2. Lógica Proposicional
Deducción natural

Departamento de Inteligencia Artificial
ETS de Ingenieros Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Sistemas formales
Teorías
Demostraciones

Sistema formal de demostracion

- Un **sistema formal de demostración** consiste en:
  - Un **lenguaje formal** (alfabeto y reglas de formación de fórmulas)
  - Un conjunto de **axiomas** lógicos (fórmulas válidas sin prueba)
  - Un **cálculo**, o conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas
  - Una definición de **demostración**

- Recordando el ejemplo del juego del MIU, teníamos:
  - Un lenguaje formal (alfabeto era {M,I,U}) y ninguna regla de formación
  - Un único axioma (MI)
  - Un cálculo (reglas de transformación RT1-RT4)
  - Una definición de demostración (poder derivar una fórmula)

Teorías

Una **teoría** T es un sistema formal ampliado con un conjunto de axiomas no lógicos o premisas (es decir, que se consideran como verdad)

$$T[\ \Gamma\ ]$$

Si $\Gamma=\varnothing$ entonces T es la teoría básica del sistema formal

Demonstración

– Una **demostración** o *prueba* de una fórmula G en una teoría T [Γ]

(escrito T [Γ] ⊢ G) es una secuencia finita de fórmulas tal que toda fórmula de la secuencia es o bien un axioma de la teoría o bien el resultado de aplicar alguna regla de inferencia a fórmulas anteriores de la secuencia.

– La notación suele ser:

$$[\text{nombre\_de\_la\_regla}] = \frac{[\text{premisas}]}{[\text{conclusión}]}$$

– G es la última fórmula de la teoría. A menudo es llamada *teorema*.

– Un **teorema** de la teoría T [Γ] es una fórmula para la que existe al menos una prueba en T [Γ]

Deducción natural
Las demostraciones deberían ser suficientemente **inteligibles**, como para ser verificadas por un humano, y suficientemente **formales** como para estar libres de errores (1934, Gentzen)

Gerhard Gentzen
(1909-1945)

Notación

T [Γ] $\vdash$ G se puede leer como

«De la teoría que toma como axiomas el conjunto de proposiciones gamma, **se deduce** G»

T [Γ] $\vDash$ G se puede leer como

«De la teoría que toma como axiomas el conjunto de proposiciones gamma, **es consecuencia semántica** G»

Metalógica. Propiedades de un sistema formal

– **Solidez**. Que todos los teoremas de T[Γ] sean consecuencias lógicas suyas (sinónimos: corrección, validez, *soundness*):

Es decir, que si $T[\Gamma] \vdash G$ entonces $T \models G$

– **Completitud**. Dada una teoría T[Γ] todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de T[Γ] (inglés: *completeness)*:

Es decir, que si $T[\Gamma] \models G$ entonces $T[\Gamma] \vdash G$

– **Consistencia.** Que en el sistema no sea posible derivar una contradicción:

Es decir, que si $T[\Gamma] \nvdash G \wedge \neg G$

– **Decidibilidad.** Que exista un algoritmo tal que dada una fórmula cualquiera, pueda decidir si es (i) demostrable o no (ii) válido o no:

Es decir, que dado G pueda decidir si $T[\Gamma] \vdash G$ o $T[\Gamma] \nvdash G$

Es decir, que dado G pueda decidir si $T[\Gamma] \models G$ o $T[\Gamma] \models G$

- Validez de una fórmula sin premisas:
  - Decir $\varnothing \vDash G$ es igual que decir que G es válida (no necesita de premisas)
- Consecuencia lógica y demostrabilidad
  - Si el cálculo es sólido y completo, entonces $\vDash$ y $\vdash$ son equivalentes
- Decidibilidad
  - La lógica proposicional es **decidible**, porque existe un algoritmo (la tabla de verdad) que permite demostrar la validad de cualquier fórmula en un número finito de pasos

Metalógica

Un cálculo es **sólido** si toda fórmula que se deriva en el cálculo es una verdad lógica.

Un cálculo es **completo** si toda verdad lógica puede deducirse en el cálculo.

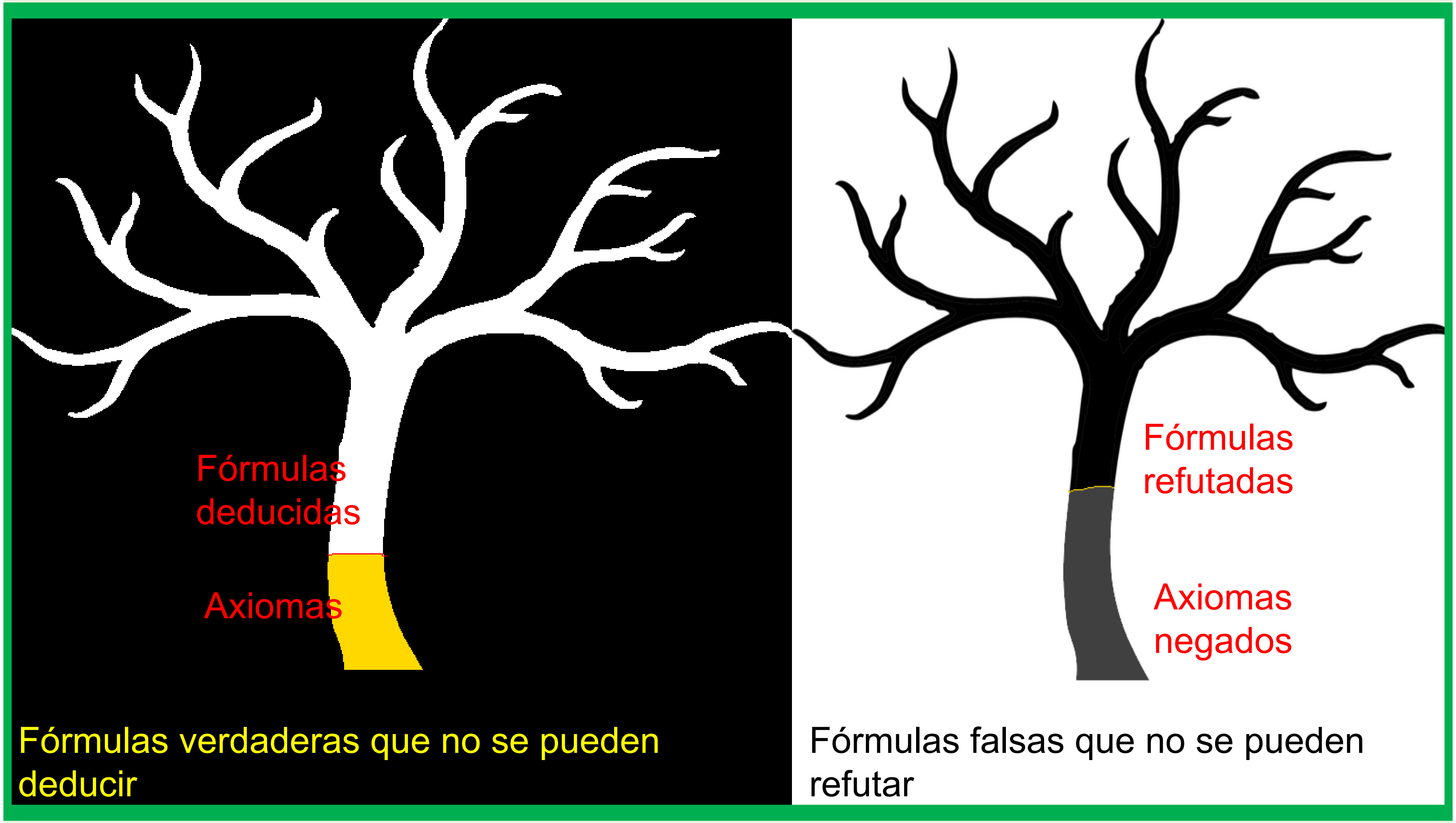
Un cálculo es **decidible** si existe un procedimiento finito y algorítmico que permita decidir si una fórmula o deducción es demostrable en el cálculo.

Metalógica de la lógica proposicional

- La Lógica Proposicional puede sistematizarse en sistemas formales que sean:
  - Válidos, Consistentes y Completos.
  - Decidibles para los problemas de validez (tautologicidad) y deducidibilidad.


Fórmulas
Axiomas
Fórmulas verdaderas que
no se pueden deducir

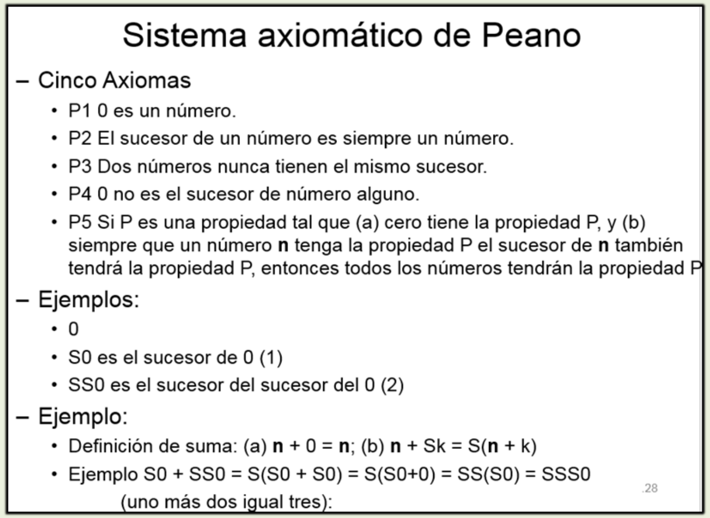
Cabría pensar también en axiomas negados y fórmulas refutadas...




KURT
GÖDEL
(1906 - 1978)
Matemático y lógico austro-húngaro, uno de los padres de la Informática Teórica. Entre otros hitos, demostró la validez del cálculo lógico de primer orden y publicó el teorema de incompletitud.
www.mhi.fi.upm.es

Metálógica: sobre el sistema de Peano

Primer teorema de incompletitud de Gödel
Cualquier teoría aritmética recursiva que sea consistente es incompleta.



Sistema axiomático de Peano

- Cinco Axiomas
  - P1 0 es un número.
  - P2 El sucesor de un número es siempre un número.
  - P3 Dos números nunca tienen el mismo sucesor.
  - P4 0 no es el sucesor de número alguno.
  - P5 Si P es una propiedad tal que (a) cero tiene la propiedad P, y (b) siempre que un número **n** tenga la propiedad P el sucesor de **n** también tendrá la propiedad P, entonces todos los números tendrán la propiedad P
- Ejemplos:
  - 0
  - S0 es el sucesor de 0 (1)
  - SS0 es el sucesor del sucesor del 0 (2)
- Ejemplo:
  - Definición de suma: (a) **n** + 0 = **n**; (b) **n** + Sk = S(**n** + k)
  - Ejemplo S0 + SS0 = S(S0 + S0) = S(S0+0) = SS(S0) = SSS0 (uno más dos igual tres):

28

No es completo!

nunca se podrá encontrar un sistema axiomático que sea capaz de demostrar *todas* las verdades matemáticas y ninguna falsedad

Kurt Gödel
(1906-1978)

Deducción natural

Métodos de razonamiento

- ¿Cómo determinar si $\Gamma \vDash G$?
  - Métodos semánticos
    - Mirando las tablas de verdad, quizás haya que estudiar un número *muy grande* de interpretaciones posibles. Para $\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ habria que explorar 2^n posibles interpretaciones.
    - En lógica de predicados de primer orden, es imposible.
  - Métodos sintácticos
    - Manipulando las fórmulas conforme a unas reglas, y conseguir deducir G ($\Gamma \vdash G$). Si el cálculo es correcto y completo, $\vdash$ y $\vDash$ son equivalentes.

Deducción natural

- **Deducción natural**
  - Sin axiomas lógicos
  - Dos reglas de inferencia para cada conectiva: introducción y eliminación
  - Permite hacer supuestos

Ejemplo de deducción natural

- Démuestrese que $\{p \rightarrow q, r \wedge \neg q\} \vdash r \wedge \neg p$

1: $p \rightarrow q$	premisa
2: $r \wedge \neg q$	premisa
3: $\neg q$	elim $\wedge$(2)
4: $\neg p$	MT(1,3)
5: r	elim$\wedge$(2)
6: $r \wedge \neg p$	intro$\wedge$ (4,5)
■	(a veces QED, (*Quod erat demonstrandum*) o □)

Sistema formal de deducción natural

- Lenguaje formal para la Lógica de Enunciados
  - Conectivas: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - Conjunto finito de variables proposicionales atómicas: p, q, r…
  - Paréntesis
- Reglas de inferencia: diez (dos por cada conectiva)
  - [Propuestas por Gentzen en 1934]
- Definición de prueba:
  - Una prueba de una fórmula en una teoría es una secuencia de fórmulas en la que cada elemento es:
    - Premisa o supuesto temporal de la teoría, o bien
    - Resultado de la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmula/s anteriores en la secuencia, y tal que la última fórmula de la secuencia es la fórmula probada
- Definición de teorema:
  - Una fórmula B es teorema de una teoría $T[A_1,...,A_n]$) si B tiene una prueba en dicha teoría ($T[A_1,...,A_n] \vdash B$)

Notación de las reglas de inferencia

– Las reglas se suelen expresar de esta manera:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{[premisa1]}\\ \text{[premisa2]}\\ \dots\end{array}}{\text{[conclusión]}}$$

– Además, se usan metavariables (A,B,C…) donde cada símbolo representa una fórmula bien formada

Reglas de la conjunción

Introducción:

$$[intro\wedge]\ \frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A\wedge B}$$

Eliminación:

$$[elim\wedge_1]\ \frac{A\wedge B}{A} \qquad [elim\wedge_2]\ \frac{A\wedge B}{B}$$

Ejemplo: T[p,q] $\vdash p \wedge q$

1: p	premisa
2: q	premisa
3: $p \wedge q$	intro$\wedge$ (1,2)
■	

Podemos escribir «$E_\wedge$» o bien« $\wedge_{E1}$» o bien «elim$\wedge$», pero se recomienda mantener una notación consistente

Reglas de la disyunción

Introducción: $[intro\vee_1]\ \dfrac{A}{A\vee B}$ $[intro\vee_2]\ \dfrac{B}{A\vee B}$

Eliminación:

$$[\text{elim}\vee]\ \dfrac{\begin{array}{c}A\vee B\\ A\rightarrow C\\ B\rightarrow C\end{array}}{C}$$

También llamada «*prueba por casos*»

Ejemplo: T[p ∨ q, p → ¬r, q → ¬r] ⊢ ¬r

1. p ∨ q premisa
2. p → ¬r premisa
3. q → ¬r premisa
4. ¬r elim∨ (1,2,3)

■

Reglas de la negación

Introducción: $$[intro\neg]\ \frac{A \to B \wedge \neg B}{\neg A}$$

También llamada «*reducción al absurdo*»

Eliminación: $$[elim\neg]\ \frac{\neg\neg A}{A}$$

Ejemplo: $T[\neg p \to q \wedge \neg q] \vdash p$

1. $\neg p \to q \wedge \neg q$ premisa
2. $\neg\neg p$ intro¬ (1)
3. p elim¬ (2)

■

Reglas de la bicondicional

Introducción:

$$[intro\leftrightarrow\ ]\ \frac{\begin{array}{c}A\rightarrow B\\ B\rightarrow A\end{array}}{A\leftrightarrow B}$$

Eliminación:

$$[elim\leftrightarrow_1]\ \frac{A\leftrightarrow B}{A\rightarrow B} \qquad [elim\leftrightarrow_2]\ \frac{A\leftrightarrow B}{B\rightarrow A}$$

Ejemplo: T[p $\leftrightarrow$ q $\wedge$ r, p] $\vdash$ r

1. p $\leftrightarrow$ q $\wedge$ r   premisa
2. p $\rightarrow$ q $\wedge$ r $\leftrightarrow_E$ (1)
3. p   premisa
4. q $\wedge$ r $\leftrightarrow_E$ (2,3)
5. r $\wedge_E$ (4)

■

Reglas de implicación

Introducción:

$$[intro\to\ ]\ \frac{\begin{array}{c}A(supuesto)\\ B\end{array}}{A\to B}$$

A es cualquier fórmula, aunque no se haya demostrado

B es una fórmula demostrada tras haber aceptado el supuesto A

Teorema de la deducción

Eliminación:

$$[elim\to\ ]\ \frac{\begin{array}{c}A\to B\\ A\end{array}}{B}$$

También llamado «*Modus Ponens*»

Ejemplo: T[p → q, q → r] ⊢ p → r

1. $p \to q$ premisa
2. $q \to r$ premisa
3. p supuesto
4. q $\to_E$ (1,3)
5. r $\to_E$ (2,4)
6. $p \to r$ $\to_I$ (3,5) ■

Supuestos

$$[intro\rightarrow\ ]\ \frac{\begin{array}{c}A(supuesto)\\ B\end{array}}{A\rightarrow B}$$

- Supuestos
  - Los supuestos se añaden a la teoría básica sólo temporalmente, sin necesidad de demostración. Un supuesto se introduce en un punto de la demostración y se cancela (*descarga*) en otro punto posterior. Cuando se introduce un supuesto hay que mover la siguiente secuencia de fórmulas hacia la derecha, hasta descargar (o devolver, o cancelar) el supuesto con $\rightarrow_{I.}$ Como resultado de la cancelación, una *nueva fórmula* queda demostrada
- En otras palabras, equivale a decir…

  «supongamos que A»

  «entonces demuestro (usando A) que B»

  «en realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, entonces podría demostrar B»

  «eso equivale a decir que he demostrado la implicación A →B»

Supuestos (II)

– Región de un supuesto
  - La **región** de un supuesto es la secuencia de lineas entre la introducción del supuesto (inclusive) y su descarga (no inclusive): básicamente, la parte que se desplaza a la derecha.
  - Puede haber regiones anidadas
  - Dos regiones pueden estar totalmente separadas
  - Al descargar un supuesto, se justica el paso con $\rightarrow_E$ (m-n), donde m y n son la primera y la última línea de la región correspondiente
  - Las reglas se aplican a fórmulas que están en la misma región

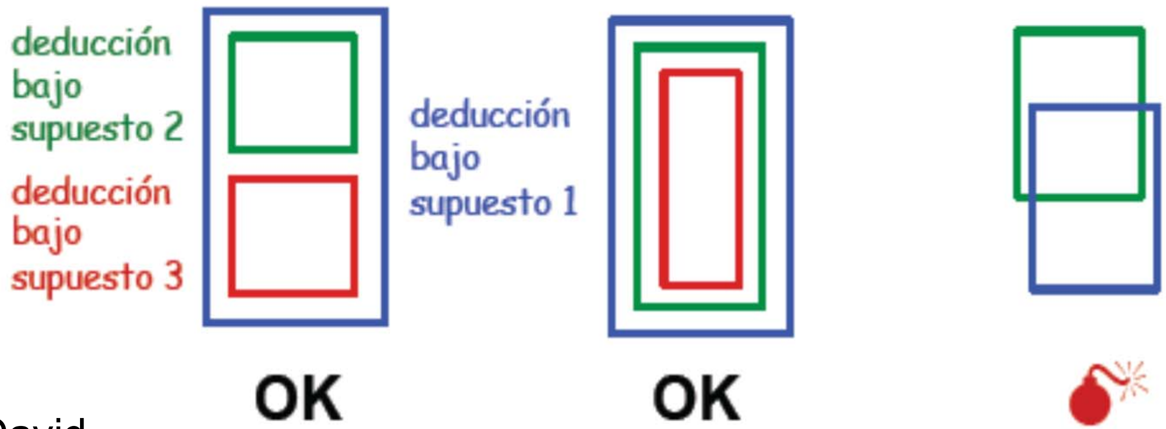


Diagrama tomado de David

Teorema de la deducción

– Siendo $T[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ una teoría básica ampliada con un conjunto de n premisas, si la incorporación como supuesto de un fórmula A permite deducir otra fórmula B:

$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \cup \{A\} \vdash B$$

entonces

$$T[A_1, A_2, \ldots, A_n] \vdash A \rightarrow B$$

– **Teorema de la deducción**: En general, tanto para premisas como para supuestos:

$$T[A] \vdash B \text{ si y sólo si } T \vdash A \rightarrow B$$

Tarski (1901-1983)
Herbrand (1908-1931)

Observación: la transpa se titula “teorema…”. Naturalmente, no es un teorema del sistema que hemos definido, sino un metateorema de la lógica proposicional.

[intro∧] $\dfrac{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}}{A\wedge B}$	[elim∧] $\dfrac{A\wedge B}{A}$ [elim∧] $\dfrac{A\wedge B}{B}$
[intro∨] $\dfrac{A}{A\vee B}$ [intro∨] $\dfrac{B}{A\vee B}$	[elim∨] $\dfrac{\begin{matrix}A\vee B\\A\to C\\B\to C\end{matrix}}{C}$
[intro¬] $\dfrac{A\to B\wedge\neg B}{\neg A}$	[elim¬] $\dfrac{\neg\neg A}{A}$
[intro→] $\dfrac{\begin{matrix}A(supuesto)\\B\end{matrix}}{A\to B}$	[elim→] $\dfrac{\begin{matrix}A\to B\\A\end{matrix}}{B}$ MP
[elim↔] $\dfrac{A\leftrightarrow B}{A\to B}$ [elim↔] $\dfrac{A\leftrightarrow B}{B\to A}$	[intro↔] $\dfrac{\begin{matrix}A\to B\\B\to A\end{matrix}}{A\leftrightarrow B}$

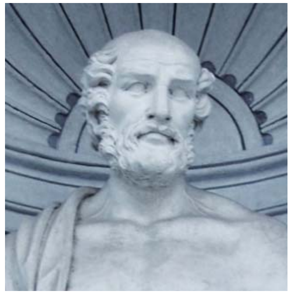
Modus ponens

- Modus ponens (MP)

$$[\text{elim}\to]\ \frac{A\to B \quad A}{B}$$

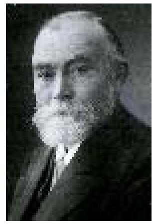
- Curiosidad histórica 1
  - Estudiado por primera vez por Teofrasto
  - También estudió el modus tollens (MT)

$$P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$$



Teofrasto
371 aC – 287 aC

- Curiosidad histórica 2
  - En la primera formalización de la lógica proposicional (1879), Frege escogió 6 axiomas una única regla: MP.
    - A → (B → A)
    - (A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C))
    - (A → (B → C)) → (B → (A → C))
    - (A → B) → (¬B → ¬A)
    - ¬¬A → A



Gottlob Frege

Regla de identidad

$$[ident]\ \frac{A}{A}$$

Una fórmula se deduce de sí misma

(ojo con las regiones!)

Ejemplo de uso de la regla de identidad

$T[\ ] \vdash A \rightarrow A$

1.	A	supuesto
2.	A	ident(1)
3. $A \rightarrow$	A	intro$\rightarrow$(1,2)

■

Ejemplo de deducción natural

Deducir: $T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$

1. $s \wedge (p \vee q)$ premisa
2. $p \vee q$ elim$\wedge$ (1)
3. $p \rightarrow \neg r$ premisa
4. $q \rightarrow \neg r$ premisa
5. $\neg r$ elim$\vee$ (2,3,4)
6. s elim$\wedge$ (1)
7. $s \wedge \neg r$ intro$\wedge$ (5,6)

■

Reglas derivadas

En distintas demostraciones se repiten con frecuencia los mismos pasos:

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

1.	$r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2.	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3.	$\quad r$	supuesto
4.	$\quad q \wedge s$	elim$\rightarrow$ (1,3)
5.	$\quad (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	intro$\wedge$ (2,4)
6.	$r \rightarrow (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	intro$\rightarrow$ (3,5)
7.	$\neg r$	intro$\neg$ (6)

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \wedge \neg q$	premisa
3.	$\neg q$	elim$\wedge$ (2)
4.	$\quad p$	supuesto
5.	$\quad q$	elim$\rightarrow$ (1,4)
6.	$\quad q \wedge \neg q$	intro$\wedge$ (3,5)
7.	$p \rightarrow q \wedge \neg q$	intro$\rightarrow$ (4,6)
8.	$\neg p$	intro$\neg$ (7)
9.	r	elim$\wedge$ (2)
10.	$r \wedge \neg p$	intro$\wedge$ (8,9)

Podríamos acortar las dos demostraciones si previamente demostramos con carácter general que $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$, para cualesquiera fórmulas A y B.

Reglas derivadas (II)

T[A → B, ¬B] ⊢ ¬A

1. A → B	premisa
2. ¬B	premisa
3. A	supuesto
4. B	elim→ (1,3)
5. B ∧ ¬B	intro∧ (2,4)
6. A → B ∧ ¬B	intro→ (3,5)
7. ¬A	intro¬ (6)

Las reglas derivadas se representan como las reglas básicas:

Modus Tollens

$$[MT]\ \frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

Las demostraciones anteriores quedarían ahora:

T[r → (q ∧ s), ¬(q ∧ s)] ⊢ ¬r

1. r → (q ∧ s)	premisa
2. ¬(q ∧ s)	premisa
3. ¬r	**MT (1,2)**

T[p → q, r ∧ ¬q] ⊢ r ∧ ¬p

1. p → q	premisa
2. r ∧ ¬q	premisa
3. ¬q	elim∧ (2)
4. ¬p	**MT (1,3)**
5. r	elim∧ (2)
6. r ∧ ¬p	intro∧ (8,9)

Reglas derivadas (III)

Reglas para la implicación:

$T[A \rightarrow B, B \rightarrow C] \vdash A \rightarrow C$	Transitividad
$T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$	Modus Tollendo Tollens (MT)

Reglas asociativa y conmutativa:

$T[(A \vee B) \vee C] \vdash A \vee (B \vee C)$	Asociatividad
$T[A \vee B] \vdash B \vee A$	Conmutatividad
$T[(A \wedge B) \wedge C] \vdash A \wedge (B \wedge C)$	Asociatividad
$T[A \wedge B] \vdash B \wedge A$	Conmutatividad

Reglas de De Morgan:

$T[\neg(A \wedge B)] \vdash \neg A \vee \neg B$	De Morgan
$T[\neg(A \vee B)] \vdash \neg A \wedge \neg B$	De Morgan

Reglas de corte:

$T[A \vee B, \neg A] \vdash B$	Corte (o Modus Tollendo Ponens (MTP))
$T[A \vee B, \neg A \vee C] \vdash B \vee C$	Corte

- **Las reglas derivadas se pueden deducir de las básicas (ejercicio!)**
- **Introducir reglas derivadas en el cálculo no lo hacen más fuerte**

Teorema de intercambio

Sea A una fórmula y B1 una subfórmula de A, si

$\vdash A$

$\vdash B1 \leftrightarrow B2$

A' resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2

entonces

$\vdash A'$

$T[p \leftrightarrow r, q \rightarrow s, s \rightarrow t \wedge r] \vdash q \rightarrow p \wedge t$

1.	$q \rightarrow s$	premisa
2.	$s \rightarrow t \wedge r$	premisa
3.	q	supuesto
4.	s	Elim$\rightarrow$ (1,3)
5.	$t \wedge r$	Elim$\rightarrow$ (2,4)
6.	$p \leftrightarrow r$	premisa
7.	$t \wedge p$	Intercambio (5,6)
8.	$p \wedge t$	conmutatividad (7)
9.	$q \rightarrow p \wedge t$	I$\rightarrow$ (3,8)

Deducción natural en la práctica

Deducción natural en la práctica

- Como conclusión, ¿qué podemos utilizar para demostrar la corrección de una argumentación mediante deducción natural?
  - Las 10 reglas básicas
  - Las reglas derivadas mencionadas previamente (en ocasiones se piden demostraciones sin usar estas reglas)
  - El (teorema de) intercambio, que resume unas pocas reglas
  - Y **nada más**

Reglas básicas y derivadas para deducción natural

[intro∧] $$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

[elim∧] $$\frac{A \wedge B}{A}$$

[elim∧] $$\frac{A \wedge B}{B}$$

[intro¬] $$\frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

[elim¬] $$\frac{\neg\neg A}{A}$$

[intro∨] $$\frac{A}{A \vee B}$$

[intro∨] $$\frac{B}{A \vee B}$$

[elim∨] $$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

[intro→] $$\frac{A(sup.) \quad B}{A \rightarrow B}$$

[elim→] $$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

[intro↔] $$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$$

[elim↔] $$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$$

[elim↔] $$\frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

[Intercambio] de una fórmula F y de la equivalencia G ↔ H, se deduce F' que resulta de sustituir en F **todos** los G por H

[MT] $$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

[trans] $$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

[asoc] $$\frac{(A \vee B) \vee C}{A \vee (B \vee C)}$$

[conm] $$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

[de Morgan] $$\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$$

[def→] $$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$$

[trans] $$\frac{A \leftrightarrow B \quad B \leftrightarrow C}{A \leftrightarrow C}$$

[asoc] $$\frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge (B \wedge C)}$$

[conm] $$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}$$

[de Morgan] $$\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

[def→] $$\frac{\neg A \vee B}{A \rightarrow B}$$

[corte] $$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

[corte] $$\frac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{B \vee C}$$

Algunas equivalencias lógicas

Puedes aplicar el intercambio utilizando estas equivalencias en los dos sentidos

$\neg\neg A \equiv A$	doble negación
$A \wedge A \equiv A$	ley de idempotencia de la conjunción
$A \vee A \equiv A$	ley de idempotencia de la disyunción
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	conmutatividad de la conjunción
$A \vee B \equiv B \vee A$	conmutatividad de la disyunción
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	asociatividad de la conjunción
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	asociatividad de la disyunción
$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	implicación en función de la disyunción
$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	ley de De Morgan
$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	ley de De Morgan
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	doble implicación en función de la implicación

Procedimiento práctico

Deducir: T[s ∧ (p ∨ q), p → ¬r, q → ¬r] ⊢ s ∧ ¬r

1. s ∧ (p ∨ q) premisa
2. p ∨ q elim∧ (1)
3. p → ¬r premisa
4. q → ¬r premisa
5. ¬r elim∨ (2,3,4)
6. s elim∧ (1)
7. s ∧ ¬r intro∧ (5,6)

■

$$[\text{elim}\vee]\ \frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ A \to C \\ B \to C \end{array}}{C}$$

Al utilizar una regla, es necesario indicar qué regla se usa, y sobre qué fórmulas. En este ejemplo, la elim V necesita de tres fórmulas. No es posible escribir elim∨ (2) por tanto.

Al utilizar la regla, uno ha de ser capaz de identificar qué es A, qué es B y qué es C. En este caso, por ejemplo, C es ¬r. Lo importante es la forma lógica.