}{2 f_T \cdot \mu_0\, a}}$

Así pues:

$$H_z = \frac{j\, E_0}{2 \cdot f_T \cdot \mu_0 \cdot a} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z}$$

$$H_x = \frac{j\, \beta_{g_{10}} \cdot \pi/a}{\beta_{c_{10}}^2} \cdot \frac{j\, E_0}{2 f_T\, \mu_0\, a} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z} = \left\{ \text{Como } \beta_{c_{10}}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{-\beta_{g_{10}} \cdot E_0}{2\pi f_T\, \mu_0}\, \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_{g_{10}} z},\ (A/m)$$

- <u>2ª forma de calcular el campo magnético total en función de E_0:</u>

Por la siguiente ec. de Maxwell: $\vec{H} = \dfrac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega_T \mu_0} = \ldots,\ (A/m)$

Pillada

Finalmente: $P_T\left(\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{3a}{4}\right) = \frac{1}{2}\, \mathbb{R}e \iint_{S_t} \left(\vec{E_t} \times \vec{H_t}^*\right) d\vec{S_t} = \frac{1}{2}\, \mathbb{R}e \iint_{S_t} \left(E_y\, \hat{y} \times H_x^*\, \hat{x}\right) d\vec{S_t} =$

$$= \frac{1}{2}\, \mathbb{R}e \int_{y=0}^{b} \int_{x=\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \frac{|E_0|^2 \cdot \beta_{g_{10}} \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{2\pi f_T \cdot \mu_0}\, \hat{z}\, dx\, dy\, \hat{z} = \frac{|E_0|^2 \cdot \beta_{g_{10}} \cdot b}{2 \cdot 2\pi f_T \cdot \mu_0} \int_{x=\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{|E_0|^2 \cdot \beta_{g_{10}} \cdot b}{2 \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot \mu_0} \cdot \left[\frac{1}{2} \left[\frac{3a}{4} - \frac{a}{4} - \frac{a}{2\pi} \cdot sen\left(\frac{2\pi}{a} \cdot \frac{3a}{4} \right) + \frac{a}{2\pi} \cdot sen\left(\frac{2\pi}{a} \cdot \frac{a}{4} \right) \right] \right] =$$

$$= \frac{|E_0|^2 \cdot \beta_{g_{10}} \cdot b \cdot a}{2 \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot \mu_0 \cdot 2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot sen\left(\frac{6\pi}{4} \right) + \frac{1}{2\pi} \cdot sen\left(\pi/2 \right) \right] = \frac{|E_0^2 \cdot \beta_{g_{10}} \cdot b \cdot a}{2 \cdot 2\pi \cdot f_T \cdot \mu_0 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] =$$

$$= \frac{|E_0|^2 \cdot 102'75 \cdot 0'01875 \cdot 0'03}{2 \cdot 2\pi \cdot 7 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \right] = \boxed{|E_0|^2 \cdot 2'14 \cdot 10^{-7}} (W)$$

Así pues:

$$\frac{P_T\left(\frac{a}{4} \le x \le \frac{3a}{4} \right)}{P_T \left(TE_{10} \right)} (\%) = \frac{|E_0|^2 \cdot 2'14 \cdot 10^{-7}}{|E_0|^2 \cdot 2'61 \cdot 10^{-7}} \cdot 100 = \boxed{81'97\,\%}$$

c) $\varepsilon_r = 4$

$tg\,\delta = 0'001$

$$f'_{c_{TE_{10}}} = \frac{f_{c_{TE_{10}}}}{\sqrt{4}} = 2'5 \text{ GHz} \; ; \quad f'_{c_{TE_{01}}} = \frac{f_{c_{TE_{01}}}}{\sqrt{4}} = 4 \text{ GHz}$$

Propagación monomodo de 2'5 a 4 GHz. → mejor con palabra para evitar el corchete en el intervalo..

d) $f_T = \frac{f'_{c_{TE_{10}}} + f'_{c_{TE_{01}}}}{2} = 3'25$ GHz ← TRUCO

$$At\,(dB) = 10 \text{ dB} = \alpha_d \left(Np/m \right) \cdot 8'68 \left(dB/Np \right) \cdot long\,(m) = \frac{1}{2} \beta_0 \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f'_{c_{TE_{10}}}}{f_T} \right)^2}} \cdot 8'68 \cdot log \Rightarrow$$

$$\boxed{long} = \frac{10 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2'5}{3'25} \right)^2}}{\beta_0 \cdot tg\,\delta \cdot 8'68} = \frac{1472'28}{2\pi f_T \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 4}} = \frac{1472'28 \cdot 3 \cdot 10^8}{4\pi \cdot 3'25 \cdot 10^9} = \boxed{10'8 \text{ metros}}$$

e) Si $f_T = \frac{3'25}{2} = 1'625$ GHz ⇒ El modo TE_{10} NO se propaga y por tanto está el corte y : $At\,(dB) = \alpha \left(Np/m \right) \cdot 8'68 \left(dB/Np \right) \cdot l\acute{o}ng\,(m) = 30\,dB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{l\acute{o}ng} = \frac{30}{8'68 \cdot \alpha (Np/m)} = \frac{30}{8'68 \;\; 2\pi \sqrt{\mu_0 4 \varepsilon_0} \sqrt{f_{c_{TE_{10}}}^2 - f_T^2}} = \frac{30 \cdot 3 \cdot 10^8}{8'68 \cdot 4\pi \cdot 10^9 \sqrt{2'5^2 - 1'625^2}} = \boxed{0'0434 \text{ metros}}$$

Febrero 2006

PROBLEMA 3 (3 PUNTOS)

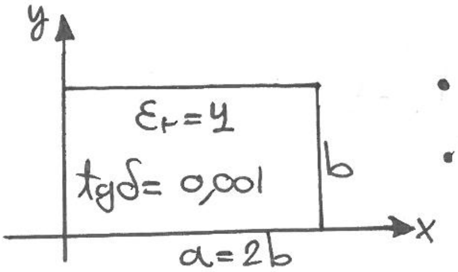
Se desea diseñar una guía rectangular con las siguientes características:

- Está rellena de un dieléctrico con constante dieléctrica de valor $\varepsilon_r = 4$, y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0{,}001$.
- Debe funcionar en el modo fundamental con el mayor ancho de banda posible.
- Debe transmitir la máxima potencia posible.
- La frecuencia de trabajo es de 12 GHz, la cual debe coincidir con la frecuencia central del intervalo en el que hay propagación en un único modo.

Determine:

a) Dimensiones de la guía.
b) Frecuencia de corte de los cuatro primeros modos.
c) Valor de la máxima potencia que puede transmitir si la amplitud máxima del campo eléctrico que puede soportar el dieléctrico que ocupa el interior de la guía es de 1MV / m.
d) Máxima longitud que puede tener la guía si las pérdidas deben ser inferiores a 3 dB.
e) Expresión temporal del campo magnético en el interior de la guía para el modo fundamental.

• Problemas Febrero 2006•



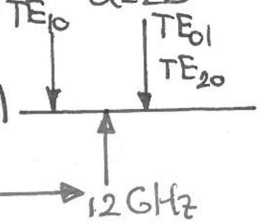
Pillada

• Mayor ancho de banda posible: $a \geq 2b$

• Mayor P_T posible

$\Rightarrow$ Guía óptima $a=2b$

• $f_T = 12\ GHz$ (Centro de la banda monomodo)



a) ¿a y b?

$a = 2b$ (Ecuación 1)

$$\text{Como } f_T = 12\ GHz = \frac{f_{c_{MF}} + f_{c_{1^{er}sup}}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Como } a=2b \\ f_{c_{MF}} = f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} \\ f_{c_{1^{er}sup}} = f_{c_{TE_{20}}} = f_{c_{TE_{01}}} = \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon_r}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} + \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon_r}}}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon_r}} \longrightarrow \begin{array}{l} a = 9,375\ mm \\ b = 4,6875\ mm \end{array}$$

b) $f_{c_{TE_{10}}} = 8\ GHz$

$f_{c_{TE_{20}}} = f_{c_{TE_{01}}} = 16\ GHz$

$$f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{\frac{1^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2}} = 17,88\ GHz$$

Los cuatro primeros modos son los siguientes cinco: TE_{10}, TE_{20}/TE_{01} y TE_{11}/TM_{11}

c) $E_{máx} = 10^6\ Vm^{-1}$ ∘∘ (Campo ruptura)

La expresión general del modo fundamental (TE_{10}): → incluir pérdidas.

$$\vec{E}_{10} = \hat{y} \cdot E_{0y}\, sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z} \cdot e^{-\alpha_d \cdot z}\ Vm^{-1}$$

El valor de este campo máximo es: $|E_{0y}| = E_{máx} = 10^6\ Vm^{-1}$

La potencia transmitida por el modo fundamental viene dada por:

$$P_{T_{TE_{10}}} = \frac{|E_{0y}|^2\, a \cdot b}{4\, Z_{TE_{10}}}$$

)

Esta potencia será máxima cuando $|E_{oy}| = E_{máx} = 10^6\ V m^{-1}$

$$P_{TE_{10}} = \frac{(10^6)^2 a \cdot b}{4\ \eta \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2}} = \left\{ \eta = \sqrt{\frac{\mu_o}{4\varepsilon_o}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 60\pi (\Omega) \right\} = 43{,}44\ kW$$

d) Como las pérdidas son por dieléctrico:

$$\alpha d = \frac{1}{2} \beta_o \frac{tg\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_T}\right)^2}} = \frac{1}{2} \omega_T \sqrt{\mu_o 4 \varepsilon_o} \frac{tg\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{2\pi f_T}{c} \sqrt{4} \frac{tg\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}} = 0{,}3372\ Np\,m^{-1}$$

$$At(dB) = 3dB = \alpha d\,(Np\,m^{-1}) \cdot 8{,}7\ dB/Np \cdot long(m) \longrightarrow long(m) = 1{,}024\ m.$$

e) Por la ecuación de Maxwell-Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_o \vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\overrightarrow{\nabla \times E}}{-j\omega\mu_o} = \frac{j}{\omega\mu_o} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_o} \left(\frac{-\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z} \right) \overset{\text{OJO}}{=}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_o} \left(+j\beta_{g10} \cdot E_{oy} \cdot sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z} e^{j\omega t} \hat{x} + E_{oy} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_{g10} z} e^{j\omega t} \cdot \hat{z} \right]$$

La expresión temporal y considerando las pérdidas en el dieléctrico es:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = Re\left(\vec{H} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-\alpha d z}\right) = \frac{-\beta_{g10}}{\omega \cdot \mu_o} E_{oy} sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta_{g10} z) e^{-\alpha d z} \hat{x} \ast$$

*¡OJO!! $$- \frac{E_{oy}}{\omega\mu_o} \cdot \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) sen(\omega t - \beta_{g10} z) e^{-\alpha d z} \hat{z}$$

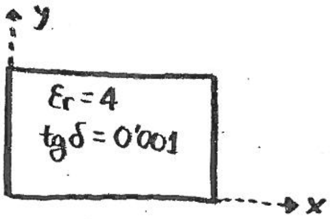
Poner en Maxwell $\vec{E}$ sin pérdidas (No poner $e^{-\alpha d z}$) $\longrightarrow$ se ponen al final.

Siendo $$\beta_{g10} = \frac{2\pi}{\lambda_{g10}} = \frac{2\pi}{\lambda_o} \sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2} = \frac{2\pi f_T}{c/\sqrt{\varepsilon_r}} \sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2} = \frac{2\pi\sqrt{4}}{3 \cdot 10^8} \cdot 10^9 \sqrt{12^2 - 8^2} = 0\ rad\,m^{-1}$$

IRE

Después de JUNIO 2002 (Prob 6)

PROB 3 FEB 2006 (Pág 51)

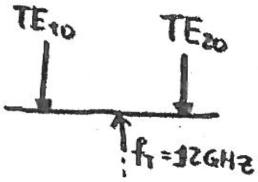


Modo fundamental.

Mayor ancho de banda posible ⇒ $a \geqslant 2b$

Maxima potencia trx posible ⇒ $a = 2b$

$f_T = 12$ GHz ≅ Central del intervalo monomodo.



¿Dimensiones de guía?

a) $f_T = 12 \text{ GHz} = \{a = 2b\} = \frac{2 f_{c_{TE_{10}}} + f_{c_{TE_{20}}}}{2} = \frac{3}{2} f_{c_{TE_{10}}} = \frac{3}{2}\frac{c_0}{2\sqrt{4}\,a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{3\cdot c_0}{8\cdot 12\cdot 10^9} = \frac{3\cdot 3\cdot 10^{10}\text{ cm/s}}{8\cdot 12\cdot 10^9 \text{ 1/s}} = 0'9375\text{ cm} = 9'375\text{ mm}}$$

$$\boxed{b = \frac{a}{2} = 4'6875\text{ mm}}$$

NOTA: Hay otra forma de hacer este apartado porque seguro que $f_{c_{TE_{10}}} = 8$ GHz.

fcorte 4 primeros modos

b) $\boxed{f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{4}\,a} = 8 \text{ GHz}}$; $\boxed{f_{c_{TE_{20}}} = f_{c_{TE_{01}}} = 16 \text{ GHz}}$;

$$\boxed{f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}}} = \frac{c_0}{2\sqrt{4}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{3\cdot 10^8}{4}\sqrt{\frac{1}{(0'9375\cdot 10^{-2})^2} + \frac{1}{(0'46875\cdot 10^{-2})^2}}$$

$$= \frac{3\cdot 10^8}{4}\sqrt{11377'7 + 45511'1} = \boxed{17'88 \text{ GHz}}$$

valor de max. pot. que puede transmitir si ampli máx de campo elect q soporta el dieléctrico es 1MV/m

c) En el modo fundamental el campo eléctrico total viene dado por:

$\vec{E}_{TE_{10}} = \hat{y} E_{oy} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot e^{-j\beta_{g_{TE_{10}}} z}$; (V/m) El valor máximo es: $E_{max} = |E_{oy}| = 10^6$ V/m

CAMPO DE RUPTURA.

La potencia transmitida es:

$$P_T(TE_{10}) = \frac{|E_{oy}|^2}{4\cdot Z_{TE_{10}}}\cdot a\cdot b \Rightarrow \boxed{P_T(TE_{10})_{max}} = \frac{E_{max}^2 \cdot a\cdot b}{4\cdot Z_{TE_{10}}} = \frac{10^{12}\cdot 9'375\cdot 10^{-3}\cdot 4'6875\cdot 10^{-3}}{4\cdot \eta/\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{TE_{10}}}}{f_T}\right)^2}} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{4}} = 60\pi, (\Omega) \\ \left(f_{c_{TE_{10}}}/f_T\right) = \frac{8}{12}\end{array}\right\} = \frac{10^6\cdot 43'9453\cdot\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}}{4\cdot 60\pi}$$

$$= \boxed{43'44 \text{ KW}}$$

sólo se puede hacer con modos con en una componente.

Modo TE_{10} o TE_{01}

Maxima long de la guia si perdidas < 3dB

d) $$\alpha d = \frac{1}{2}\beta_0 \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_T}\right)^2}} = \frac{1}{2}\omega_T\sqrt{\mu\,\varepsilon} \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_T}\right)^2}}\,,\ (Np/m)$$

En esta guía para el modo TE_{10} tenemos que:

$$\boxed{\alpha d_{TE_{10}}} = \frac{1}{2}\,2\pi\cdot 12\cdot 10^9 \cdot \frac{\sqrt{4}}{C_0}\cdot\frac{0'001}{\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}} = \frac{12\pi\cdot 10^9\cdot 2\cdot 0'001}{3\cdot 10^8\cdot 0'745356} =$$

$$= \boxed{0'3372\ Np/m}$$

$$\alpha d_{10} = \frac{1}{2}\,tg\,\delta\,\frac{\overset{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 4}}{\beta_0}}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{10}}}{f_T}\right)^2}}$$

$$\alpha d_{TE_{10}}(dB/m) = 0'3372\ Np/m \cdot 8'7\ dB/Np = 2'93\ dB/m$$

$$\text{Atenuación (dB)} = 2'93\,(dB/m)\cdot \text{long (m)} < 3\ dB \Rightarrow \text{long} < 1'024\ m$$

$$\boxed{long_{max} = 1'024\ \text{metros}}$$

Expresión temporal de Campo magnético xa modo fundam.

e) El campo magnético total del modo fundamental es: [OJO, sin pérdidas en el dieléctrico.]

te haces el campo c
si fuese sin perdidas pa
no al derivar s
mal. y al f

$$\vec{H}_{TE_{10}} = H_x\,\hat{x} + H_z\,\hat{z} = \left[\frac{j\beta g_{10}}{\beta c_{10}^2}\cdot\frac{\pi}{a}\,H_0\cdot sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{x} + H_0\cdot cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{z}\right]e^{-j\beta g_{10} z}\ \boxed{e^{-\alpha d z}}\ ;\ (A/m)$$

añado esta exp

siendo: $$\boxed{\beta g_{10}} = \frac{2\pi}{\lambda g_{10}} = \frac{2\pi\sqrt{1-\left(f_c/f\right)^2}}{\lambda_0} = \frac{2\pi\cdot f_T\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}}{C_0/\sqrt{4}} = \frac{4\pi\, f_T\cdot\sqrt{1-\left(\frac{8}{12}\right)^2}}{3\cdot 10^8} =$$

$$= \frac{4\pi\cdot 12\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot 0'745356 = \boxed{374'657\ rad/m}$$

$$\boxed{\beta c_{10} = \frac{\pi}{a}}\ (rad/m)$$

$$\overrightarrow{H_{TE_{10}}} = \left[j\,\frac{374'657\cdot a}{\pi}\,H_0\cdot sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{x} + H_0\cdot cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cdot\hat{z}\right]\cdot e^{-j\beta g_{10} z}\,,\ (A/m)$$

Como $a = 0'009375\ m$ tenemos que:

$$\boxed{\overrightarrow{H_{TE_{10}}}(x,z,t)} = \mathbb{R}e\left[\overrightarrow{H_{TE_{10}}}\cdot e^{j\omega_T t}\right] = \mathbb{R}e\left[H_0\cdot e^{j(\omega_T t - \beta g_{10} z)}\cdot\left(j\,1'118\cdot sen(335'1x)\,\hat{x} + cos(335'1x)\,\hat{z}\right)\right.$$

opy teoria $$= 1'118\cdot H_0\cdot sen(335'1x)\cdot\hat{x}\cdot sen\left(24\pi\cdot 10^9 t - 374'657 z\right) + H_0\cdot cos(335'1x)\,\hat{z}\cdot cos\left(24\pi\cdot 10^9 t - 374'6\,z\right.$$

(A/m

NOTA: Si consideramos $|E_{0y}| = E_{max} = 10^6_{(V/m)}$ tenemos que: $$\boxed{|H_0|} = \frac{\pi|E_{0y}|}{\omega\mu a} = \frac{10^6}{2\cdot f_T\cdot\mu_0 a} = \boxed{3536'776}\ (A/m)$$

FALTA MULTIPLICAR POR $e^{-\beta\alpha d z}$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS II

SEPTIEMBRE 2006

PROBLEMA 1 (3 puntos)

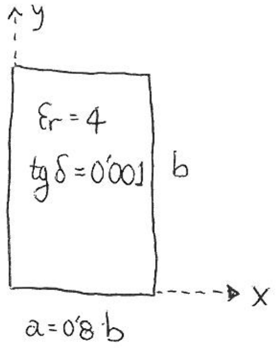
Se pretende diseñar una guía rectangular con las siguientes características:

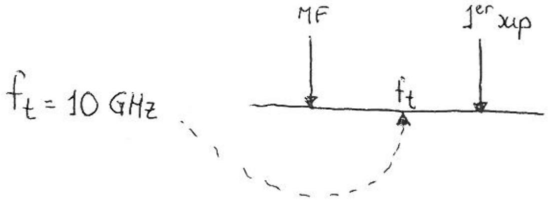
- Está rellena de un material de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 4$ y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0{,}001$
- La relación entre la anchura y la altura es $a/b = 0{,}8$
- La frecuencia de trabajo es $f_t = 10$ GHz y coincide con la frecuencia central del intervalo en el que ocurre propagación en un único modo.

Determine:

a) Dimensiones de la guía.
b) Frecuencia de corte del modo fundamental.
c) Modos que se propagarían a una frecuencia $2f_t$ el doble de la frecuencia de trabajo.
d) Constante de atenuación en el modo fundamental a la frecuencia de trabajo f_t.
e) Constante de atenuación en el modo fundamental a una frecuencia $0{,}5f_t$ la mitad de la frecuencia de trabajo

PROB 1 SEPT 2006 (Pág)





a) Como $a<b$ el modo fundamental va a ser el TE_{01}. Para determinar el 1^{er} modo superior:

$$f_{c_{TE_{01}}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{c_{TE_{02}}} = \dfrac{2\cdot C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b} = \dfrac{C_0 \quad 2}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b} = \dfrac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b} \\ f_{c_{TE_{10}}} = \dfrac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot a} = \dfrac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b\cdot 0'8} = \dfrac{C_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b\cdot 1'6} \end{array}\right\} \Rightarrow f_{c_{TE_{10}}} < f_{c_{TE_{02}}}$$

Así pues:

$$\frac{f_{c_{TE_{01}}} + f_{c_{TE_{10}}}}{2} = 10^{10}\ Hz = \frac{\frac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b}}{2}\left(1+\frac{1}{0'8}\right) = \frac{3\cdot 10^8}{8\cdot b}\left(1+1'25\right) = 10^{10}\ Hz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 8'43\ mm}$$

$$\boxed{a = 0'8\cdot b = 6'75\ mm}$$

b) $$f_{c_{TE_{01}}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}\cdot b} = 8'8968\cdot 10^9\ Hz$$

c) $f_t' = 2 f_t = 20\ GHz$;

$f_{c_{TE_{02}}} = 17'7936\cdot 10^9\ Hz$ (SÍ)

$f_{c_{TE_{03}}} > 20\ GHz$ (NO)

$f_{c_{TE_{10}}} = 11'1032\cdot 10^9\ Hz$ (SÍ)

$f_{c_{TE_{20}}} = 2\cdot f_{c_{TE_{10}}} > 20\ GHz$ (NO)

$$f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}} = \frac{C_0}{2\sqrt{4}}\sqrt{\frac{1^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}} = $$
$$= 14'23\cdot 10^9\ Hz \text{ (SÍ)}$$

$$f_{c_{TE_{12}}} = f_{c_{TM_{12}}} = \frac{C_0}{2\sqrt{4}}\sqrt{\frac{1^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}} = $$
$$= 20'97\ GHz \text{ (NO)}$$

Por tanto se propagan: TE_{01}, TE_{02}, TE_{10}, TE_{11} y TM_{11}

d) $$\boxed{\alpha_d} = \frac{1}{2}\beta_0 \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_T}\right)^2}} = \frac{1}{2}\, 2\pi f_T \cdot \sqrt{\mu_0 4\varepsilon_0} \cdot \frac{0'001}{\sqrt{1-\left(\frac{8'8968}{10}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot \frac{0'001}{\sqrt{1-\left(\frac{8'8968}{10}\right)^2}} = \boxed{0'4587 \ Np/m}$$

e) El modo NO se propaga si $f_{trabajo} = 0'5 \cdot f_t = 5$ GHz, por tanto su atenuación viene dada por:

$$\boxed{\alpha} = \gamma = \sqrt{\underset{k^2}{\beta_c^2} - \underset{k_0^2}{\beta_0^2}} = 2\pi \cdot \sqrt{\mu_0 4\varepsilon_0} \cdot \sqrt{f_c^2 - f^2} = \frac{4\pi}{c_0} \cdot \sqrt{\left(8'8968 \cdot 10^9\right)^2 - \left(5 \cdot 10^9\right)^2} =$$

$$= \boxed{308'247 \ Np/m}$$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS II

FEBRERO 2007

PROBLEMA 1 (3 puntos)

Por una guía rectangular se propagan de forma simultánea los dos modos de menor frecuencia de corte. El campo eléctrico total viene dado por:

$$\vec{E} = 10 \cdot \text{sen}(52{,}3598 \cdot x) \cdot e^{-j65{,}45z} \cdot e^{j\omega \cdot t}\,\hat{y} + 5 \cdot \text{sen}(78{,}5398 \cdot y) \cdot e^{-j29{,}22z} \cdot e^{j\omega \cdot t}\,\hat{x} \quad V/m$$

donde x, y, z están expresados en metros

Calcule:

a) El campo magnético total en el interior de la guía
b) Dimensiones de la guía.
c) Cuáles son los modos que se están propagando y cuáles son sus frecuencias de corte.
d) Frecuencia de trabajo.
e) Frecuencia de corte de los tres siguientes modos.
f) Potencia transmitida por la guía en el modo fundamental.

Febrero 2007. Problema 1

x, y, z en metros.

Guía Rectangular, se propagan los 2 modos de menor fc.

$$\vec{E} = 10\,\text{sen}(52{,}3598x)\,e^{-j65{,}45z}\,e^{j\omega t}\,\hat{y} + 5\,\text{sen}(78{,}5398y)\cdot e^{-j29{,}22z}\cdot e^{j\omega t}\,\hat{x}\ \text{Vm}^{-1}$$

a] Por la ecuación de Maxwell: $\nabla\times E = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega\mu_0 H \longrightarrow H = \dfrac{\nabla\times E}{-j\omega\mu_0}$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[j29{,}22\cdot 5\,\text{sen}(78{,}5398y)\,e^{-j29{,}22z}\cdot e^{j\omega t}\,\hat{x} - j65{,}45\cdot 10\,\text{sen}(52{,}3598x)\,e^{-j65{,}45z}\cdot e^{j\omega t}\,\hat{y} + \right.$$

$$\left. + \left[10\cdot 52{,}3598\cos(52{,}3598x)\,e^{-j65{,}45z}\,e^{j\omega t} - 5\cdot 78{,}5398\cos(78{,}5398y)\,e^{-j29{,}22z}\,e^{j\omega t}\right]\hat{z}\right]\ \text{Am}^{-1}\ \text{con}\ t\to s,\ x, z, y \to m$$

siendo $\omega = ?$; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{H m}^{-1}$

] ¿a y b?

Como son los dos modos de menor frecuencia de corte y el primero no depende de la coordenada "y" y $E_z = 0$, debe ser un modo TE_{m0} (m=1 porque es el menor fc). Análogamente el segundo que no depende de "x" y $E_z = 0$, es un TE_{0n} (n=1 porque es el de menor fc).

Identificando con las expresiones generales de los campos:

$$\text{sen}(52{,}3598x) = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\Big|_{m=1} \longrightarrow \frac{\pi}{a} = 52{,}3598 \longrightarrow a = 0{,}06\text{m} = 6\text{ cm}$$

$$\text{sen}(78{,}5398y) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\Big|_{n=1} \longrightarrow \frac{\pi}{b} = 78{,}5398 \longrightarrow b = 0{,}04\text{m} = 4\text{cm}$$

] Los modos que se están propagando son el TE_{10} y el TE_{01}.

$$f_{c\,TE_{10}} = \frac{c}{2a} = 2{,}5\text{ GHz} ; \quad f_{c\,TE_{01}} = \frac{c}{2b} = 3{,}75\text{ GHz}.$$

] Identificando en el modo TE_{10}: $\beta_{g10} = \dfrac{2\pi}{\lambda_{g10}} = \dfrac{2\pi\sqrt{1-(f_{c10}/f_T)^2}}{\lambda_0} = \overset{\downarrow}{\overbrace{\dfrac{2\pi\sqrt{f_T^2 - f_c^2}}{c_0}}}$

$$\left(\frac{\beta_{g10}\cdot c_0}{2\pi}\right)^2 + f_c^2 = f_T^2 ; \quad f_T = \sqrt{f_c^2 + \left(\frac{\beta_{g10}\cdot c_0}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{\underset{\overset{\uparrow}{(2{,}5\cdot 10^9)^2}}{\cancel{2{,}5\cdot 10^9}} + \left(\frac{65{,}45\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi}\right)^2} \simeq 4\text{ GHz}$$

+ También podemos obtener f_T del modo $TE_{01} \longrightarrow \beta_{g01} = 29{,}22\ \text{rad m}^{-1}$ ...

e) Los 3 siguientes modos serán TE_{20}, TE_{02} y TE_{11}.

$f_{cTE_{20}} = 5$ GHz; $f_{cTE_{02}} = 7{,}5$ GHz; $f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = 4{,}507$ GHz.

$f_{cTE_{21}} = f_{cTM_{21}} = \frac{c_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{2^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2}\sqrt{\frac{4}{0{,}06^2}+\frac{1}{0{,}04^2}} = 6{,}25$ GHz.

Así, la frecuencia de corte de los 3 siguientes modos son:

- 4,507 GHz ⟶ TE_{11} y TM_{11}
- 5 GHz ⟶ TE_{20}

f) $P_{T\,TE_{10}} = \frac{|E_{oy}|^2\, a\, b}{4 \cdot \eta / \sqrt{1-(f_{c10}/f_T)^2}} = \frac{10^2 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}04}{4 \cdot 120\pi / \sqrt{1-(2{,}5/4)^2}} = 124{,}24$ mW

Identificando con la expresión general $E_{oy} = 10\ Vm^{-1}$ $\quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega$.