3º Test TPO 2012 - 2013

Por una guía rectangular vacía de dimensiones $a = 1,5b$ se propaga en el modo fundamental una onda electromagnética de 6 GHz y de potencia $2,2 \cdot 10^{-5}$ W, cuya longitud de onda dentro de la guía es 90,45 mm.

1) La anchura de la guía es:

a) 15 mm

b) 20 mm

c) 30 mm ← por descarte

d) 40 mm

2) La frecuencia de corte del modo fundamental es:

a) 2,5 GHz $\quad f_{c10} = \frac{c}{2a}$

b) 5,0 GHz ←

$f_{c10} = 5$ GHz es la única por debajo de 6 GHz que casa con un valor de

c) 7,5 GHz

$a \longrightarrow a = 30$ mm

d) 10 GHz

3) La frecuencia de corte del segundo modo es:

a) 5 GHz

b) 7,5 GHz ← $\quad f_{c0,1} = 7,56$ GHz

c) 10 GHz

d) 15 GHz

4) El rango de frecuencias en el que se propagan única y exclusivamente dos modos es:

a) 5-10 GHz

b) 7,5-10 GHz

Tercer modo

c) 7,5-9,6 GHz ← $\quad f_{c11} = 9,01$ GHz

d) 5,0-9 GHz

5) El valor máximo de amplitud del campo eléctrico es:

a) 10 Vm^{-1}

b) 20 Vm^{-1}

c) 30 Vm^{-1}

d) 40 Vm^{-1}

⑥ Si el eje x coincide con el lado mayor de la guía y el eje con el lado menor de la guía, la expresión del campo eléctrico para el modo fundamental es:

a) $\vec{E} = \left[E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{y} + E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z} \right] e^{-j\beta z}$

b) $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}\hat{x}$

c) $\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{b}\right) e^{-j\beta z}\hat{y}$

d) Ninguna de las anteriores.

⑦ El máximo valor de la constante dieléctrica ε_r que puede tener un material que se introdujera en la guía para que a la frecuencia de 6 GHz se propague un único modo es:

El ε_r va en la raíz del denominador: $f_{c0,1} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{b}$ 2º modo

a) $\varepsilon_r = 1{,}12$

b) $\varepsilon_r = 1{,}25 \rightarrow f_{c01} = 6{,}76$ GHz $\rightarrow$ se pasa $\rightarrow$ se propaga un solo modo

c) $\varepsilon_r = 1{,}5625 \rightarrow f_{c01} = 5{,}9956$ GHz $\rightarrow$ no se pasa de 6 GHz $\rightarrow$ se propagan 2 modos.

CORRECTA

d) $\varepsilon_r = 2$

Si se introduce en la guía un material que tuviera $\varepsilon_r = 4$, $\tan\delta = 10^{-4}$ y la frecuencia de trabajo es de 6 GHz.

⑧ Se propagarían por la guía:

a) Un modo

b) Dos modos

c) Tres modos

d) Más de tres modos.

⑨ La atenuación que sufriría el modo fundamental en dB/m es:

a) 0,007 dB/m

b) 0,014 dB/m

c) 0,06 dB/m

d) 0,12 dB/m

⑩ La longitud de onda dentro de la guía para el modo fundamental es:

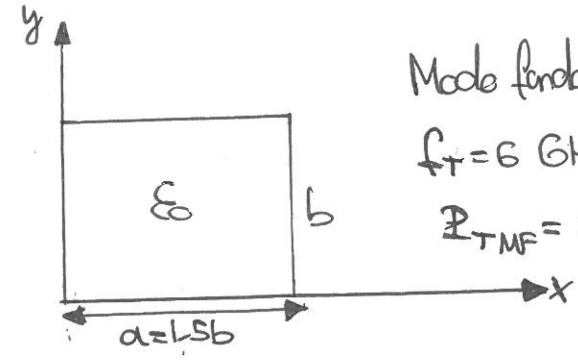
a) 25 mm

b) 27,5 mm

c) 50 mm

d) 55 mm

Solución 3º Test TPO



Modo fundamental (TE_{10})

$f_T = 6$ GHz $\qquad \lambda_{g10} = 90{,}45$ mm

$P_{TMF} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ W

1) $$\lambda_{g10} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_{cTE10}/f_T)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}} = 90{,}45\text{ mm} \longrightarrow f_{c10} = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{c_0}{\lambda_g}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(6\cdot 10^9)^2 - \left(\frac{3\cdot 10^{11}}{90{,}45}\right)^2} = 5\text{ GHz}$$

$$f_{c10} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{2a} \longrightarrow a = 30\text{mm};\ b = 20\text{mm}$$

2) $f_{10} = 5$ GHz

3) $$f_{cTE_{01}} = \frac{c_0}{2b} = 7{,}5\text{ GHz}$$

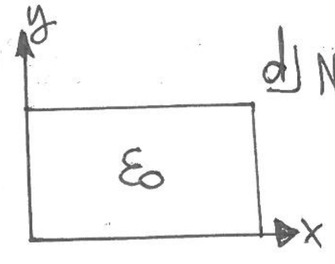
4) $$f_{cTE_{20}} = \frac{c_0}{2a} \cdot 2 = 10\text{ GHz}$$

4) $$f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = \frac{c_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 9{,}01\text{ GHz} \longrightarrow$$ de 7,5 GHz a 9,01 se propagan 2 modos.

Esta fórmula sólo vale con el TE_{10}

5) $$P_{TE_{10}} = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\text{ W} = \frac{|E_0|^2 \cdot a \cdot b}{4 \cdot Z_{TE_{10}}} = \frac{E_0^2 \cdot a \cdot b}{4\eta_0} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2} \longrightarrow E_0 = 10\text{ Vm}^{-1}$$

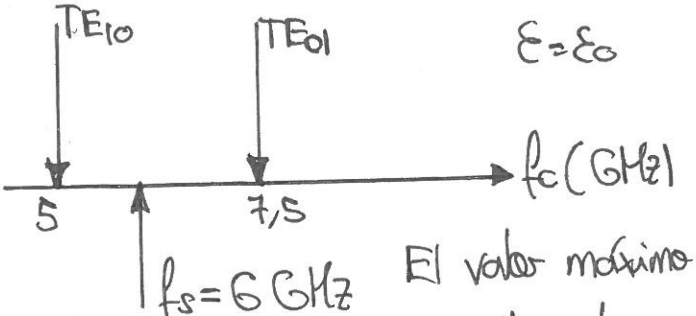
6)



d) Ninguna de las anteriores.

$$\vec{E}_{TE_{10}} = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot \hat{y}$$

7)



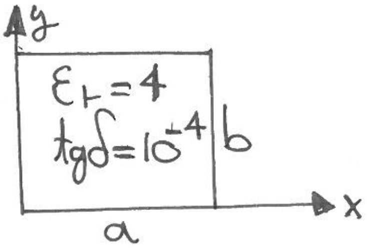
$\varepsilon = \varepsilon_0$

El valor máximo de ε_r para que la guía siga siendo monomodo a 6 GHz es aquella en la que:

$$f'_{cTE_{01}} = 6\text{ GHz} \longrightarrow \frac{c_0}{2b\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{7{,}5}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 6\text{ GHz}$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{7{,}5}{6}\right)^2 = 1{,}5625$$

8)



$f_T = 6\,GHz$

d) Más de tres modos.

$TE_{10}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11}$ mínimo

$$f'_{cTE_{11}} = f'_{cTM_{11}} = \frac{c_0}{2\sqrt{4}} \cdot \sqrt{\frac{1^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 4{,}5\,GHz$$

9)

$$\alpha_d = \frac{1}{2} tg\delta \frac{\beta_0}{\sqrt{1-(f'_c/f_T)^2}} = \frac{1}{2} tg\delta \cdot \frac{\omega\sqrt{\mu_0 4 \varepsilon_0}}{\sqrt{1-(f'_{c10}/f_T)^2}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2\pi \cdot 6 \cdot 10^9 \sqrt{4}}{3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{2{,}5}{6}\right)^2}}$$

$$= 0{,}013823\ Np\,m^{-1} = 0{,}1206\ dB\,m^{-1}$$

$1\,Np = 8{,}7\,dB$

Yo pondría d ya que quizá la $tg\delta = 10^{-5}$.

10)

$$\lambda'_{g10} = \frac{\lambda'_0}{\sqrt{1-(f'_c/f_T)^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{f_T^2 - f'^2_{c10}}} = \frac{c_0/\sqrt{4}}{\sqrt{(6 \cdot 10^9)^2 - (2{,}5 \cdot 10^9)^2}} = 27{,}5\,mm$$

SEPTIEMBRE 2008
PROBLEMA 3

El campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga por el interior de una guía rectangular en el modo fundamental tiene la siguiente expresión:

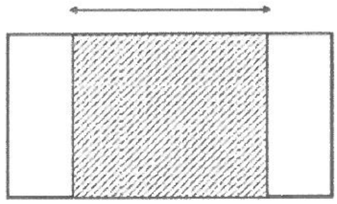
$$\vec{E} = E_0 \,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z)\exp(j\omega t)\hat{y}$$

$$\beta_g = 51.30\ \text{m}^{-1} \qquad \omega = 2\pi\cdot 3.5\cdot 10^9\ \text{s}^{-1}$$

El segundo modo tiene una frecuencia de corte un 60% superior a la frecuencia de corte del modo fundamental.

a) Determine las dimensiones de la guía y las frecuencias de corte de los tres primeros modos

b) Determine, respecto de la potencia total que se propaga por la guía, qué porcentaje de potencia se propaga a través de una sección central de la guía de anchura d en el caso en el que $d = a/2$. (Ver figura)



Si no ha podido determinar las dimensiones de la guía, para resolver los siguientes apartados elija los siguientes valores: a = 30 mm; b = 18.75 mm

Si la guía se rellena por un dieléctrico con permitividad eléctrica $\varepsilon_r = 4$ y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0.001$, determine:

c) Rango de frecuencias en los que ocurre propagación en un único modo

d) Longitud de la guía para que una onda electromagnética, cuya frecuencia es la central del intervalo calculado en el apartado anterior, se atenúe 10 dB.

e) Longitud de la guía para que una onda electromagnética, cuya frecuencia es la mitad de la frecuencia del apartado anterior, se atenúe 30 dB.

a) En la expresión del campo eléctrico, vemos que no tiene componente $\hat{z}$ → → luego es un modo TE y sólo tiene componente $\hat{y}$ → como es el modo fundamental → Se trata del modo TE_{10}

$$f_c(TE_{10}) = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{a} \quad ; \text{ donde la frecuencia de trabajo } f = 3'5\cdot 10^9\ \text{GHz}$$

$$\beta_g = 51'30\ \text{m}^{-1} \longrightarrow \beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \longrightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{2\pi}{51'30} = 0'1224\ \text{m}$$

$\lambda_0 \equiv$ longitud de onda en el exterior de la guía (como si "no existiera" la guía). Como no dicen nada, suponemos el vacío.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8}{3'5\cdot 10^9} = 0'08571\ m$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2}} \longrightarrow \sqrt{1-\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2} = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \longrightarrow -\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 - 1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{f_{c_{10}}}{f} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2} \quad ; \quad f_{c_{10}} = f\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2} = 3'5\cdot 10^9 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0'08571}{0'1224}\right)^2}$$

$$\boxed{f_{c_{10}} = 2'5\ GHz}$$

Nos dicen que el segundo modo tiene una frecuencia un 60% superior al fundamental $\longrightarrow$ si la guía fuera óptima, la frecuencia sería el doble, luego NO ES UNA GUÍA ÓPTIMA ($a \neq 2b$).

$$f_{c_{10}} = 2'5\ GHz \longrightarrow 2'5\ GHz \cdot \frac{60}{100} = 1'5\ GHz \text{ superior.}$$

$$\boxed{\text{Segundo modo} \longrightarrow f_c = 2'5\ GHz + 1'5\ GHz = 4\ GHz}$$

$$f_{c_{10}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{a} \longrightarrow \boxed{a = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{f_{c_{10}}} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\cdot\frac{1}{2'5\cdot 10^9} = 0'06\ m = 60\ mm}$$

$$\lambda_0 = \frac{V_0}{f} \longrightarrow V_0 = \lambda_0\cdot f = 0'08571\cdot 3'5\cdot 10^9 = 3\cdot 10^8\ m/s$$

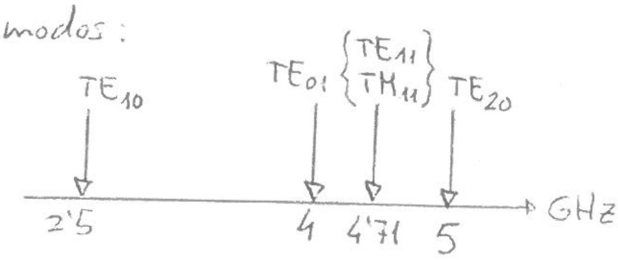
Usando el segundo modo $\longrightarrow TE_{01} \longrightarrow f_{c_{01}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{b} \longrightarrow b = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{f_{c_{01}}}$

$$\boxed{b = \frac{3\cdot 10^8}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot 10^9} = 0'0375\ m = 37'5\ mm}$$

Si observamos las frecuencias de corte de los modos:

$TE_{10} \longrightarrow f_{c_{10}} = 2'5\ GHz$ (fundamental)

$TE_{01} \longrightarrow f_{c_{01}} = 4\ GHz$

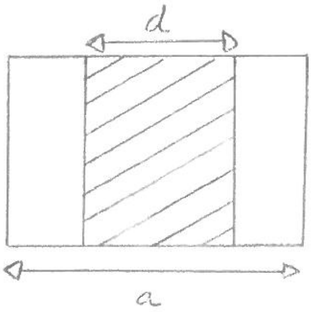


$$\left\{\begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix}\right\} \longrightarrow \boxed{f_{c_{11}} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} \simeq 4'717\ GHz}$$

$$TE_{20} \longrightarrow \boxed{f_{c_{20}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{2}{a} = 2\cdot f_{c_{10}} = 5\ GHz}$$

Los tres primeros modos son $\longrightarrow TE_{10} - TE_{01} - \begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix}$

b)



$d = \frac{a}{2}$

Comparamos la potencia total con la de la zona central.

$$P_{TOTAL} = \oiint_S \langle \vec{S}t \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[\vec{E}t \times \vec{H}t \right] \cdot d\vec{S}$$

$$P_{TOTAL} = \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} \frac{1}{2} \frac{|E_{oy}|^2}{Z_{TE}} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \cdot dy = \iint \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{Z_{TE}} dx \cdot dy$$

Para el modo fundamental (TE_{10}), sabemos que la potencia total es:

$$P_{TOTAL} = \frac{1}{4} \frac{|E_{oy}|^2}{Z_{TE}} \cdot a \cdot b$$

Calculamos ahora la potencia en la sección central de la guia:

$$P_{sección} = \int_{x=\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \int_{y=0}^{b} \frac{1}{2} \frac{|E_{oy}|^2}{Z_{TE}} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) dx \cdot dy = \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \int_{x=\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot b \cdot dx =$$

$$= \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot b \cdot \int_{x=\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{2} dx = \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[x - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \frac{a}{2\pi} \right]_{\frac{a}{4}}^{\frac{3a}{4}} =$$

$$= \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[\left(\frac{3a}{4} - \frac{a}{4}\right) - \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi \cdot 3a}{4a}\right) \frac{a}{2\pi} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{4a}\right) \frac{a}{2\pi} \right) \right] =$$

$$= \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{a}{2} - \left(\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1} \frac{a}{2\pi} - \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \frac{a}{2\pi} \right) \right] = \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{a}{2} - \frac{a}{2\pi}(-1-1) \right] =$$

$$= \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{a}{2} + \frac{a}{\pi} \right] = \frac{|E_{oy}|^2}{2 \cdot Z_{TE}} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{a\pi + 2a}{2\pi} \right]$$

Comparando ambas potencias:

$$\boxed{\frac{P_{TOTAL}}{P_{SECCIÓN}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{|E_{0y}|^2}{Z_{TE}}\cdot a\cdot b}{\frac{|E_{0y}|^2}{4\cdot Z_{TE}}\cdot b\cdot\left(\frac{\pi+2}{2\pi}\right)a} = \frac{2\pi}{\pi+2} = 1'222}$$

$$P_{TOTAL} = 1'222\cdot P_{SECCIÓN} \longrightarrow \boxed{\frac{P_{SECCIÓN}}{P_{TOTAL}} = \frac{1}{1'222} = 0'8183\cdot 100\% = 81'83\,\%}$$

La potencia en la sección central es del 81'83% de la potencia total en la guía. Esto es normal ya que el campo $\vec{E}$ en la guía es mayor en el centro que en las proximidades de las paredes.

c) Dieléctrico de la guía $\left\{\begin{array}{l}\epsilon_r = 4\\ \tan\delta = 0'001\end{array}\right\}$

Al variar el dieléctrico del interior, han cambiado las propiedades de la guía y también las frecuencias de corte de los modos.

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c}\cdot\sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi\cdot 3'5\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\sqrt{4} = 146'6\ m^{-1}$$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2\pi}{146'6} = 0'04285\ m^{-1} \longrightarrow V_0 = \lambda_0\cdot f = 0'04285\cdot 3'5\cdot 10^9 = 1'5\cdot 10^8\ m/s$$

$$f_{c_{10}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1'5\cdot 10^8}{2}\cdot\frac{1}{0'06} = 1'25\ GHz.\ (TE_{10})$$

$$f_{c_{01}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{b} = \frac{1'5\cdot 10^8}{2}\cdot\frac{1}{0'0375} = 2\ GHz\ (TE_{01})$$

$$f_{c_{11}} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2} \simeq 2'3585\ GHz\left\{\begin{array}{l}TE_{11}\\ TM_{11}\end{array}\right\}$$

$$f_{c_{20}} = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{2}{a} = 2\cdot f_{c_{10}} = 2'5\ GHz\ (TE_{20})$$

Por lo tanto, el rango de frecuencias en los que hay propagación en un único modo es el que comprende desde $f_{c_{10}}$ y $f_{c_{01}}$:

$$1'25\ GHz \text{ —— } 2\ GHz \longrightarrow \boxed{750\ MHz}$$ de Ancho de Banda.

d) Nuestra frecuencia de trabajo es ahora:

$$f_T = \frac{1'25\,GHz + 2\,GHz}{2} = 1'625\ GHz.$$

$$\tan\delta = 0'001 \longrightarrow \alpha = \frac{\beta_0 \cdot \tan\delta}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2}} = \frac{68'06 \cdot 0'001}{2\sqrt{1-\left(\frac{1'25\cdot 10^9}{1'625\cdot 10^9}\right)^2}} = 0'05326\ m^{-1}$$

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\cdot f_T}{c}\cdot\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi\cdot 1'625\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}\cdot\sqrt{4} = 68'06\ m^{-1}$$

$$\alpha\,(dB/m) = 8'68\cdot\alpha\,(m^{-1}) = 0'4623\ dB/m$$

$$A\,(dB) = \alpha(dB/m)\cdot L(m) \longrightarrow \boxed{L(m) = \frac{A(dB)}{\alpha(dB/m)} = \frac{10}{0'4623} \simeq 21'63\,m}$$

Es la longitud de la guía para atenuar 10 dB.

e) Ahora, nuestra frecuencia de trabajo será:

$$f_T = \frac{1'625\ GHz}{2} = 812'5\ MHz.$$

La frecuencia de corte del modo fundamental (TE_{10}) es de 1'25 GHz.
Esto quiere decir que estoy trabajando por debajo de la frecuencia de corte de la guía, por lo que no existe propagación de la onda en la guía.
Con un poco que "me mueva" voy a tener mucha atenuación.
En estas condiciones la constante de propagación es real.

$$\gamma \equiv \alpha \equiv \text{REAL} \longrightarrow \alpha = \beta_0\sqrt{\left(\frac{f_{c10}}{f_T}\right)^2 - 1}$$

$$\beta_0 = \frac{2\pi\cdot f_T}{c}\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{2\pi\cdot 812'5\cdot 10^6}{3\cdot 10^8}\sqrt{4} = 34'034\ m^{-1}$$

$$\alpha = 34'034\sqrt{\left(\frac{1'25\cdot 10^9}{812'5\cdot 10^6}\right)^2 - 1} = 39'79\ m^{-1} \longrightarrow \alpha(dB/m) = 8'68\cdot 39'79\ m^{-1} \simeq 345'37\,dB/m$$

$$A\,(dB) = \alpha\,(dB/m)\cdot L\,(m) \longrightarrow \boxed{L(m) = \frac{A(dB)}{\alpha(dB/m)}} = \frac{30\,dB}{345'37\,dB/m} = 0'08686\ m = \boxed{86'86\ mm}$$

GUIA CIRCULAR

PROBLEMA 3. (3.5 Ptos.)

En una guía circular el campo eléctrico total para un modo mn en el interior de una guía vacía con un radio a para una frecuencia $\mathbf{4f_T}$ viene dado por:

$$E(r,\phi,t) = \left(\frac{-20\cdot}{\text{[illegible]}} \cdot J_2\left(1116'66\cdot r\right)\cdot\left[-0'707\cdot sen\left(2\cdot\phi\right)+0'707\cdot\cos\left(2\cdot\phi\right)\right]\hat{r} \right.$$

$$\left. +\frac{11166'6}{r}\cdot J_2'\left(1116'66\cdot r\right)\cdot\left[0'707\cdot\cos\left(2\cdot\phi\right)+0'707\cdot sen\left(2\cdot\phi\right)\right]\hat{\phi} \right)$$

$$e^{-j183'46\cdot\pi\cdot z}\, e^{j2\pi\cdot 60\cdot 10^{10} t}$$

Donde las variables r y Φ vienen dadas en metros y radianes respectivamente, y t en segundos.

Calcule:

a) Calcule el campo magnético total. Compruebe las condiciones de contorno para el campo magnético.

b) Impedancia del citado modo

c) ¿De que modo se trata? Justifique la respuesta y calcule la frecuencia de corte del citado modo. (DATO: Además de ser nulo $E\phi=0$ en el centro de la guía solo existe otro nulo en el interior de la guía(**r<a**))

d) Dimensión de la guía y longitud de onda en la guía, λ_G para el modo fundamental a la frecuencia $\mathbf{f_T}$.

e) Calcule el valor del campo para r=0.25a y Φ=1.5708 radianes, indique en que dirección iría y el modulo y fase

f) Calcule la constante de atenuación (dB/m) en el modo fundamental producida por un dieléctrico de tangente de perdidas tan δ=0.02 a una frecuencia 1.5fc del modo fundamental

g) Calcule la constante de atenuación (dB/mm) en el modo fundamental producida a una frecuencia 0.5fc del modo fundamental

TE	m1	m2	m3
0n	3.83	7.02	10.2
1n	1.84	5.33	8.53
2n	3.05	6.7	9.96

TM	m1	m2	m3
0n	2.4	5.52	8.65
1n	3.83	7.01	10.2
2n	5.13	8.41	11.61

96

PROB 3 SEPT 2004

modo $<\begin{matrix} TE_{mn} \\ TM_{mn} \end{matrix}$

frecuencia de trabajo $f = 4 f_T$

¡¡OJO!! Hay una errata en el $\vec{E}_{TOT}$ dado.

$$\vec{E}_{TOT}(r,\phi,z) = \Big[-20\, J_2(1116'66\cdot r)\left[-0'707\cdot \text{sen}(2\phi) + 0'707\cdot\cos(2\phi)\right]\hat{r} +$$

$$+ \frac{1116'66}{r}\cdot J_2'(1116'66\cdot r)\left[0'707\cos(2\phi) + 0'707\cdot\text{sen}(2\phi)\right]\hat{\phi}\Big]\cdot$$

$$\cdot e^{-j\,183'46\pi\cdot z}\cdot e^{j2\pi\cdot 60\cdot 10^{10}\cdot t}, \ (V/m)$$

a) Aplicamos Maxwell-Faraday: $\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \dfrac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0}, (A/m)$

Calculamos el rotacional del campo dado en cilíndricas, teniendo en cuenta que:

$\vec{E}_{TOT}(r,\phi,z) = E_r(r,\phi,z)\,\hat{r} + E_\phi(r,\phi,z)\cdot\hat{\phi}$, por tanto:

$$\vec{H} = \frac{1}{-j\omega\mu_0}\left[\frac{-\partial E_\phi}{\partial z}\hat{r} + \frac{\partial E_r}{\partial z}\cdot\hat{\phi} + \frac{1}{r}\cdot\left[\frac{\partial(r\cdot E_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu_0}\Big[+j\,183'46\pi\cdot E_\phi\cdot\hat{r} - j\,183'46\pi\cdot E_r\cdot\hat{\phi} + \frac{1}{r}\Big[(1116'66)^2\cdot J_2''(1116'66 r)\left[0'707(\cos 2\phi + \text{sen}\,2\phi)\right]\cdot$$

$$\cdot e^{-j183'46\pi\cdot z}\cdot e^{j\omega t} + 20\,J_2(1116'66\cdot r)\left[-1'414\cdot\cos(2\phi) - 1'414\cdot\text{sen}(2\phi)\right]e^{-j183'46\pi z}\cdot e^{j\omega t}\Big]\hat{z}\Big]$$

$$= e^{-j\,183'46\pi z}\cdot e^{j\omega t}\Big[-\frac{183'46\pi}{\omega\mu_0}\cdot\frac{1116'66}{r}\, J_2'(1116'66\cdot r)\left[0'707\cdot\cos(2\phi) + 0'707\cdot\text{sen}(2\phi)\right]\cdot\hat{r} -$$

$$- \frac{183'46\pi}{\omega\mu_0}\cdot 20\cdot J_2(1116'66\, r)\left[-0'707\cdot\text{sen}(2\phi) + 0'707\cdot\cos(2\phi)\right]\cdot\hat{\phi} +$$

$$+ \frac{(1116'66)^2}{\omega\mu_0 r}\cdot J_2''(1116'66\cdot r)\left[0'707\cdot\cos(2\phi) + 0'707\,\text{sen}(2\phi)\right]\hat{z} +$$

$$+ \frac{40}{\omega\mu_0 r}\cdot J_2(1116'66\cdot r)\left[-0'707\cdot\cos(2\phi) - 0'707\cdot\text{sen}(2\phi)\right]\hat{z}\Big], (A/m)$$

La condición de contorno del campo magnético es: $\hat{n}\cdot(\bar{B}_2-\bar{B}_1)\rfloor_S=0$; como la guía es de conductor perfecto llegamos a: $B_{normal}=0$, es decir, la componente normal de $\bar{B}=\mu\vec{H}$ en $r=a$ debe ser nula.

Para que ésto fuera así, debería ser nula en $r=a$ la componente $\hat{r}$ de $\vec{H}$, y por tanto debería ser:

$$J_2'(1116'66\cdot a)=0$$

Como no sabemos de qué modo se trata no podemos saber directamente si esta condición se cumple, pero suponemos que el campo eléctrico dado sí cumple que: $\hat{n}\times(\bar{E}_2-\bar{E}_1)=\bar{0} \Leftrightarrow E_{2tang}\rfloor_S=E_{1tang}\rfloor_S$. Al ser el conductor perfecto debe ser cero la componente tangencial de $\bar{E}$ en $r=a$, es decir debe ser cero la componente $\hat{\phi}$ del campo eléctrico en $r=a$, y por tanto se debe cumplir que:

$$J_2'(1116'66\cdot a)=0$$ por lo que la condición de contorno para el campo magnético también se cumple.

b) Sabiendo que es $\hat{z}$ la dirección de propagación se cumple que:

$$\vec{E_t}=Z_{modo}(\vec{H_t}\times\hat{z}) \text{ ó } E_r\hat{r}+E_\phi\hat{\phi}=Z_{modo}((H_r\hat{r}+H_\phi\hat{\phi})\times\hat{z})=$$
$$=Z_{modo}(-H_r\hat{\phi}+H_\phi\hat{r})$$

Por tanto: $$\boxed{Z_{modo}}=\frac{E_r}{H_\phi}=\frac{E_\phi}{-H_r}=\frac{\omega\mu_0}{183'46\cdot\pi}=\left\{\begin{array}{l}\text{Identificando}\\ e^{j2\pi\cdot 60\cdot 10^{10}t}=e^{j\omega t}\end{array}\right\}=$$
$$=\frac{(2\pi\cdot 60\cdot 10^{10})(4\pi\cdot 10^{-7})}{183'46\cdot\pi}=\boxed{8219'58}\ (\Omega)$$

NOTA: Otra forma de calcular Zmodo es identificando las 2 exponenciales del campo eléctrico dado con: $e^{-j\beta_g z}\cdot e^{j\omega t}$, y llegamos a:

$\omega=2\pi\cdot 60\cdot 10^{10}$ rad/seg ; $\beta_g=183'46\cdot\pi$ (rad/m) ;

Como la guía está vacía: $\beta_g=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$ de donde obtenemos

$$\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=\frac{\beta_g}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\frac{183'46\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^8}{2\pi\cdot 60\cdot 10^{10}}=0'045865.$$

Como se trata de un modo TE porque el campo $\vec{E}$ no tiene componente $\hat{z}$ tenemos que:

$$\boxed{Z_{modo}}=\frac{\eta}{\ldots}=\frac{120\pi}{\ldots}=\boxed{8219'58}\ (\Omega)$$

c) Sabemos que se trata de un modo TE porque el campo $\bar{E}$ no tiene componente en $\hat{z}$. Por otro lado sabemos que en las guías circulares, el subíndice de las funciones de Bessell es el subíndice m, siendo el modo TEmn. Por eso en nuestro caso $m=2$.
Por tanto por la tabla dada sólo tenemos 3 posibilidades:

TE	m1	m2	m3
2n	3'05	6'7	9'96

Por otro lado sabemos que en los modos TEmn el argumento de las funciones de Bessell que tenemos es: $\frac{P'_{mn}}{a} r$, es decir que en los modos TEmn las funciones de Bessell que aparecen son $J_m\left(\frac{P'_{mn}}{a} r\right), J'_m\left(\frac{P'_{mn}}{a} r\right)$, $J''\left(\frac{P'_{mn}}{a} r\right)$, ... siendo $P'_{mn} = \chi'_{mn}$ los cero de J'_m, que para J'_{2n} son los números de la tabla anterior.
Así pues la componente $\hat{\phi}$ de $\vec{E}$, E_ϕ tiene la siguiente función de Bessell:

$$J'_2(1116'66 \cdot r) \text{ , que debemos identificarla con: } J'_2\left(\frac{P'_{2n}}{a} \cdot r\right)$$

Esta función $J'_2\left(\frac{P'_{2n}}{a} r\right)$ se anula siempre en $r=a$ ya que $P'_{2n} = 3'05, 6'7, 9'96, \ldots$ son los ceros de J'_2. Si $n=1$ tendríamos que $1116'66 = \frac{P'_{21}}{a} = \frac{3'05}{a}$, pero eso querría decir que $J'_2\left(\frac{3'05}{a} r\right)$ se anula en $r=a$ y en ningún r más dentro de la guía, es decir $r<a$. Como el enunciado dice que hay otro nulo en $r<a$ debe ser $n=2$ de tal forma que:

$J'_2(1116'66 \cdot r) = J'_2\left(\frac{P'_{22}}{a} r\right) = J'_2\left(\frac{6'7}{a} r\right)$ y observamos que esta función, es decir E_ϕ, se anula en $r=a$ ya que $J'_2(6'7)=0$ y también en $r = a \cdot \frac{3'05}{6'7}$ ya que $J'_2(3'05)=0$ y en ningún $r<a$ más, por tanto el modo es el TE_{22}

d) Como el modo es el TE_{22} tenemos que:

$$J_2'(1116'66\, r) = J_2'\left(\frac{P_{22}'}{a} r\right) = J_2'\left(\frac{6'7}{a} r\right)$$, por tanto:

$$\boxed{a = \frac{6'7}{1116'66} = 0'006 \text{ m} \cong 6 \text{ mm}}$$

$$\lambda_G = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)}} \text{ (m)}$$ siendo: $\lambda_0 = \frac{c_0}{f}$ (m) y $f = f_T$

$f_c = f_c$ del modo dominante. (TE_{11})

En el enunciado nos dicen que el modo dado está dado a la frecuencia $4 f_T$ e identificando sabemos que: $e^{j\, 2\pi \cdot 60 \cdot 10^{10} t} = e^{j\omega t}$

Por tanto $\omega = 2\pi \cdot 60 \cdot 10^{10} \Rightarrow f = 60 \cdot 10^{10} = 4 f_T \Rightarrow \boxed{f_T = 150 \text{ GHz}}$

Por otro lado $f_c = f_{c_{TE_{11}}} = \frac{P_{11}'}{2\pi a \cdot \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1'84 \cdot 3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 14'64 \text{ GHz}$

y finalmente:

$$\boxed{\lambda_G = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f^2 - f_c^2}} = 2 \text{ mm}}$$

e) $$\boxed{\vec{E}\left(r = 0'25\, a,\ \phi = \underset{1'5708}{\frac{\pi}{2}}\right)} = \left\{ 1116'66 = \frac{6'7}{a} \right\} = \left[120 \cdot J_2(6'7 \cdot 0'25)\, 0'707\, \hat{r} - \frac{1116'66}{0'25\, a} \cdot J_2'(6'7 \cdot 0'25)\, 0'707\, \hat{\phi} \right] \cdot e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} =$$

$$\boxed{= \left[14'14 \cdot J_2(1'675)\, \hat{r} - 526319'08 \cdot J_2'(1'675)\, \hat{\phi} \right] \cdot e^{-j\, 183'46\pi z} \cdot e^{j 2\pi \cdot 60 \cdot 10^{10} t} \ , \text{V/m}}$$

El campo se propaga hacia $\hat{z}$ y la dirección en la que está orientado es:

$$\hat{u}_E = \frac{14'14 \cdot J_2(1'675)\, \hat{r} - 526319'08 \cdot J_2'(1'675)\, \hat{\phi}}{\sqrt{\left(14'14 \cdot J_2(1'675)\right)^2 + \left(526319'08 \cdot J_2'(1'675)\right)^2}}$$

El módulo del campo es la raíz cuadrada del denominador anterior y la fase ($\omega t - \beta_g z = 2\pi \cdot 60 \cdot 10^{10} t - 183'46\pi z$) depende de z y de t.

98

f) $\alpha_d \underset{\text{BAJAS PÉRDIDAS PORQUE } tg\,\delta \ll 1}{\simeq} \frac{1}{2} K \cdot \frac{tg\,\delta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$, (Np/m)

siendo:

$f_c = f_{c_{TE_{11}}} = 14'64$ GHz

$f = 1'5 \cdot f_c = 21'96$ GHz

$K = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi f}{3 \cdot 10^8} =$ [redacted] 460 rad/m

$tg\,\delta = 0'02$

Por tanto: $\boxed{\alpha_d\,(dB/m)} = 8'7\,(dB/Np) \cdot \frac{1}{2}\, 460\, \frac{0'02}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1'5}\right)^2}} = \boxed{53'69}$ dB/m

g) $\underset{f<f_c}{\alpha} = \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma_c^2} = \sqrt{-\omega^2\mu_0\varepsilon_0 + \omega_c^2\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\sqrt{-\omega^2+\omega_c^2}}{3\cdot 10^8} = \frac{\sqrt{(2\pi \cdot f_c)^2 - (2\pi \cdot 0'5 \cdot f_c)^2}}{3 \cdot 10^8} =$

$= \frac{2\pi}{3\cdot 10^8} \cdot \sqrt{f_c^2 - \frac{f_c^2}{4}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 10^8} f_c = \left\{ f_c = f_{c_{TE_{11}}} = 14'64 \text{ GHz} \right\} =$

$= 265'54$ (Np/m)

$\boxed{\alpha\,(dB/mm)} = 265'54 \cdot 8'7 \cdot \frac{1}{1000} = \boxed{2'31}$ dB/mm

FEBRERO 2006

PROBLEMA 3

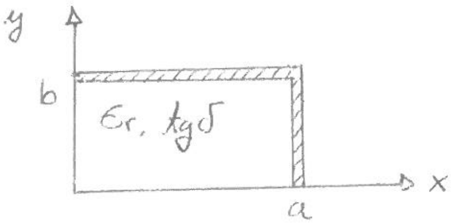
Se desea diseñar una guía rectangular con las siguientes características:

- Está rellena de un dieléctrico con constante dieléctrica de valor $\varepsilon_r = 4$, y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0{,}001$.
- Debe funcionar en el modo fundamental con el mayor ancho de banda posible.
- Debe transmitir la máxima potencia posible.
- La frecuencia de trabajo es de 12 GHz, la cual debe coincidir con la frecuencia central del intervalo en el que hay propagación en un único modo.

Determine:

a) Dimensiones de la guía.
b) Frecuencia de corte de los cuatro primeros modos.
c) Valor de la máxima potencia que puede transmitir si la amplitud máxima del campo eléctrico que puede soportar el dieléctrico que ocupa el interior de la guía es 1 MV/m.
d) Máxima longitud que puede tener la guía si las pérdidas deben ser inferiores a 3 dB.
e) Expresión temporal del campo magnético en el interior de la guía para el modo fundamental.

a) Trabajando en el modo fundamental, el mayor ancho de banda se obtiene cuando la guía es óptima $\rightarrow a = 2b$



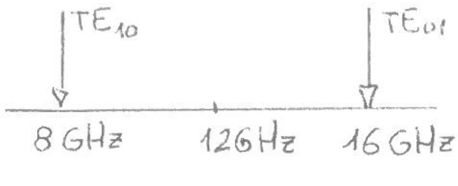
Entonces, el modo fundamental es el transversal eléctrico 10 $\rightarrow TE_{10}$

$$f_c(TE_{10}) = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

El segundo modo, en estas condiciones, es el TE_{01} y está al doble de frecuencia $f_c(TE_{01}) = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{1}{b} \longrightarrow f_c(TE_{01}) = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{1}{a/2} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{2}{a} = 2 \cdot f_c(TE_{10})$

Como la frecuencia de trabajo está centrada en este intervalo, tenemos:

$$f = 12\ GHz = \frac{f_c(TE_{10}) + f_c(TE_{01})}{2} = \frac{f_c(TE_{10}) + 2 f_c(TE_{10})}{2} = \frac{3}{2} f_c(TE_{10})$$



$$f_c(TE_{10}) = \frac{2}{3} f = \frac{2}{3} \cdot 12\ GHz = 8\ GHz$$

$$f_c(TE_{01}) = 2 \cdot f_c(TE_{10}) = 2 \cdot 8\ GHz = 16\ GHz$$

Despejamos el valor de V_0 y con ello obtenemos las dimensiones de la guía:

$$n = \frac{c}{v} \longrightarrow V_0 = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{4}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 1'5 \cdot 10^8 \ m/s.$$

$$\boxed{a} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{1}{f_c(TE_{10})} = \frac{1'5 \cdot 10^8}{2 \cdot 8 \cdot 10^9} = \boxed{9'375 \ mm}$$

$$a = 2b \longrightarrow \boxed{b} = \frac{a}{2} = \frac{0'009375}{2} = \boxed{4'6875 \ mm}$$

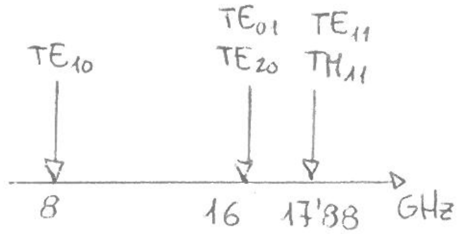
b) Calculamos las diferentes frecuencias de corte mediante la expresión:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Modo Fundamental $\longrightarrow TE_{10} \longrightarrow f_{c_{10}} = 8$ GHz

$TE_{01} \longrightarrow f_{c_{01}} = 16$ GHz.

$$\left\{\begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix}\right\} \longrightarrow f_{c_{11}} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = 17'88 \ GHz$$



$$TE_{20} \longrightarrow f_{c_{20}} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{2}{a} = f_{c_{01}} = 16 \ GHz.$$

Por lo tanto, los cuatro primeros modos son: $TE_{10} \text{ — } \begin{matrix} TE_{01} \\ TE_{20} \end{matrix} \text{ — } \begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix}$

c) Máxima potencia que se puede transmitir si $|E_0| = 1 \ MV/m$.

En general, para calcular la potencia tenemos que hacer la integral en la superficie de la guía del flujo:

$$P = \oiint_S \langle \vec{S}t \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{1}{2} Re\left[\vec{E}t \times \vec{H}t^*\right] \cdot d\vec{S}$$

En el modo fundamental:

$$P_T(TE_{10}) = \frac{|E_{0y}|^2}{4 \cdot Z_{TE}} \cdot a \cdot b$$

Primero calculamos la impedancia:

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2}} = \frac{60\pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{8 \cdot 10^9}{12 \cdot 10^9}\right)^2}} = 252'893 \ \Omega$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Rightarrow \underset{\text{medio no magnético}}{\mu = \mu_0} \ ; \ \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_{vacío}}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 60\pi \ \Omega$$

Con estos datos, obtenemos la máxima potencia:

$$\boxed{P_T(TE_{10}) = \frac{(10^6)^2}{4 \cdot 252'893} \cdot 0'009375 \cdot 0'0046875 = 43442'538\ W}$$

Comprobamos que se puede transmitir mucha potencia en una guía.

d)

Sabemos el valor de la tangente de pérdidas $\longrightarrow \tan\delta = 0'001$

$$\alpha = \frac{\beta_0 \cdot \tan\delta}{2\sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} = \frac{502'654 \cdot 0'001}{2\sqrt{1-\left(\frac{8 \cdot 10^9}{12 \cdot 10^9}\right)^2}} = 0'337\ m^{-1}$$

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v} = 2\pi f \cdot \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi \cdot f}{c}\sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}\sqrt{4} = 502'654\ m^{-1}$$

$$\alpha(m^{-1}) \longrightarrow \text{pasamos a} \longrightarrow \alpha(dB/m) = 8'68 \cdot \alpha(m^{-1}) = 8'68 \cdot 0'337 = 2'926\ (dB/m)$$

$$A(dB) = \alpha(dB/m) \cdot L(m) \longrightarrow \boxed{L(m) = \frac{A(dB)}{\alpha(dB/m)} = \frac{3}{2'926} = 1'025\ m}$$ es la máxima longitud para unas pérdidas de 3dB.

e)

El modo fundamental es el TE_{10} $\rightarrow$ solo tiene componente $\hat{y}$ el campo eléctrico $\vec{E}$.

$$E_y = E_{0y} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \longrightarrow \vec{E} = E_y \cdot \hat{y} = E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) e^{-j\beta_y z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \hat{y}$$

Para calcular el campo magnético, usamos el rotacional:

$$\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu} \qquad \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_y \cdot \hat{z} - \frac{\partial}{\partial z} E_y \cdot \hat{x}$$

$$\nabla \times \vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(\frac{\pi}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_y \cdot z} e^{j\omega t}\, \hat{z} - E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_y} (-j\beta_y) \cdot e^{j\omega t} \cdot \hat{x}$$

$$\vec{H} = -\frac{E_0}{\omega\mu}\beta_y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_y \cdot z} e^{j\omega t}\, \hat{x} + j\,\frac{E_0 \pi}{\omega \mu \cdot a} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-j\beta_y \cdot z} \cdot e^{j\omega t}\, \hat{z}$$

Expresado en el dominio del tiempo:

$$\boxed{\vec{H} = -\frac{E_0}{\omega\mu}\beta_y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta_y \cdot z)\, \hat{x} + \frac{E_0 \cdot \pi}{\omega\mu a} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \beta_y z + \frac{\pi}{2}\right) \hat{z}\ \ (H/m)}$$

SEPTIEMBRE 2006

PROBLEMA 1

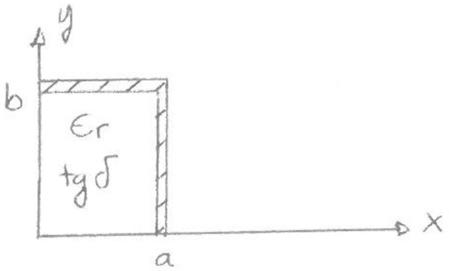
Se pretende diseñar una guía rectangular con las siguientes características:

- Está rellena de un material de constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 4$ y tangente de pérdidas $\tan\delta = 0.001$
- La relación entre la anchura y la altura es $a/b = 0.8$
- La frecuencia de trabajo es $f_t = 10$ GHz y coincide con la frecuencia central del intervalo en el que ocurre propagación en un único modo.

Determine:

a) Dimensiones de la guía.
b) Frecuencia de corte del modo fundamental.
c) Modos que se propagarían a una frecuencia $2f_t$ el doble de la frecuencia de trabajo.
d) Constante de atenuación en el modo fundamental a la frecuencia de trabajo f_t.
e) Constante de atenuación en el modo fundamental a una frecuencia $0.5f_t$ la mitad de la frecuencia de trabajo

a)



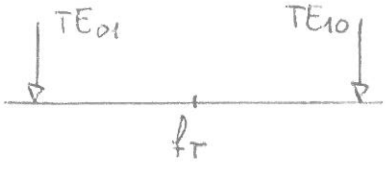
La frecuencia de trabajo coincide con la frecuencia central del intervalo en el que ocurre propagación en un único modo $\longrightarrow$ Buscamos el modo fundamental que sucede en la frecuencia de corte más baja $\longrightarrow a<b \longrightarrow$ $\longrightarrow$ El modo fundamental es el $TE_{01} \longrightarrow f_c(TE_{01}) = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{b}$

El segundo modo es el TE_{10} y el valor de su frecuencia será:

$$f_c(TE_{10}) = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{a} \longrightarrow f_c(TE_{10}) = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{1}{b\cdot 0'8} = 1'25\cdot f_c(TE_{01})$$

La frecuencia de trabajo está centrada en el intervalo de las dos frecuencias anteriores:

$$f_T = 10\ \text{GHz} = \frac{f_c(TE_{01}) + f_c(TE_{10})}{2} = \frac{f_c(TE_{01}) + 1'25\cdot f_c(TE_{01})}{2} = \frac{2'25}{2}\cdot f_c(TE_{01})$$



$$f_c(TE_{01}) = \frac{2}{2'25}\cdot f_T = \frac{2}{2'25}\cdot 10\cdot 10^9 = 8'\hat{8}\ \text{GHz}$$

$$f_c(TE_{10}) = 1'25\cdot f_c(TE_{01}) = 1'25\cdot 8'\hat{8}\cdot 10^9 = 11'\hat{1}\ \text{GHz}$$

Despejamos el valor de V_0 y obtenemos a continuación las dimensiones de la guía:

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow V_0 = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{4}} = 1'5 \cdot 10^8 \ m/s$$

$$\boxed{b} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{1}{f_{C(TE_{01})}} = \frac{1'5 \cdot 10^8}{2 \cdot 8'\hat{8} \cdot 10^9} = \boxed{8'4375 \ mm}$$

$$\boxed{a} = 0'8 \cdot b = 0'8 \cdot 0'0084375 = \boxed{6'75 \ mm}$$

b) La frecuencia de corte del modo fundamental la hemos calculado en el apartado anterior:

$$\boxed{f_C(TE_{01}) = 8'\hat{8} \ GHz}$$

c) Nuestra frecuencia de trabajo es ahora:

$$f_T = 2 f_T = 20 \ GHz.$$

$$f_{C_{01}} = 8'\hat{8} \ GHz \quad (TE_{01})$$

$$f_{C_{10}} = 11'\hat{1} \ GHz \quad (TE_{10})$$

$$f_{C_{11}} = \frac{V_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} \simeq 14'23 \ GHz \left\{ \begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix} \right\}$$

$$f_{C_{02}} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{2}{b} = 2 \cdot f_{C_{01}} = 17'\hat{7} \ GHz \quad (TE_{02})$$

$$f_{C_{20}} = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{2}{a} = 2 \cdot f_{C_{10}} = 22'\hat{2} \ GHz \quad (TE_{20})$$

Los modos que se propagan, son los que están por debajo de la frecuencia de trabajo:

$$TE_{01} \text{ ——— } TE_{10} \text{ ——— } \begin{matrix} TE_{11} \\ TM_{11} \end{matrix} \text{ ——— } TE_{02}$$

d) Nuestra frecuencia de trabajo es $f_T = 10\,GHz$.

$$\beta_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \cdot f_T}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{4} = 418'879\ m^{-1}$$

$\tan\delta = 0'001$

$$\boxed{\alpha = \frac{\beta_0 \cdot \tan\delta}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{C01}}{f_T}\right)^2}} = \frac{418'879 \cdot 0'001}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{8'\hat{8} \cdot 10^9}{10 \cdot 10^9}\right)^2}} \simeq 0'45716\ m^{-1}}$$

$$\boxed{\alpha\,(dB/m) = 8'68 \cdot \alpha\,(m^{-1}) = 3'97\ dB/m}$$

e) Nuestra frecuencia de trabajo es $f_T = \frac{10\,GHz}{2} = 5\,GHz$.

La frecuencia de corte del modo fundamental (TE_{01}) es de $8'\hat{8}\,GHz$. Esto quiere decir que estoy trabajando por debajo de la frecuencia de corte de la guía, por lo que no existe propagación de la onda en ella. Esto implica que tendré mucha atenuación:

$$\gamma \equiv \alpha \equiv \text{REAL} \longrightarrow \alpha = \beta_0 \sqrt{\left(\frac{f_{C01}}{f_T}\right)^2 - 1}$$

$$\beta_0 = \frac{2\pi \cdot f_T}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{2\pi \cdot 5\,GHz}{3 \cdot 10^8} \sqrt{4} \simeq 209'43951\ m^{-1}$$

$$\boxed{\alpha = 209'43951 \cdot \sqrt{\left(\frac{8'\hat{8} \cdot 10^9}{5 \cdot 10^9}\right)^2 - 1} \simeq 307'8471\ m^{-1}}$$

$$\boxed{\alpha\,(dB/m) = 8'68 \cdot \alpha\,(m^{-1}) \simeq 2673'926\ dB/m}$$

PROBLEMA 2 (3 puntos)

Por una guía rectangular de dimensiones $a = 2{,}5b$ se propagan los dos primeros modos a la frecuencia de $f = 12$ GHz.
El campo eléctrico asociado a la onda que se propaga por la guía tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = E_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}\hat{y} + E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_2 z} e^{j\omega t}\hat{y}$$

La longitud de onda en el interior de la guía para el modo fundamental tiene el valor de 27,50 mm.

Calcule:

a) Campo magnético asociado.
b) Dimensiones de la guía y frecuencia de corte de los cuatro primeros modos.
c) Valores de a, β_1, β_2.
d) Relación que debe existir entre E_1 y E_2 para que la potencia que propaga cada uno de los modos sea la misma.

Septiembre 2007. Problema 2 — Se propagan los 2 primeros modos; $f_T = 12$ GHz.

Guía Rectangular; $a = 2{,}5\,b$;

$\lambda_{gMF} = 27{,}50$ mm.

$$\vec{E} = E_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_1 z} e^{j\omega t}\hat{y} + E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_2 z} e^{j\omega t}\hat{y}$$

a) Por la ecuación de Maxwell: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -j\omega\mu_0\vec{H} \longrightarrow \vec{H} = \frac{\nabla\times\vec{E}}{-j\omega\mu_0}$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[-\left[-j\beta_1 E_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_1 z}\cdot e^{j\omega t} - j\beta_2\cdot E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_2 z}e^{j\omega t}\right]\hat{x} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\pi}{a}E_1\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_1 z}e^{j\omega t} + \frac{2\pi}{a}E_2\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_2 z}e^{j\omega t}\right]\hat{z}\right]$$

$$= \frac{j}{\omega\mu_0}\left[j\beta_1 E_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_1 z}\cdot e^{j\omega t} + j\beta_2 E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_2 z}e^{j\omega t}\right]\hat{x} +$$

$$+ \frac{j}{\omega\mu_0}\left[\frac{\pi}{a}E_1\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_1 z}e^{j\omega t} + \frac{2\pi}{a}E_2\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)e^{-j\beta_2 z}e^{j\omega t}\right]\hat{z}$$

b) $a = 2{,}5\,b \longrightarrow a > b \longrightarrow$ Modo fundamental TE_{10}.

$$\lambda_{gMF} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_{c10}/f_T)^2}} = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}};\quad \lambda_{gMF}\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2} = C_0;\quad f_T^2 - f_{c10}^2 = \left(\frac{C_0}{\lambda_{gMF}}\right)^2;$$

$$f_{c10}^2 = f_T^2 - \left(\frac{C_0}{\lambda_{gMF}}\right)^2;\quad f_{c10} = \sqrt{f_T^2 - \left(\frac{C_0}{\lambda_{gMF}}\right)^2} = \sqrt{(12\cdot10^9)^2 - \left(\frac{3\cdot10^8}{27{,}50\cdot10^{-3}}\right)^2} = 5\text{ GHz}$$

c) $f_{c10} = 5$ GHz

$$f_{cTE_{01}} = \frac{c}{2b} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot12\cdot10^{-3}} = 12{,}5\text{ GHz}$$

$f_{cTE_{20}} = 2\cdot f_{cTE_{10}} = 10$ GHz

$f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = 13{,}46$ GHz

Calculamos a y b:

$$f_{c10} = \frac{C_0}{2a} \longrightarrow a = \frac{C_0}{2\cdot f_{c10}} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot5\cdot10^9} = 30\text{mm} \longrightarrow b = \frac{a}{2{,}5} = 12\text{ mm}$$

d) $a = 30$ mm

Identificando con las expresiones generales:

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{g1}} = \frac{2\pi}{27{,}50\cdot10^{-3}} = 228{,}48\text{ rad m}^{-1}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_{g2}} = \cdots = 138{,}926\text{ rad m}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{V}{f};\quad \lambda_{g2} = \frac{C_0}{f_{cTE_{20}}} = \frac{3\cdot10^8}{10\cdot10^9}$$

d)

$$P_{T_{TE_{10}}} = \frac{|E_{oy}|^2 ab}{4 Z_{TE_{10}}} = \frac{E_1^2 ab\sqrt{1-(5/12)^2}}{4\eta_0}$$

$$(*) = \frac{1-\cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right)}{2}$$

$$P_{T_{TE_{20}}} = \frac{1}{2} Re \iint_{S_t} (\vec{E_t} \times \vec{H_t}^*) \hat{z}\, dS_t = \frac{1}{2} Re \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \frac{\beta_2 E_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)^{(*)}}{\omega\mu_0}\, dx\, dy =$$

Todo dato excepto E_2

$$= \frac{1}{2} \beta_2 b \frac{E_2^2}{\omega\mu_0} \frac{a}{2}$$

Para que $P_{T10} = P_{T20} \longrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 0{,}78$

PROBLEMA 3 (3 puntos) Julio 2011

Por una guía rectangular de dimensiones a = 1,875b se envía una onda electromagnética en la dirección del eje z, de forma tal que se propagan tres modos diferentes. Cuando esta guía se termina en z = 0 por un cortocircuito se obtiene la siguiente expresión temporal de campo eléctrico en el interior de la guía para los dos modos de frecuencia de corte más baja:

$$\bar{E} = 20\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{20,78}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y} + 10\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{43,64}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t)\,\hat{x} \quad \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

donde x, y, z se miden en mm, *a* es la anchura de la guía, b es la altura de la guía.

Determine:

a) Dimensiones de la guía y frecuencia de trabajo.
b) Expresión temporal del campo eléctrico asociado al tercer modo que se propaga.

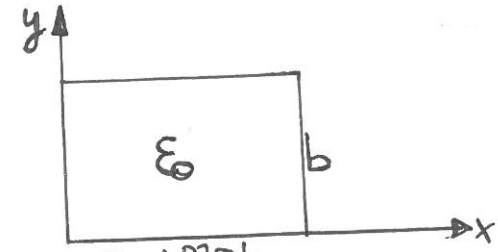
~~Si la guía se termina en z = 0 por una carga adaptada, calcule:~~
~~c) Potencia que se propaga por la guía asociada a cada uno de los dos primeros modos~~ con frecuencia de corte más baja.

Si no ha conseguido determinar las dimensiones de la guía y la frecuencia de trabajo, utilice en los apartados siguientes estos valores: a = 9,375 mm, b = 5 mm, f = 33 GHz.

Si la guía se termina en z = 0 por una carga adaptada y se rellena por un dieléctrico con $\varepsilon_r = 4$ y $\tan(\delta) = 0,001$, calcule:

d) Modos que se propagan a la frecuencia de trabajo.
e) Atenuación que sufre el modo fundamental si la guía tiene una longitud de 10 m.

Julio 2011



$a = 1{,}875b$

3 modos

$$f_{cTE_{10}} = \frac{C_0}{2a}$$

$$f_{cTE_{20}} = \frac{C_0}{2a}2$$

$$f_{cTE_{01}} = \frac{C_0}{2b} = \frac{C_0 \cdot 1{,}875}{2a}$$

Si $Z_L = 0 \longrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = 20\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{20{,}78}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\hat{y} + 10\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{43{,}64}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t)\hat{x}$ V/m

a/ $\lambda_{g10} = 20{,}78\text{ mm} = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_{c10}/f_T)^2}} = \dfrac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - \left(\frac{C_0}{2a}\right)^2}}$

$$\lambda_{g01} = 43{,}64\text{ mm} = \dots = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - \left(\frac{C_0}{2b}\right)^2}}$$

$a = 1{,}875b$

$$\boxed{\begin{aligned} &f_T = 16{,}50\text{ GHz} \\ &a = 18{,}74\text{ mm} \simeq 18{,}75\text{ mm} \\ &b = 10\text{ mm} \simeq 9{,}994\text{ mm} \end{aligned}}$$

b/ $f_{cTE_{10}} = \dfrac{C_0}{2a} = 8\text{ GHz}$

$$f_{cTE_{01}} = \frac{C_0}{2b} = 15\text{ GHz}$$

$$f_{cTE_{20}} = \frac{C_0}{2a}\cdot 2 = 16\text{ GHz}$$

$$f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = \frac{C_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}}\cdot\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \overset{\varepsilon_r = 1}{=} \frac{C_0}{2a}\cdot\sqrt{1^2 + (1{,}875)^2} = \frac{C_0}{2a}\,2{,}125 \qquad b = \frac{a}{1{,}875}$$

Debemos dar la expresión del TE_{20}:

El $\vec{E}_{TOTAL_{20}} = E_0' \cdot 2 \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{\lambda_{g20}}\right)\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\hat{y}$

$$\lambda_{g20} = \frac{C_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c_{20}}^2}}$$

c) Si $Z_L = Z_0 \longrightarrow$ Expresiones de la chuleta

$\overrightarrow{E_{TE_{10}}} = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \hat{y}$

$\overrightarrow{E_{TE_{10}}} = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \hat{x}$

$P_{TE_{10}}$

$P_{TE_{01}}$

d) $f_1 = 16{,}5$ GHz

$\varepsilon_r = 4$

$tg\delta = 0{,}001$

$f'_{c_{10}} = 4$ GHz

$f'_{c_{01}} = 7{,}5$ GHz

$f'_{c_{20}} = 8$ GHz

$f''_{cTE_{11}} = f'_{cTM_{11}} =$

e) $At(dB) = \alpha d \cdot 8{,}7 \cdot 10 = \ldots (dB)$

PROBLEMA 3 (3,5 puntos)

Se dispone de un cable coaxial de bajas pérdidas (debidas única y exclusivamente a los conductores), con constante dieléctrica relativa $\varepsilon_r = 4$ y de longitud igual a 10 metros. Al comienzo del cable se le suministra una potencia de 100 mW a la frecuencia de 300 MHz, mientras que al final del mismo se colocan distintas cargas, midiéndose en cada caso la potencia reflejada al comienzo del cable, obteniéndose los siguientes resultados:

1) $Z_L = 25\,\Omega \quad P_{ref} = 12\ dBm$
2) $Z_L = 150\,\Omega \quad P_{ref} = 8{,}46\ dBm$
3) Se cortocircuita el cable $\quad P_{ref} = 18\ dBm$

a) Determine los parámetros primarios y secundarios del cable.

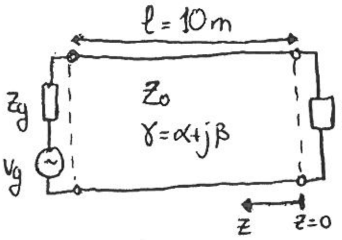
b) Calcule en la carga la potencia incidente, reflejada y absorbida (en dBm) y el coeficiente de reflexión para los casos 1, 2 y 3.

c) Calcule la impedancia normalizada que se ve al comienzo del cable en los casos 1, 2 y 3.

d) Repita los apartados b) y c) cuando $Z_L = 150 + 150j\,\Omega$. ¿Qué valor de potencia reflejada se mediría en este caso al comienzo del cable?

e) Repita los apartados b) y c) cuando el cable se deja en circuito abierto y cuando se coloca una carga adaptada. ¿Qué valor de potencia reflejada se mediría en este caso al comienzo del cable? ¿Podría realizar este apartado si desconociera la impedancia característica del cable? Justifique la respuesta.

PROB 3 JULIO 2010



$\varepsilon_r = 4$

$P_{inc} = 100\,mW$

$f = 300\ MHz$

BAJAS PÉRDIDAS (SÓLO EN CONDUCTORES)

CASO	Z_L	$P_{reflentrada}$ (dBm)	$P_{reflentrada}$ (mW)
1	25 Ω	12 dBm	$10^{1'2}$ mW
2	150 Ω	8'46 dBm	$10^{0'846}$ mW
3	0	18 dBm	$10^{1'8}$ mW

$$P_{reflentrada}(mW) = P_{inc}(mW) \cdot e^{-2\alpha\ell} \cdot |\rho_L|^2 \cdot e^{-2\alpha\ell}$$

a)

CASO ③: $Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1 \Rightarrow P_{reflentrada}(mW) = P_{inc}(mW) \cdot e^{-4\alpha \cdot \ell} \cdot |-1|^2$

$$10^{1'8} = 100 \cdot e^{-40\alpha}$$

$$\boxed{\alpha} = \frac{\ln\left(\frac{10^{1'8}}{100}\right)}{-40} = \boxed{0'0115}\ (Np/m)$$

Esta atenuación es sólo debida a pérdidas en los conductores y es la misma en los tres casos.

CASO ①: $Z_L = 25 \Rightarrow P_{reflentrada}(mW) = P_{inc}(mW) \cdot e^{-4\alpha \cdot \ell} \cdot \left|\dfrac{25 - Z_0}{25 + Z_0}\right|^2$

$$10^{1'2} = 100 \cdot e^{-40 \cdot 0'0115} \cdot \left|\frac{25 - Z_0}{25 + Z_0}\right|^2$$

Hay dos posibles soluciones, si $25 > Z_0$ ó si $25 < Z_0$: $\begin{cases} Z_0 = 8'33\ \Omega \\ Z_0 = 75\ \Omega \end{cases}$

Hemos supuesto $Z_0 \in \mathbb{R}$.

CASO ②: $Z_L = 150\,\Omega \Rightarrow P_{reflentrada}(mW) = P_{inc}(mW) \cdot e^{-4\alpha\ell} \cdot \left|\dfrac{150 - Z_0}{150 + Z_0}\right|^2$

$$10^{0'846} = 100 \cdot e^{-40 \cdot 0'0115} \cdot \left|\frac{150 - Z_0}{150 + Z_0}\right|^2$$

Hay dos posibles soluciones, si $150 > Z_0$ y si $150 < Z_0$: $\begin{cases} Z_0 = 75\ \Omega \\ Z_0 = 300\ \Omega \end{cases}$

Hemos supuesto $Z_0 \in \mathbb{R}$.

La solución de Z_0 que es compatible en los tres casos es $Z_0 = 75\,\Omega$.

Por otro lado: $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \dfrac{2\pi f}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r} = \dfrac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\sqrt{4} = 4\pi$ (rad/m)

Así pues:

Parámetros secundarios

$$\begin{cases} \boxed{\gamma = \alpha + j\beta = 0'0115 + j\,4\pi}\ (m^{-1}) \equiv \text{Constante de propagación} \begin{cases} \alpha = 0'0115\ (Np/m) \equiv \text{Constante de ATENUACIÓN.} \\ \beta = 4\pi\ (rad/m) \equiv \text{Constante de FASE.} \end{cases} \\ \boxed{Z_0 = 75\ \Omega} \equiv \text{Impedancia característica.} \end{cases}$$

Los parámetros primarios son: L, C, G y R.

$G = 0$ (S/m) ≡ Conductancia por unidad de longitud. (Es cero porque no hay pérdidas en el dieléctrico.)

$L = \dfrac{Z_0}{v} = \dfrac{75}{\left(\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{4}}\right)} = 5 \cdot 10^{-7}$ (H/m) $= 500$ (nH/m) ≡ Inductancia o autoinducción por unidad de longitud.

$C = \dfrac{1}{Z_0 \cdot v} = \dfrac{L}{Z_0^2} = 89 \cdot 10^{-12}$ (F/m) $= 89$ (pF/m) ≡ Capacidad por unidad de longitud.

Finalmente como $\alpha = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \Rightarrow R = 2\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2 \cdot \alpha \cdot Z_0 = 1'725$ (Ω/m) ≡ Resistencia por unidad de longitud.

NOTA: Si las pérdidas fueran debidas al dieléctrico exclusivamente:

b) $\boxed{P_{inc_{carga}}(mW) = P_{inc}(mW)\cdot e^{-2\alpha L} = 100\cdot e^{-20\cdot 0'0115} = \boxed{79'453\ mW}} \Rightarrow \boxed{P_{inc_{carga}}(dBm) = 10\log P_{inc_{carga}}(mW) = 19\,dBm}$

Esta potencia es la misma en los tres casos porque no depende de Z_L.

$$P_{ref_{carga}}(mW) = P_{inc_{carga}}(mW)\cdot|\rho_L|^2$$

- CASO ①: $P_{ref_{carga}}(mW) = 79'453\cdot\left|\dfrac{25-75}{25+75}\right|^2 = \boxed{19'863\,mW} \cong \boxed{13\,dBm}$
- CASO ②: $P_{ref_{carga}}(mW) = 79'453\cdot\left|\dfrac{150-75}{150+75}\right|^2 = \boxed{8'828\,mW} \cong \boxed{9'46\,dBm}$
- CASO ③: $P_{ref_{carga}}(mW) = 79'453\left|\dfrac{0-75}{0+75}\right|^2 = \boxed{79'453\,mW} \cong \boxed{19\,dBm}$

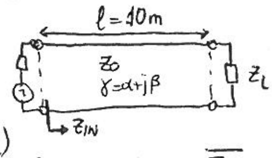
Lógicamente $P_{absorbida_{carga}}(mW) = P_{disipada_{carga}}(mW) = P_{inc_{carga}}(mW) - P_{ref_{carga}}(mW) =$

- CASO ①: $59'59\,mW \cong \boxed{17'75\,dBm}$
- CASO ②: $70'625\,mW \cong \boxed{18'49\,dBm}$
- CASO ③: $0\,mW \cong \boxed{-\infty\,dBm}$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} =$$

- CASO ①: $\rho_L = -\dfrac{1}{2}$
- CASO ②: $\rho_L = \dfrac{1}{3}$
- CASO ③: $\rho_L = -1$

c) Hay varias formas de hacerlo:



1ª forma: $Z_{IN} = Z_0\cdot\dfrac{Z_L + Z_0\cdot th(\gamma\ell)}{Z_0 + Z_L\cdot th(\gamma\ell)}\ (\Omega) \Longrightarrow \overline{Z_{IN}} = \dfrac{Z_L + Z_0\cdot th(10\gamma)}{Z_0 + Z_L\cdot th(10\gamma)}$

Operamos $th(10\gamma) = th(0'115 + j\,40\pi) = \dfrac{e^{10\gamma} - e^{-10\gamma}}{e^{10\gamma} + e^{-10\gamma}} = \dfrac{1 - e^{-20\gamma}}{1 + e^{-20\gamma}} = \dfrac{1 - e^{-0'23}\cdot e^{-j80\pi}}{1 + e^{-0'23}\cdot e^{-j80\pi}} =$

$$= \left\{e^{-j80\pi} = 1\right\} = \frac{1 - e^{-0'23}}{1 + e^{-0'23}} = 0'1145$$

Así pues:

- CASO ①: $\boxed{\overline{Z_{IN}}} = \dfrac{25 + 75\cdot 0'1145}{75 + 25\cdot 0'1145} = \boxed{0'431}$
- CASO ②: $\boxed{\overline{Z_{IN}}} = \dfrac{150 + 75\cdot 0'1145}{75 + 150\cdot 0'1145} = \boxed{1'72}$
- CASO ③: $\boxed{\overline{Z_{IN}}} = \dfrac{0 + 75\cdot 0'1145}{75 + 0} = \boxed{0'1145}$

2ª forma: Sabemos que el coeficiente de reflexión a la entrada es:

$$\rho_{IN} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} = \frac{\overline{Z_{IN}} - 1}{\overline{Z_{IN}} + 1} \Rightarrow \boxed{\overline{Z_{IN}} = \frac{1 + \rho_{IN}}{1 - \rho_{IN}}}$$

Además: $\boxed{\rho_{IN}} = \rho_L\cdot e^{-2\gamma\ell} = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\cdot e^{-20\gamma} = \boxed{\dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}\cdot e^{-0'23}\cdot 1}$

Operando con cada Z_L se obtiene cada $\overline{Z_{IN}}$.

d) Si $Z_L = 150 + j150\ (\Omega)$

$$P_{inc_{carga}}(mW) = 79'453\ mW \Rightarrow P_{inc_{carga}}(dBm) = \boxed{19\ dBm}$$

$$P_{ref_{carga}}(mW) = 79'453 \cdot |\rho_L|^2 = 79'453 \cdot \left|\frac{150+j150-75}{150+j150+75}\right|^2 = 79'453 \cdot (0'62)^2 = 30'54\ mW$$

$$P_{ref_{carga}}(dBm) = \boxed{14'85\ dBm}$$

$$P_{absorbida_{carga}}(mW) = P_{disipada_{carga}}(mW) = P_{inc_{carga}}(mW) - P_{ref_{carga}}(mW) = 48'913\ mW$$

$$P_{absorbida}(dBm) = \boxed{16'89\ dBm}$$

$$\boxed{\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{150+j150-75}{150+j150+75} = \frac{75+j150}{225+j150} = 0'53846 + j0'3077 = 0'62 \cdot e^{j0'52\ rad}}\ \text{ADIM.}$$

$$P_{ref_{entrada}}(mW) = P_{ref_{carga}} \cdot e^{-2\alpha \cdot \ell} = 30'54 \cdot e^{-20 \cdot 0'0115} = 24'265\ mW$$

$$\boxed{P_{ref_{entrada}}(dBm) = 13'85\ dBm}$$

$$\boxed{\overline{Z_{IN}} = \frac{\overline{Z_L} + \overline{Z_0} \cdot th(10\gamma)}{\overline{Z_0} + \overline{Z_L} \cdot th(10\gamma)} = \frac{150+j150+75 \cdot 0'1145}{75+(150+j150)0'1145} = 1'96+j1}$$

e) ⊙ $Z_L = \infty$. $\boxed{\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = +1} \Rightarrow |\rho_L| = 1$

$$P_{inc_{carga}}(mW) = 79'453\ (mW) \Rightarrow P_{inc_{carga}}(dBm) = 19\ dBm$$

$$P_{ref_{carga}}(mW) = 79'453\ (mW) \Rightarrow P_{ref_{carga}}(dBm) = 19\ dBm$$

$$P_{absorbida_{carga}}(mW) = 0\ (mW) \Rightarrow P_{absorbida_{carga}}(dBm) = -\infty\ dBm$$

$$P_{ref_{entrada}}(mW) = P_{ref_{carga}}(mW) \cdot e^{-2\alpha\ell} = 63'128\ mW \Rightarrow P_{ref_{entrada}}(dBm) = 18\ dBm$$

$$\boxed{\overline{Z_{IN}}} = \frac{\overline{Z_L} + \overline{Z_0}\ th(10\gamma)}{\overline{Z_0} + \overline{Z_L} \cdot th(10\gamma)} = \frac{1}{th(10\gamma)} = \frac{1}{0'1145} = \boxed{8'73}$$

⊙ $Z_L = Z_0$ $\boxed{\rho_L = 0}$

$$P_{inc_{carga}}(dBm) = 19\ dBm$$

$$P_{ref_{carga}}(mW) = 0 \Rightarrow P_{ref_{carga}}(dBm) = -\infty\ dBm$$

$$P_{absorbida_{carga}}(dBm) = 19\ dBm$$

$$P_{ref_{entrada}}(dBm) = -\infty\ dBm$$

$$\overline{Z_{IN}} = \frac{\overline{Z_0} + \overline{Z_0}\ th(10\gamma)}{\overline{Z_0} + \overline{Z_0}\ th(10\gamma)} = 1$$

Este apartado e) se podría realizar sin conocer Z_0 ya que cuando está terminada en $Z_L = \infty$ siempre se obtiene $\rho_L = +1$, y cuando $Z_L = Z_0$ siempre $\rho_L = 0$ independiente del valor que tome Z_0.

PROBLEMA 3 (2.5 puntos)

Por una guía rectangular se envía en el modo fundamental a la frecuencia de 10 GHz una onda electromagnética en la dirección del eje z. La frecuencia de trabajo es la frecuencia central del intervalo en el que ocurre propagación en un único modo. Cuando esta guía se termina en $z = 0$ por un circuito abierto se obtiene la siguiente expresión temporal de campo eléctrico en el interior de la guía:

$$\vec{E} = 20\cos\left(\frac{2\pi z}{50}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y} \quad V\cdot m^{-1}$$

donde x, z se miden en mm, *a* es la anchura de la guía.

Determine:

a) Expresión temporal del campo magnético en el interior de la guía.

b) Dimensiones de la guía y frecuencias de corte de los cuatro primeros modos.

c) Potencia media que se propaga por la guía.

d) Expresión temporal del campo eléctrico si la guía se termina en $z = 0$ en una carga adaptada.

e) Expresión temporal del campo eléctrico si la guía se termina en $z = 0$ en un cortocircuito.

Problema 3

$\vec{E} = 20\cos\left(\frac{\pi z}{50}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\omega t\ \hat{y}\ (Vm^{-1})$ si $Z_L = \infty$

$f_T = 10\ GHz = f_{central}$

Modo fund.

a) ¿$\vec{H}(t)$? $\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0}$ $\quad \vec{E} = 2E_0\cos(\beta_g z)\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\omega t}\hat{y}$

b) ¿a y b?

$\lambda_{g_{MF}} = 50\,mm = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(f_c/f_T)^2}} \longrightarrow f_{c_{MF}} = 8\ GHz \longrightarrow$ Como $a>b$ ya que el MF es el TE_{10} por la expresión dada.

$f_{c_{TE_{10}}} = \frac{c_0}{2a} = 8\ GHz \longrightarrow a = 18{,}75\ mm$

$f_{c_{1er\ sup}} = 12\ GHz = f_{c_{TE_{01}}} = \frac{c_0}{2b} \longrightarrow b = 12{,}5\ mm$

$f_T = 10\ GHz$ sea la $f_{central}$

$f_{c_{TE_{11}}} = f_{c_{TM_{11}}} = 14{,}42\ GHz$

$\longrightarrow$ En ondas estacionarias no se disipa potencia.

c) $\boxed{\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left(\vec{E}_{TOT}\times\vec{H}^*_{TOT}\right) = \ldots = 0}$

d) $\vec{E}_{10}(t) = E_0\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \beta_{g10} z)\,\hat{y}$

siendo

$E_0 = 10\ Vm^{-1}$	$\omega = 2\pi\cdot 10^{10}\ rad\,s^{-1}$
	t en s
$a = 18{,}75\ mm$	$\beta_{g10} = \frac{\pi}{50}\ rad\,mm^{-1}$
x en mm	

z en mm

e) Si $Z_L = 0 \longrightarrow \vec{E}_{TOT_{ZL}} = 20\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{50}z\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\omega t\ \hat{y}\ Vm^{-1}$

PROB 2 JUNIO 2010.

$\ast$ Esta fórmula solo vale para TE_{10}

Por una guía rectangular de dimensiones óptimas se propaga en el modo fundamental a la frecuencia de 9 GHz una onda electromagnética de 1 W de potencia. Esta frecuencia coincide con la frecuencia central del intervalo de frecuencias para las que existe propagación en un único modo.

Determine:

a) Dimensiones de la guía.

$$f_T = f_{c10} + \frac{f_{c20} - f_{c10}}{2} \qquad f_{c20} = f_{c01} = 2 f_{c10}$$

$$f_{c10} = \frac{2}{3} f_T = 6\ GHz \qquad f_{c20} = 12\ GHz$$

$$a = \frac{c}{2 f_{c10}} = 0{,}025\ m = 25\ mm \qquad b = \frac{c}{2 f_{c01}} = 0{,}0125\ m = 12{,}5\ mm$$

b) Valor de la amplitud máxima del campo eléctrico.

$$P_T = \frac{E_0^2 ab}{4 Z_{TE}} = 1\ W \qquad Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} = 505{,}8\ \Omega$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 P_T Z_{TE}}{ab}} = 2544\ V \cdot m^{-1}$$

c) Expresión matemática del campo eléctrico.

$$\vec{E} = E_0 sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta_g z)\,\hat{y} \qquad E_0 = 2544\ V \cdot m^{-1} \qquad a = 0{,}025\ m$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} = 0{,}0477\ m \qquad \beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = 140{,}6\ m^{-1}$$

d) Densidad superficial de corriente que se induce en las dos paredes más estrechas de la guía.

$$\vec{E} = E_0 sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-j\beta_g z)\,\hat{y}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) =$$

$$= \hat{x}\, j\beta_g E_0 sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z) + \hat{z}\frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z)$$

$$H_x = -\frac{\beta_g}{\omega\mu} E_0 sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z)$$

$$H_z = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\exp(-j\beta_g z)$$

Paredes más estrechas de la guía:

$x = 0$

$$H_x = 0$$

$$H_z = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\pi}{a} E_0 \exp(-j\beta_g z)$$

$x = a$

$$H_x = 0$$

$$H_z = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\pi}{a} E_0 (-1)\exp(-j\beta_g z)$$

$$\vec{J}_s(x=0) = \hat{n} \times \vec{H} = \hat{x} \times H_z \hat{z} = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\pi}{a} E_0 \exp(-j\beta_g z)(-\hat{y})$$

$$\vec{J}_s(x=a) = \hat{n} \times \vec{H} = -\hat{x} \times H_z \hat{z} = \frac{1}{-j\omega\mu}\frac{\pi}{a} E_0 (-1)\exp(-j\beta_g z)(\hat{y})$$

Transmisión y Propagación de Ondas II

Problema 2
Julio 2010

Por una guía rectangular de dimensiones óptimas se envía en el modo fundamental a la frecuencia de 10 GHz una onda electromagnética en la dirección del eje z. Cuando esta guía se termina en $z = 0$ por un cortocircuito se obtiene la siguiente expresión temporal de campo eléctrico en el interior de la guía:

$$\vec{E} = 20\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{37{,}5}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y} \quad V\cdot m^{-1}$$

donde x, z se miden en mm, a es la anchura de la guía.

Determine:

a) Expresión temporal del campo magnético en el interior de la guía.

$$\vec{E} = 2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\omega t}\,\hat{y} \quad V\cdot m^{-1} \quad \beta_z = \frac{2\pi}{37{,}5}\,mm^{-1} \quad E_0 = 10\,V\cdot m^{-1}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\hat{x}\,2E_0\beta_z\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \hat{z}\frac{\pi}{a}2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\vec{E} = H_x\hat{x} + H_z\hat{z}$$

$$H_x = -j\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$H_z = j\frac{1}{\omega\mu}\frac{\pi}{a}2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\boxed{H_x = \frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \pi/2)}$$

$$\boxed{H_z = \frac{1}{\omega\mu}\frac{\pi}{a}2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t + \pi/2)}$$

b) Dimensiones de la guía y rango de frecuencias en las que ocurre propagación en un único modo.

Como la guía está terminada en cortocircuito, la distancia entre el primer mínimo de campo eléctrico y el cortocircuito es la mitad de la longitud de onda dentro de la guía.

$$\vec{E} = 20\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z_{min}}{37{,}5}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y} = 0$$

$$\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z_{min}}{37{,}5}\right) = 0 \qquad \frac{2\pi z_{min}}{37{,}5} = n\pi \qquad z_{min} = n\frac{37{,}5}{2} = n\frac{\lambda_g}{2} \qquad \lambda_g = 37{,}5\,mm$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_{c10}}{f}\right)^2}} \qquad f_{c10} = f\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2} \qquad f = 10\,GHz$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 0{,}03\,m = 30\,mm$$

$$f_{c10} = 6\,GHz \qquad a = \frac{c}{2f_{c10}} = 0{,}025\,m = 25\,mm \qquad \boxed{a = 25\,mm}$$

$$b = \frac{a}{2} = 0{,}0125\,m = 12{,}5\,mm \qquad \boxed{b = 12{,}5\,mm}$$

$$f_{c10} = 6\,GHz \qquad f_{c20} = f_{c01} = 2f_{c10} = 12\,GHz$$

$\boxed{\text{Propagación en un único modo: entre 6 y 12 GHz}}$

c) Potencia media que se propaga por la guía.

$$\vec{E}_y = 2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\omega t}\,\hat{y}$$

$$\vec{H}_x = -j\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\omega t}\,\hat{x}$$

$$\langle\vec{s}_z\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_y\times\vec{H}_x^*\right]$$

$$\langle\vec{s}_z\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)j\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\hat{z}\right] = 0$$

$$\boxed{\langle\vec{s}_z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; P = 0}$$

También se puede calcular a partir de las expresiones temporales de los campos

$$\vec{E}_y = 2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{y}$$

$$\vec{H}_x = \frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \pi/2)\,\hat{x} \qquad \vec{s} = \vec{E}_y\times\vec{H}_x$$

$$\vec{s}_z = -2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \pi/2)\,\hat{z}$$

$$\vec{s}_z = -2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(\omega t)\,\hat{z}$$

$$\vec{s}_z = -2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}(2\omega t)\,\hat{z}$$

$$\langle\vec{s}_z\rangle = -2E_0\,\mathrm{sen}(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\frac{\beta_z}{\omega\mu}2E_0\cos(\beta_z z)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\langle\mathrm{sen}(2\omega t)\rangle\,\hat{z}$$

$$\langle\mathrm{sen}(2\omega t)\rangle = 0 \qquad \boxed{\langle\vec{s}_z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; P = 0}$$

d) Expresión temporal del campo eléctrico si la guía se termina en $z = 0$ en una carga adaptada.

En este caso únicamente existe la onda incidente:

$$\vec{E} = E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_z z}\,\hat{y} \qquad \boxed{\vec{E} = E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \beta_z z)\,\hat{y}}$$

e) Expresión temporal del campo eléctrico si la guía se termina en $z = 0$ en una carga de impedancia normalizada $z_L = 1 + j$.

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \qquad \vec{E}_i = E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-j\beta_z z}\,\hat{y} \qquad \vec{E}_r = \rho_L E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\beta_z z}\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_r = |\rho_L|e^{j\phi_L}E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\beta_z z}\,\hat{y}$$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad |\rho_L| = 0{,}447 \qquad \phi_L = 63{,}44^\circ = 1{,}107\,rad$$

$$\boxed{\vec{E}_i = E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - \beta_z z)\,\hat{y}} \qquad \boxed{\vec{E}_r = |\rho_L|E_0\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t + \beta_z z + \phi_L)\,\hat{y}}$$

Nota
* Siempre que han pedido la potencia media ha dado 0

$$|\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc}| + |\vec{E}_{ref}| = |\vec{E}_{inc}| \cdot \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(2\beta_g z + \varphi_L)}$$

Si $Z_L = 0 \longrightarrow \rho_L = -1 \begin{cases} \to |\rho_L| = 1 \\ \to \varphi_L = \pi \end{cases} \longrightarrow |\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc}| \cdot 2 \cdot \text{sen}(\beta_g z)$

Si $Z_L = \infty \longrightarrow \rho_L = +1 \begin{cases} \to |\rho_L| = 1 \\ \to \varphi_L = 0 \end{cases} \longrightarrow |\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc}| \cdot 2 \cdot \cos(\beta_g z)$

- Si $Z_L = \pm j$ algo $\begin{cases} \to |\rho_L| = +1 \\ \to \rho_L = ?? \end{cases} \longrightarrow |\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc}| \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos(2\beta_g z + \varphi_L)}$

- Si $Z_L = Z_0 \longrightarrow \rho_L = 0 \longrightarrow |\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc}|$

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AUDIOVISUAL
Y COMUNICACIONES

TRANSMISIÓN Y PROPAGACIÓN DE ONDAS II

DICIEMBRE 2010

PROBLEMA 1 (2.5 puntos) Terrible Examen

En la figura se muestra una fibra óptica compuesta de un núcleo de material dieléctrico revestido por otro dieléctrico de índice de refracción n = 1.8. Se observa que cuando una onda incide desde el vacío normalmente sobre el núcleo de la fibra, la onda reflejada tiene una potencia 9.54 dB inferior a la onda incidente. Suponiendo que en todos los apartados posteriores el campo eléctrico asociado a la onda se encuentra polarizado linealmente y contenido en el plano de la figura, determine:

a) El ángulo de incidencia desde el vacío al núcleo de la fibra para que se transmita toda la onda.

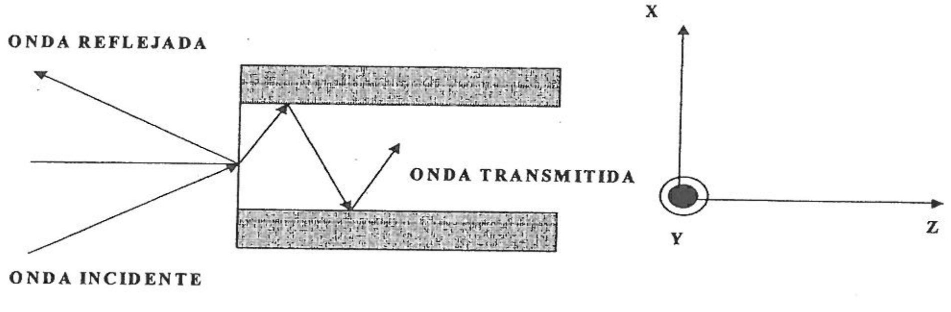
b) El máximo valor del ángulo de incidencia desde el vacío al núcleo de la fibra para que se pueda obtener propagación guiada en el interior de la fibra.

c) Porcentaje de potencia que se transmite al interior de la fibra en las condiciones del apartado anterior.

d) Si se observa que en el interior de la fibra el campo magnético asociado a la onda tiene la siguiente expresión:

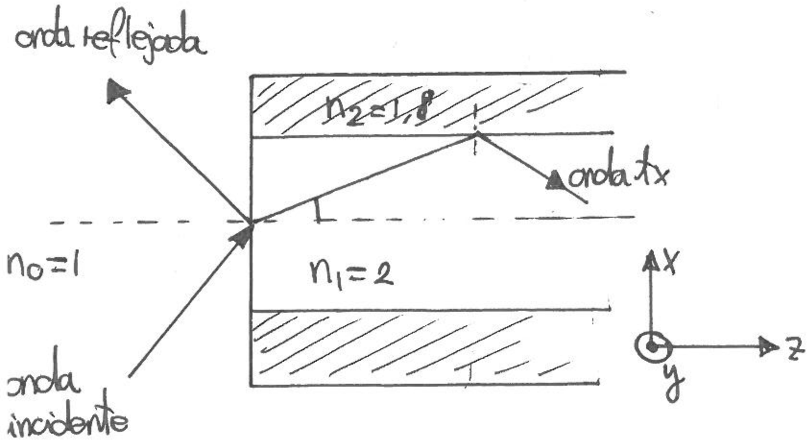
$$\vec{H} = H_0 \exp\left\{ j\left(\omega t - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\left[x + z \right] \right) \right\} \hat{y}$$

determine la expresión del campo eléctrico asociado a la onda y deduzca si la onda se propagará confinada dentro de la fibra o no.

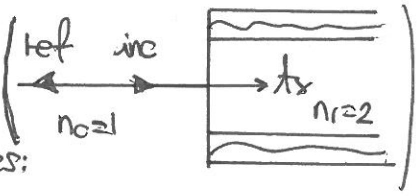


Problema Politécnica Superior
1998

• Problema de Examen •



Como si hay incidencia normal desde el aire al núcleo (



) la reflejada tiene 9,54 dB. menos que la incidente, entonces:

$P_{ref}=|\rho|^2\cdot P_{inc}$

$10\log\frac{P_{ref}}{P_{inc}}=10\log|\rho|^2=-9,54 \longrightarrow |\rho|=0,333=\frac{1}{3}$

Como $n_1>n_0$

Además: $\rho=\frac{\eta_1-\eta_0}{\eta_1+\eta_0}=\frac{n_0-n_1}{n_0+n_1}\longrightarrow \frac{|n_0-n_1|}{|n_0+n_1|}=\frac{1}{3}\longrightarrow \frac{|1-n_1|}{|1+n_1|}=\frac{1}{3}\longrightarrow \boxed{n_1=2}$

1) ¡Pillada! La única forma en que hay transmisión total en incidencia oblicua, es cuando $\theta_i=\theta_B=\operatorname{arctg}\left(\frac{n_1}{n_0}\right)$ y el campo eléctrico incidente tiene polarización lineal paralela.

Del enunciado sabemos que $\vec{E}_{inc}$ tiene polarización lineal paralela y por tanto debe ser:

$\theta_i=\theta_B=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{1}\right)=63,43^{\circ}$

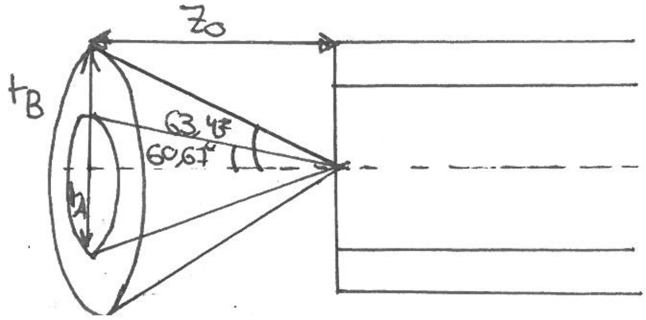
$\hookrightarrow$ Con este θ_i, toda la onda incidente pasaría al núcleo.

2) BLA, BLA... $\longrightarrow$ Que la onda llegue con $\theta_i\geq\theta_c$ entre núcleo y cubierta debe ser:

$\theta_{inc\ \text{AIRE-NÚCLEO}}=\alpha_a=\operatorname{arcsen}(NA)=\operatorname{arcsen}\sqrt{n_1^2-n_2^2}=60,67^{\circ}$

$\hookrightarrow$ Como máximo podemos incidir con este ángulo ya que de lo contrario la potencia acabaría saliendo por cubierta.

3)



$\frac{P_t(\alpha_a)}{P_t(\theta_B)}=\frac{cte.\,\pi\, r_A^2}{cte\,\pi\, r_B^2}=\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2=\left\{\begin{matrix} tg\,\alpha_a=\frac{r_A}{z_0} \\ tg\,\theta_B=\frac{r_B}{z_0}\end{matrix}\right\}=\left(\frac{tg\,\alpha_a}{tg\,\theta_B}\right)^2=0,79\longrightarrow 79\%.$

d)

$$\vec{H} = H_0 e^{j\left(\omega t - \beta\left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)\right)} \hat{y}$$

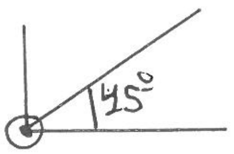
El núcleo es dieléctrico

Sabemos por Maxwell: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + j\omega\varepsilon\vec{E} = \sigma\vec{E} + j\omega\varepsilon\vec{E} = j\omega\varepsilon\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\varepsilon} = \frac{-j}{\omega\varepsilon_1}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \cdots$$

El ángulo crítico entre núcleo - cubierta es: $\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1'8}{2}\right) = 64{,}158^\circ$

Observando la expresión de $\vec{H}$ su dirección de propagación es $\frac{x+z}{\sqrt{2}}$

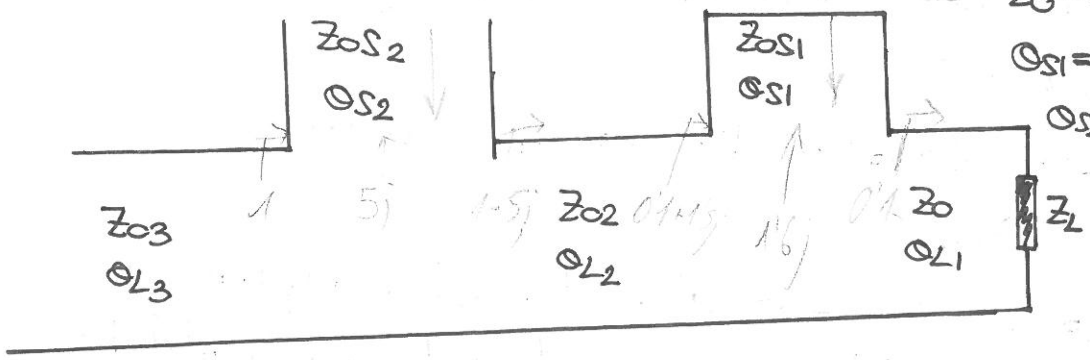


$\frac{\hat{x}+\hat{z}}{\sqrt{2}} \longrightarrow$ incide con 45° en la cubierta.

$45^\circ < 64{,}158 \longrightarrow$ No se tx todo por la cubierta.

No se produce reflexión total.

2º Test TPO 2013-2014



$Z_0 = Z_{02} = Z_{0S_2} = Z_{0S_1}$

$\theta_{S_1} = 58^\circ$

$\theta_{S_2} = 168{,}5^\circ$

$\theta_{L_3} = \theta_{L_2} = \theta_{L_1} = 45^\circ$

1) ¿Z_L?

a) $25-25j$ b) $25+25j$ c) $50-50j$ d) $50+50j$

2) Si se modifica únicamente la impedancia característica del 1er stub a $Z_{0S_1} = 100\,\Omega$

¿Cuál es la longitud del 1er stub θ_{S_1} que permite que la red siga adaptada?

a) $\theta_{S_1} = 146{,}3^\circ$ b) $\theta_{S_1} = 38{,}7^\circ$ c) $\theta_{S_1} = 29^\circ$ d) θ_{S_1} no existe.

3) Si se modifica únicamente la impedancia característica del 2º stub a $Z_{0S_2} = 25\,\Omega$

¿Cuál es la longitud del 2º stub para que siga adaptado?

a) $\theta_{S_2} = 146{,}3^\circ$ b) $\theta_{S_2} = 80{,}1^\circ$ c) $\theta_{S_2} = 49{,}5^\circ$ d) θ_{S_2} no existe.

Con $Z_{0S_1} = Z_{0S_2} = 50\,\Omega$

4) Modificando $0 < \theta_{S_2} \leq 180^\circ$ longitud para que el módulo del coeficiente de reflexión sea de -10 dB:

a) Existe una única longitud $\theta_{S_2} = 156{,}8^\circ$

b) Existe una única longitud $\theta_{S_2} = 164{,}7^\circ$

c) Existen dos longitudes, una de ellas $\theta_{S_2} = 164{,}7^\circ$

d) Modificando θ_{S_2} no se puede obtener un $|\rho| = 10$ dB.

5) Modificando $0 < \theta_{S_2} \leq 180^\circ$ longitud para que el módulo del coeficiente de reflexión sea de 0 dB.

a) Existe una única longitud $\theta_{S_2} = 135{,}2^\circ$

b) Existe una única longitud $\theta_{S_2} = 180^\circ$

c) Existen dos longitudes, una de ellas $\theta_{S_2} = 90^\circ$

d) Modificando θ_{S_2} no se puede obtener un $|\rho| = 0$ dB.

⑥ Modificando exclusivamente las longitudes de los stubs ($0 < \theta_{S1} \leq 180°$ y $0 < \theta_{S2} \leq 180°$) encuentre si es posible una nueva red de adaptación

¿Cuál es el valor de θ_{S1}?

a) $\theta_{S1} = 238°$ b) $\theta_{S1} = 180°$ c) $\theta_{S1} = 148°$ d) ∄ otra red de adaptación.

¿Cuál es el valor de θ_{S2}?

a) $\theta_{S2} = 90°$ b) $\theta_{S2} = 67{,}7°$ c) $\theta_{S2} = 45°$ d) ∄ otra red de adaptación.

Se vuelve a los valores de partida, pero se permite modificar la longitud ~~del~~ de la LT $0 < \theta_{L1} \leq 180°$. El sintonizador está formado por los stubs ($0 < \theta_{S1} \leq 180°$ y $0 < \theta_{S2} \leq 180°$)

7) ¿Para qué longitud de la LT ($0 < \theta_{L1} \leq 180°$) la solución del sintonizador es única?

a) Existe una única longitud $\theta_{L1} = 108{,}4°$

b) Existe una única longitud $\theta_{L1} = 45°$

c) Existen 2 longitudes, una de ellas $\theta_{L1} = 135°$.

d) Modificando θ_{L1} no se puede.

8) ¿Para qué longitud de la LT ($0 < \theta_{L1} \leq 180°$) la solución del sintonizador no existe?

a) $\theta_{L1} = 55°$

b) $\theta_{L1} = 90°$

c) $\theta_{L1} = 125°$

d) Para cualquier longitud.

Guías con CS.

PROBLEMA 1. (4 Ptos.)

Por una guía rectangular de dimensiones óptimas se envía una potencia de 10 dBm en la dirección del eje z, a la frecuencia de 25 GHz mediante el modo fundamental TE_{10} cuyo campo eléctrico tiene la siguiente expresión:

$$\bar{E} = E_0 \ sen\left(\frac{\pi \ x}{a}\right) \exp(-j\beta_g z)\exp(j\omega t) \ \hat{y}$$

siendo a la anchura de la guía.

Cuando la guía se termina por un cortocircuito, se observa que el mínimo de campo eléctrico más cercano a la carga está a una distancia de 10 mm de la carga.

Determine:

a) El campo magnético asociado a este modo.

b) Las dimensiones de la guía.

c) Qué otros modos se propagan a las frecuencias de 25 GHz y 50 GHz.

d) La potencia reflejada y disipada en la carga.

Este apartado es teoría

e) La expresión general del campo eléctrico debido a la superposición de la onda incidente y la onda reflejada.

f) La amplitud del campo eléctrico en función de E_0 en los puntos que están a una distancia del cortocircuito: 1.25 mm, 2.5 mm, 5 mm, 7.5 mm y 10mm.

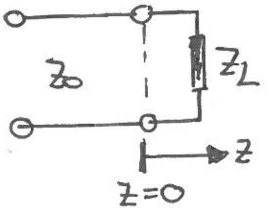
g) El valor de E_0.

g) ¿E_0?

$$P_{inc} = P_{T_{TE10}} = \frac{|E_0|^2 ab}{4 \cdot Z_{TE10}} = 10^{-2}\ W$$

$$E_0 = 944{,}5\ W$$

e) $|\vec{E}_{TOTAL}| = |\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}| = \left| E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t} \hat{y} + \rho_L E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{+j\beta_g z} e^{j\omega t} \hat{y} \right| =$



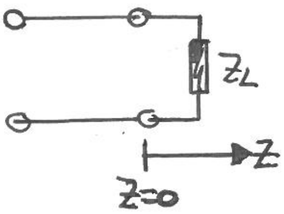
$= \left| E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \hat{y} \right| \cdot \left| 1 + \rho_L e^{+j2\beta_g z} \right| =$

$= |E_0| \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right| \cdot \left| 1 + |\rho_L| e^{j\varphi_L} \cdot e^{+j2\beta_g z} \right| =$

$= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left| 1 + |\rho_L| \cos(\varphi_L + 2\beta_g z) + j|\rho_L| \operatorname{sen}(\varphi_L + 2\beta_g z) \right| =$ → es la misma expresión que en $V(t)$

$= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sqrt{1 + |\rho_L|^2 \cdot 1 + 2|\rho_L| \cos(2\beta_g z + \varphi_L)}$

$z \leq 0$



$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

Casos Particulares

- Si $Z_L = 0 \longrightarrow \rho_L = -1 \begin{cases} |\rho_L| = 1 \\ \varphi_L = \pi \end{cases}$ $\qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$|\vec{E}_{TOTAL}| = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sqrt{1 + 1 - 2\cos(2\beta_g z)} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos(2\beta_g z)}$

$= E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot |\operatorname{sen}(\beta_g z)| = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) |\operatorname{sen}(\beta_g z)|$

Vectorialmente podemos escribir $\longrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}(\beta_g z) e^{j\omega t} \hat{y}$

- Si $Z_L = \infty \longrightarrow \rho_L = +1 \begin{cases} |\rho_L| = 1 \\ \varphi_L = 0 \end{cases}$

$|\vec{E}_{TOTAL}| = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) |\cos(\beta_g z)| \longrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\beta_g z) e^{j\omega t} \hat{y}$

Vectorialmente podemos escribir:

- Si $Z_L = Z_0 \longrightarrow \rho_L = 0 \quad |\vec{E}_{TOTAL}| = \vec{E}_{inc} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \hat{y}$

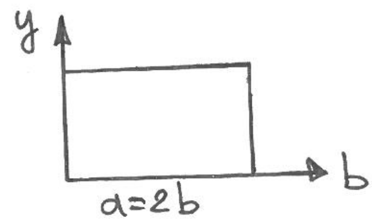
Vectorialmente: $\vec{E}_{TOTAL} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t} \hat{y}$

f) $|\vec{E}_{TOTAL}| = 2E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left| \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{20\,mm} z\,mm\right) \right|$

$\vec{E}_{TOTAL}\Big|_{x=\frac{a}{2},\ z=-1{,}25\,mm} = 2E_0 \cdot 0{,}3826 \qquad |\vec{E}_{TOTAL}|_{x=\frac{a}{2},\ z=-2{,}5\,mm} = 2E_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad |\vec{E}_{TOTAL}|_{x=\frac{a}{2},\ z=-10\,mm} = 0$

$\vec{E}_{TOTAL}\Big|_{x=a/2;\ z=-5\,mm} = 2 \cdot E_0 \cdot 1 \qquad |\vec{E}_{TOTAL}|_{x=\frac{a}{2},\ z=-7{,}5\,mm} = 2E_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Problema Guía CS. $\rightarrow$ Febrero 2001 $\rightarrow$ Febrero 2001 $\rightarrow$ Se repitió.



$P_{inc} = 10\ dBm = 10^{-2}\ W$

$f_T = 25\ GHz$

$TE_{10}: \vec{E} = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta_g z} \cdot e^{j\omega t}\ \hat{y}$

Si $Z_L = 0$ el mínimo más cercano a la carga está a 10 mm.

a) ¿$\vec{H}$? $\rightarrow$ Por Maxwell

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\nabla \times \vec{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0}\left[\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{z} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x}\right] = \ldots$$

b) ¿a y b?

$a = 2b \rightarrow$ Guía de dimensiones óptimas. Pillado!

Si se termina en cortocircuito: $Z_{guía}$ $Z_L = 0$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_{guía}}{Z_L + Z_{guía}} = -1 \rightarrow \text{mínimo en } Z_L$$

Como la distancia entre máximos y mínimos es $\frac{\lambda_g}{4}$ tenemos que: $10\ mm = \frac{\lambda_g}{2} \rightarrow \lambda_g = 20\ mm$

Longitud de onda en la guía del TE_{10}

$$\lambda_{g10} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (f_{c10}/f_T)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{f_T^2 - f_{c10}^2}} \longrightarrow 20\ mm = \frac{3 \cdot 10^{11}\ mm\, s^{-1}}{\sqrt{(25 \cdot 10^9)^2 - f_{c10}^2}}$$

$$f_{cTE_{10}} = 20\ GHz = \frac{c_0}{2a} \longrightarrow a = 7{,}5\ mm,\ b = 3{,}75\ mm$$

c) $f_{cTE_{10}} = 20\ GHz$

$f_{cTE_{20}} = f_{cTE_{01}} = 40\ GHz$

$f_{cTE_{11}} = f_{cTM_{11}} = 44{,}72\ GHz$

$f_{cTE_{30}} = 60\ GHz$

$f_{cTE_{02}} = 80\ GHz$

$f_{cTE_{21}} = f_{cTM_{21}} = 56{,}5\ MHz$

d) $P_{REF_L} = P_{inc_L}|\rho_L|^2 = P_{inc_L} = 10^{-2}\ W \simeq 10\ dBm$

$P_{disipada} = P_{trx_L} = P_{inc_L}(1 - |\rho_L|^2) = 0$

e)

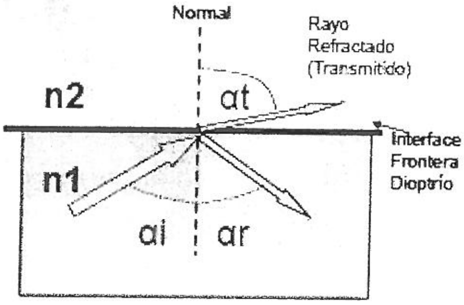
10

TEMA 4

GUÍAS DE ONDA DIELÉCTRICAS Y FIBRA ÓPTICA.

4.1.- Leyes de Snell. Ángulo crítico.

Leyes de Snell



1ª Ley: Reflexión

-Rayo incidente y reflejado están en el mismo plano

$$\alpha_i = \alpha_r$$

2ª Ley: Refracción

-Rayo incidente y refractado están en el mismo plano

$$n_1 \cdot sen(\alpha_i) = n_2 \cdot sen(\alpha_t)$$

Comentario

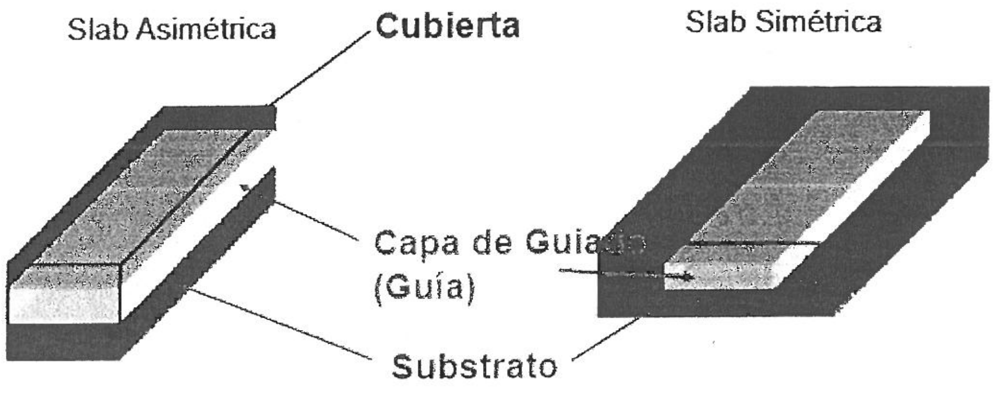
- Si $\alpha_i \geq \alpha_{ic}$ $\nexists$ onda transmitida al medio ②.

$$n_1 \, sen \alpha_{ic} = n_2 \, sen \frac{\pi}{2} \longrightarrow \alpha_{ic} = arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \Big| \text{ Sólo } \exists \text{ si } n_1 > n_2$$

4.2.- Guía dieléctrica plana (SLAB).

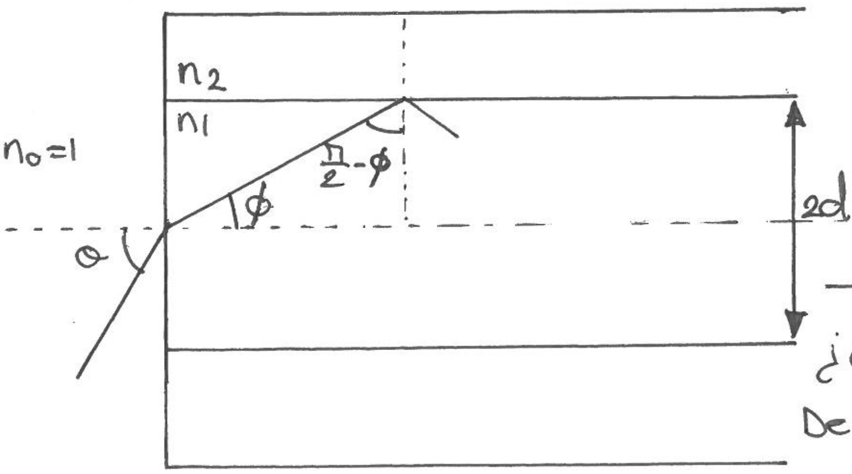
4.2.1- Estructura de la guía dieléctrica plana (SLAB).

Guía Dieléctrica Plana (Slab)



$n(\text{núcleo}) > n\begin{pmatrix}\text{cubierta}\\ \text{revestimiento}\end{pmatrix}$

4.2.2- Teoría de rayos y modos de la guía dieléctrica plana (SLAB).



Debe ser: $\overbrace{n_1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \geq n_2}^{\text{Ec. 1}}$ (Refle. Total, ángulo crítico)

Por la ley de Snell: $n_0 \cdot \operatorname{sen}\theta = n_1 \operatorname{sen}\phi \longrightarrow$

$\longrightarrow$ Como $n_0=1 \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = n_1 \operatorname{sen}\phi$ (Ec. 2)

¿Calculamos θ máx?

De Ecuación 1: $n_1\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\phi - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\phi\right) =$

$= n_1 \cos\phi \geq n_2 \longrightarrow n_1 \cos\phi_{max} = n_2$

Sabemos que $\operatorname{sen}\phi_{max} = \sqrt{1-\cos^2\phi_{max}} = \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$

De la Ecuación 2 obtenemos:

$\operatorname{sen}\theta_{max} = n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2-n_2^2} = \underbrace{AN}_{\text{Apertura numérica.}}$

***Comentario Importante.**
Sólo hay un cjto discreto de direcciones que permiten la propagación, ya que además los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ deben cumplir las condiciones de contorno en la discontinuidad núcleo-cubierta (Trayectorias estables o modos de propagación.

Angulo de aceptación máximo: $\alpha_a = \theta_{max} = \arcsin(NA) = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right)$

Si el ángulo es pequeño $\theta_{max} = \sqrt{n_1^2-n_2^2}$
$(n_1 \simeq n_2)$

SE DEFINE LA FRECUENCIA DE CORTE NORMALIZADA O ANCHURA NORMALIZADA COMO:

mitad de la anchura del núcleo ó radio del núcleo

$$V = K \cdot d \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = K \cdot d \cdot NA$$

$k = \omega_c \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$; $k = \frac{2\pi f}{c_0}$

Así:

Número de Modos propagados:

Si $V < \pi/2 \rightarrow$ sólo se propaga el modo TE_0

Si $\pi/2 < V < \pi \rightarrow$ se propagan los modos: TE_0 (par), y TE_1 (impar)

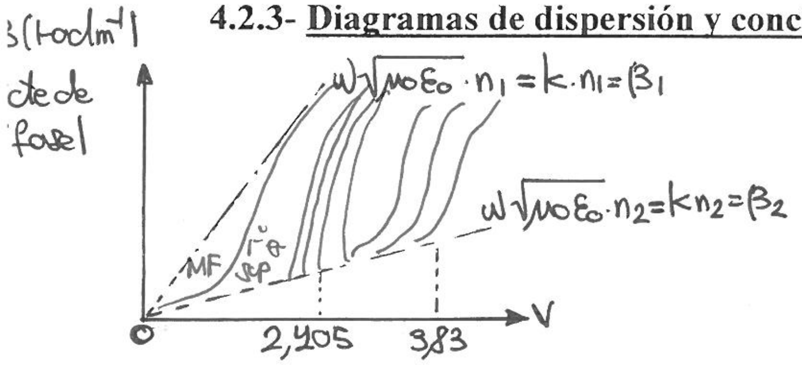
Si $\pi < V < 3\pi/2 \rightarrow$ se propagan los modos: TE_0, TE_1 y TE_2

En general: Número de modos TE que soporta el slab es :

$$M = E \uparrow \left[\frac{2 \cdot V}{\pi} \right]$$

$E\uparrow$ Entero Superior.

4.2.3- Diagramas de dispersión y conclusiones de la guía Slab.



Conclusiones

Existen campos tanto en la capa de guiado como en las de confinamiento (aparente contradicción con la Teoría de Rayos).

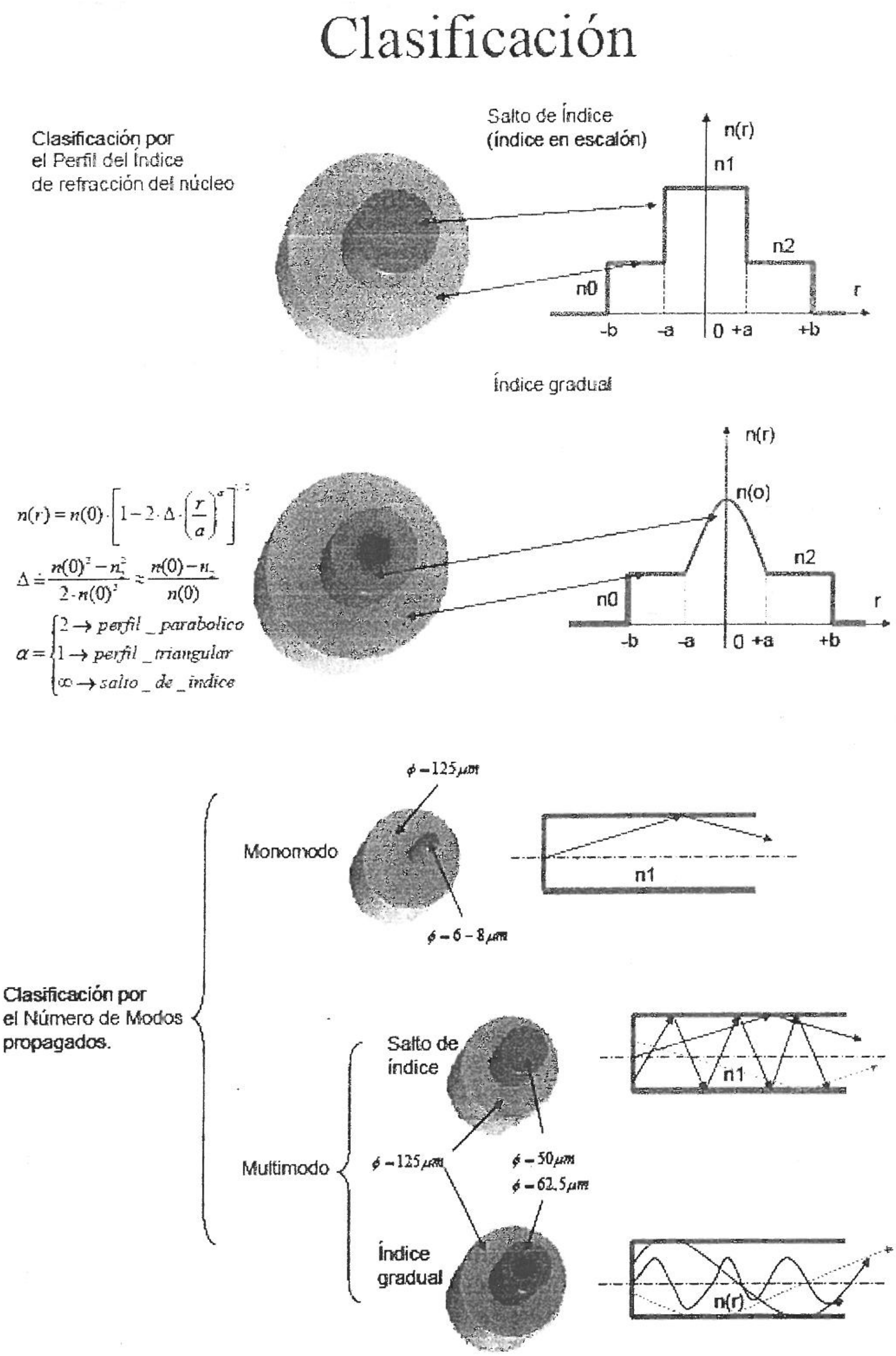
El espesor de las capas de confinamiento debe ser suficientemente grande como para que los campos se extingan prácticamente en ellas.

La energía transportada ("intensidad de luz") es proporcional al cuadrado del E

4.3.- FIBRA ÓPTICA.

4.3.1- Estructura y clasificación de las FIBRAS ÓPTICAS.

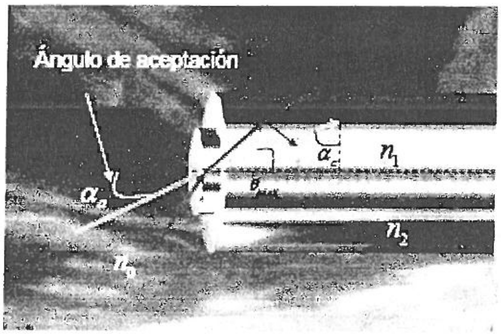
Estructura: NUCLEO DE RADIO a y REVESTIMIENTO O CUBIERTA DE RADIO b



4.3.2- FIBRA ÓPTICA DE SALTO DE ÍNDICE.

4.3.2.1.- APERTURA NUMÉRICA Y ANGULO DE ACEPTACIÓN

Apertura Numérica (NA)

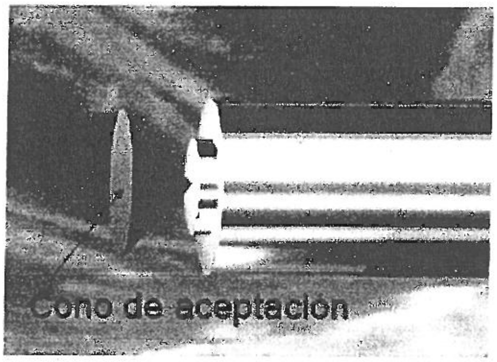


Fibra de salto de índice

$$n_0 \cdot sen(\alpha_a) = n_1 \cdot sen(\theta_{MAX}) = n_1 \cdot \cos(\alpha_c) =$$

$$n_1 \cdot \sqrt{1 - sen^2(\alpha_c)} = n_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{NA \triangleq n_0 \cdot sen(\alpha_a) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$



4.3.2.2.- FORMA DE VARIACIÓN DE LOS CAMPOS DE LOS DISTINTOS MODOS EN NÚCLEO Y EN CUBIERTA.

Núcleo

$E_{z_1} = A_1 \cdot J_m(ur) \, e^{jm\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$

$H_{z_1} = B_1 \cdot J_m(ur) \cdot e^{jm\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$

$J_m \equiv$ Función Bessel 1º especie

Cubierta

$E_{z_2} = A_2 \cdot K_m(wr) \, e^{jm\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$

$H_{z_2} = B_2 \cdot K_m(wr) \, e^{jm\varphi} \cdot e^{-j\beta z}$

$K_m \equiv$ Función de Bessel de 3º especie.

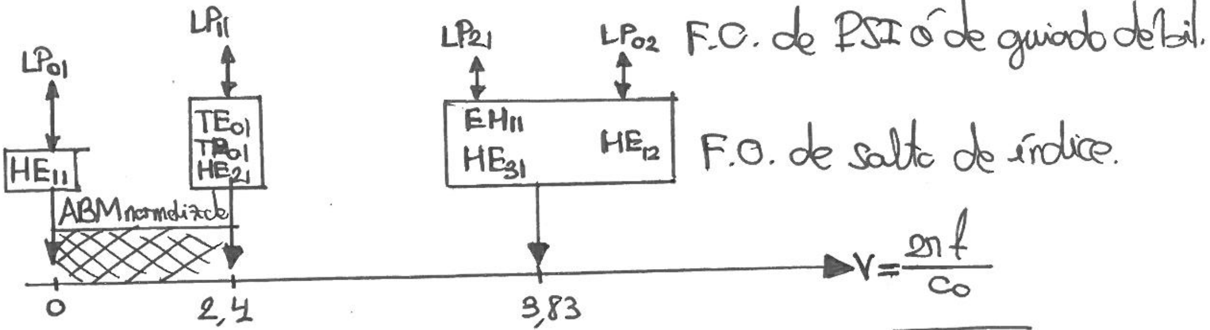
4.3.2.3.- DENOMINACIÓN DE LOS MODOS.

A) Si $m \neq 0$ se denominan MODOS HÍBRIDOS EHmn y HEmn (rayos oblicuos).
B) Si $m = 0$ se denominan MODOS HÍBRIDOS TMon y TEon (rayos meridionales).

Teniendo en cuenta que la frecuencia normaliza en una fibra óptica se define de la siguiente forma:

$$V = k \cdot NA \cdot a$$

El orden de los modos dentro de una fibra óptica es:



$NA=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$

$\theta_{max}=\alpha_a=\arcsen(NA)$

EL NUMERO DE MODOS QUE SE PROPAGAN POR UNA FIBRA OPTICA VIENE DADO POR EL SIGUIENTE VALOR:

$$M=\frac{V^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2(n_1^2-n_2^2)^*$$

4.3.3- FIBRA ÓPTICA DE GUIADO DÉBIL.

En estas fibras se cumple que: $n_1 \approx n_2$

Además en estas fibras se cumple que los modos $EH_{m-1,n}$ y los modos $HE_{m+1,n}$ son modos degenerados porque tienen la misma frecuencia de corte. Si se suman dos de estos modos el campo eléctrico transversal está polarizado en X y si se restan está polarizado en Y. Por eso a estos modos se les denomina LP_{lm}

$$EH_{m-1,n} + HE_{m+1,n} \Rightarrow \text{POLARIZACIÓN EN X}$$

$$EH_{m-1,n} - HE_{m+1,n} \Rightarrow \text{POLARIZACIÓN EN Y}$$

Modos. Guiado débil

Fibra de guiado débil: $n_1 \simeq n_2$

⬇

Los modos con constantes de propagación muy parecidas se pueden agrupar en ondas LINEALMENTE POLARIZADAS.

⬇

El campo eléctrico transversal sigue una trayectoria LINEAL. Dirección de Polarización en el eje x o en el eje y

⬇

Los campos se pueden representan utilizando coordenadas rectangulares en lugar de coordenadas cilíndricas

⬇

-Degeneración de modos.
- Cambio de denominación de modos (modos LP)

Modos LP_{lm}	Modos exactos	Ecuación característica	Frecuencia normalizada de corte
LP_{01}	HE_{11}	$V=0$	$V_0=0$
$LP_{0,m+1}$	$HE_{1,m+1}$	$J_1(V)=0$	$V_0=\chi_{1m} \quad m\geq 1$
LP_{1m}	TE_{0m} TM_{0m} HE_{2m}	$J_0(V)=0$	$V_0=\chi_{0m} \quad m\geq 1$
LP_{lm}	$EH_{l-1,m}$ $HE_{l+1,m}$	$J_{l-1}(V)=0$	$V_0=\chi_{l-1,m} \quad l\geq 2 \quad m\geq 1$

Problema FO

Nº de modos que se propagan $= M = \frac{V^2}{2}$

$V = k_0 R_0 NA = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ → $\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{f}$

Tenemos una FO multimodo de salto de índice con AN=0,2 en la que se propagan 1000 modos con una longitud de onda de $\lambda = 0{,}85\ \mu m$.

a) ¿Cuánto vale el radio de núcleo?

b) ¿Cuántos modos se propagan con $\lambda = 1{,}32\ \mu m$ y con $\lambda = 1{,}55\ \mu m$?

c) ¿tercera ventana 1 modo?

$AN = 0{,}2$

$\lambda = 0{,}85\ \mu m$

a) ¿a?

$M = 1000 = \frac{V^2}{2} \longrightarrow V = 44{,}72 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot NA$ $\qquad a = 30\ \mu m$

b) $V\Big|_{\lambda = 1{,}32\ \mu m} = 28{,}56 \longrightarrow M = \frac{V^2}{2} \simeq 408$ modos

$V\Big|_{\lambda = 1{,}55\ \mu m} = 24{,}32 \longrightarrow M = \frac{V^2}{2} \simeq 299$ modos

c) La tercera ventana de propagación es $\lambda = 1{,}55\ \mu m$

Para que sólo se propague un modo, debe ser: $0 < V \leq 2{,}405$.

$V = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot NA = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2{,}405$ y despejar → a_{max} / → $n_{1\,max} =$ ← Dato n_2

d) ¿Qué modo será?

LP_{01} ó HE_{11}

1º ventana $\lambda_1 = 0{,}85\ \mu m$

2º ventana $\lambda_2 = 1{,}32\ \mu m$

3º ventana $\lambda_3 = 1{,}55\ \mu m$