

# Álgebra

Notas de clase  
grupos 12.1 y 13.1

Curso 2020-2021

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Estructuras algebraicas básicas

 **Lenguaje y razonamiento matemáticos**

 **Álgebra de Boole**

 **Funciones entre conjuntos**

 **Grupos, anillos y cuerpos**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 1

# Lenguaje y razonamiento matemáticos

## Lógica de proposiciones

**Proposición:** enunciado que puede ser verdadero o falso

**Variable proposicional:**  $p, q, r, s, t, \dots$

Valor de verdad de una proposición:      VERDADERO: V, T, 1                      FALSO: F,  $\perp$ , 0

Tabla de verdad:

$p$   
V  
F

**Conectores:**

- Símbolos para representar conexiones lógicas entre proposiciones
- Forman proposiciones compuestas
- Operan entre proposiciones (operaciones lógicas)

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Conectores (un argumento): NEGACIÓN ( $\neg$ )

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

Conectores (dos argumentos): CONJUNCIÓN ( $\wedge$ ), DISYUNCIÓN ( $\vee$ ), DISYUNCIÓN EXCLUSIVA ( $\underline{\vee}$ )  
CONDICIONAL ( $\implies$ ), BICONDICIONAL ( $\iff$ )

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$	$p \implies q$	$p \iff q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Conjunción:  $p$  Y  $q$ ,  $p$  AND  $q$

Disyunción:  $p$  O  $q$ ,  $p$  OR  $q$

Disyunción exclusiva:  $p$  O  $q$ ,  $p$  XOR  $q$

Condicional: Implicación material (antecedente:  $p$ , consecuente:  $q$ ; cond. necesaria  $q$ , cond. suficiente:  $p$ )

- inversa de  $p \implies q$ :  $\neg p \implies \neg q$
- Recíproca de  $p \implies q$ :  $q \implies p$
- Contrarrecíproca de  $p \implies q$ :  $\neg q \implies \neg p$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

¿Cuántos conectores diferentes podremos definir con dos proposiciones?  $2^{2^2}$

$p$	$q$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

El valor de verdad de cualquier expresión con 2 variables proposicionales es una de estas columnas

Así:  $f_1 \equiv p \wedge q$     $f_7 \equiv p \vee q$     $f_6 \equiv p \underline{\vee} q$     $f_{13} \equiv p \implies q$     $f_9 \equiv p \iff q$   
o por ejemplo:  $f_8 \equiv \neg(p \vee q)$     $f_{14} \equiv \neg(p \wedge q)$     $f_{12} \equiv \neg p$

Podemos definir otros conectores:

Operador de Peirce:  $f_8 \equiv p \downarrow q$  (NI  $p$  NI  $q$ ,  $p$  NOR  $q$ )  
Operador de Sheffer:  $f_{14} \equiv p | q$  ( $p$  INCOMPATIBLE CON  $q$ ,  $p$  NAND  $q$ )

El valor de verdad de una expresión con 3 variables proposicionales es una de las  $2^{2^3}$  posibles

$p$	$q$	$r$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_{254}$	$f_{255}$
V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Tautología: expresión lógica que es verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman  
 $f_{15}$  en el caso de dos variables,  $f_{255}$  en el caso de tres variables

Contradicción: expresión lógica que es falsa independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la forman  
 $f_0$  en el caso de dos o tres variables

Proposición contingente o factual: enunciado que puede ser verdadero o falso según lo sean las proposiciones que lo forman

### Ejemplos:

- Contradicciones:

- $p \wedge \neg p$
- $\neg(p \vee \neg p)$
- $(p \implies q) \wedge (p \wedge \neg q)$

- Tautologías:

- $p \vee \neg p$  (ley del tercio excluso)
- $\neg(p \wedge \neg p)$  (ley de no contradicción)

Las tautologías reciben el nombre de LEYES LÓGICAS.

Cuando tienen forma de implicación se denomina IMPLICACIÓN LÓGICA: no puede darse que el consecuente sea falso siendo verdadero el antecedente.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplos:

### • Implicaciones lógicas:

- $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$  (*modus ponendo ponens*)
- $(\neg q \wedge (p \implies q)) \implies \neg p$  (*modus tollendo tollens*)
- $(\neg p \wedge (p \vee q)) \implies q$  (silogismo disyuntivo, *modus tollendo ponens*)
- $(p \wedge \neg(p \wedge q)) \implies \neg q$  (*modus ponendo tollens*)
- $((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$  (silogismo hipotético)
- $(p \wedge \neg p) \implies q$  (de una contradicción se deduce cualquier cosa)
- $((p \implies q) \wedge (\neg p \implies q)) \implies q$

### • Equivalencias lógicas:

- $(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$  (ley de contraposición: equivalencia entre condicional y contrarrecíproca)
- $\neg(\neg p) \iff p$  (ley de involución o doble negación)
- $(p \implies q) \iff ((p \wedge \neg q) \implies (p \wedge \neg p))$  (ley de reducción al absurdo)
- $p \iff (\neg p \implies (q \wedge \neg q))$  (otra variante)
- $(\neg p \implies p) \iff p$  (otra variante)
- $((p \implies q) \wedge (p \implies r)) \iff (p \implies (q \wedge r))$
- $((p \implies q) \vee (r \implies q)) \iff ((p \wedge r) \implies q)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

• Equivalencias lógicas entre conectivas:

- $(p \underline{\vee} q) \iff \neg(p \iff q)$  (equivalencia de la disyunción exclusiva)
- $(p \iff q) \iff ((p \implies q) \wedge (q \implies p))$  (equivalencia del bicondicional)
- $(p \iff q) \iff (\neg p \iff \neg q)$
- $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$  (equivalencia del condicional)
- $(p \implies q) \iff (\neg(p \wedge \neg q))$  (equivalencia del condicional)
- $(p \downarrow q) \iff \neg(p \vee q)$  (equivalencias del operador de Peirce)
- $(p \downarrow p) \iff \neg p$
- $((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)) \iff (p \vee q)$
- $((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \iff (p \wedge q)$
- $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \iff (p \implies q)$
- $(p | q) \iff \neg(p \wedge q)$  (equivalencias del operador de Sheffer)
- $(p | p) \iff \neg p$
- $((p | q) | (p | q)) \iff (p \wedge q)$
- $((p | p) | (q | q)) \iff (p \vee q)$
- $(p | (q | q)) \iff (p \implies q)$

• Equivalencias lógicas (propiedades):

- |  |  |                           |
|--|--|---------------------------|
| • $(p \wedge p) \iff p$                                  | $(p \vee p) \iff p$                            | (leyes de idempotencia)   |
| • $(p \wedge (p \vee q)) \iff p$                         | $(p \vee (p \wedge q)) \iff p$                 | (leyes de absorción)      |
| • $(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$                       | $(p \vee q) \iff (q \vee p)$                   | (leyes de conmutatividad) |
| • $((p \wedge q) \wedge r) \iff (p \wedge (q \wedge r))$ | $((p \vee q) \vee r) \iff (p \vee (q \vee r))$ | (leyes de asociatividad)  |
| • $(p \wedge \top) \iff p$                               | $(p \vee \perp) \iff p$                        | (elementos neutros)       |
| • $(p \wedge \perp) \iff \perp$                          | $(p \vee \top) \iff \top$                      | (elementos absorbentes)   |



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Lógica de predicados (de primer orden)

**Predicado:** enunciado que se refiere a una propiedad de un objeto o de varios, representados por una o más variables.

Cuando se sustituyen las variables (se “ligan”) por algún elemento de cierto conjunto o **universo del discurso** obtenemos una proposición.

Ejemplos:

$P(n)$  [  $n$  es un número par]. El universo del discurso es el conjunto de los números naturales o el de los enteros.

$L(x, y)$  [  $x \leq y$  ]. El universo del discurso es el conjunto de los números reales.

Así:  $P(2), P(4)$  son proposiciones verdaderas y  $P(7), P(1)$  son falsas.  $L(2,2)$  es verdadera y  $L(9,1)$  es falsa.

**Cuantificadores:** Son alusiones a algunos de los elementos del universo del discurso.

“Ligan” las variables presentes en el predicado, que dejan de ser “libres”, lo que contribuye a convertirlo en proposición (lo será cuando todas sus variables estén “ligadas”).

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena' in a large, stylized, teal-colored font with a slight shadow effect. To its right, the number '99' is written in a smaller, bold, black font. The entire logo is set against a light blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Cuantificador universal:**  $\forall$  (“para cada”, “para todo”).

Notaciones:  $\forall x P(x)$        $\forall x, P(x)$        $\forall x || P(x)$        $(\forall x) P(x)$       (Universo del discurso implícito)  
 $\forall x \in D, P(x)$        $\forall x, x \in D, P(x)$       (Universo del discurso explícito)

Se verifica:

$$\forall x \in D, P(x) \iff \forall x, (x \in D \implies P(x))$$
$$\forall x \in D, P(x) \implies P(a) \quad (\text{si } a \in D)$$

**Cuantificador existencial:**  $\exists$  (“existe algún”, “para algún”, “al menos un”).

Notaciones:  $\exists x P(x)$        $\exists x, P(x)$        $\exists x || P(x)$        $(\exists x) P(x)$       (Universo del discurso implícito)  
 $\exists x \in D, P(x)$        $\exists x, x \in D, P(x)$       (Universo del discurso explícito)

Se verifica:

$$\exists x \in D, P(x) \iff \exists x, (x \in D \wedge P(x))$$
$$P(a) \implies \exists x \in D, P(x) \quad (\text{si } a \in D)$$

**Cuantificador de existencia y unicidad:**  $\exists!$  (“existe un único”, “para un y solo un”).

**Orden de los cuantificadores:** puede ser relevante.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Negación de los cuantificadores:

### UNIVERSAL:

$$\neg \forall x, P(x) \iff \exists x, \neg P(x) \qquad \neg \forall x \in D, P(x) \iff \exists x \in D, \neg P(x) \qquad \text{(a veces se emplea } \exists x, P(x))$$

Nótese que:

$$\neg \forall x \in D, P(x) \iff \neg \forall x, (x \in D \implies P(x)) \iff \exists x, \neg(x \in D \implies P(x)) \iff \exists x, (x \in D \wedge \neg P(x)) \iff \exists x \in D, \neg P(x)$$

$$\text{(Se ha empleado: } \neg(p \implies q) \iff (p \wedge \neg q) \text{)}$$

### EXISTENCIAL:

$$\neg \exists x, P(x) \iff \forall x, \neg P(x) \qquad \neg \exists x \in D, P(x) \iff \forall x \in D, \neg P(x) \qquad \text{(a veces se emplea } \forall x, P(x))$$

Nótese que:

$$\neg \exists x \in D, P(x) \iff \neg \exists x, (x \in D \wedge P(x)) \iff \forall x, \neg(x \in D \wedge P(x)) \iff \forall x, (x \in D \implies \neg P(x)) \iff \forall x \in D, \neg P(x)$$

$$\text{(Se ha empleado: } \neg(p \wedge q) \iff p \implies \neg q \text{)}$$

### EJEMPLOS:

$$\neg \forall d, \exists m, \forall p, L(m, p, d) \iff \exists d, \neg \exists m, \forall p, L(m, p, d) \iff \exists d, \forall m, \neg \forall p, L(m, p, d) \iff \exists d, \forall m, \exists p, \neg L(m, p, d)$$

$$\neg \exists m, \forall p, \forall d, L(m, p, d) \iff \forall m, \neg \forall p, \forall d, L(m, p, d) \iff \forall m, \exists p, \neg \forall d, L(m, p, d) \iff \forall m, \exists p, \exists d, \neg L(m, p, d)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Razonamiento deductivo

**Regla de inferencia** o forma de argumentación: Proceso por el que, a partir de un conjunto de proposiciones conocidas (**premisas**) hipotéticamente verdaderas, se obtiene otra proposición verdadera (**conclusión**).

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ (*) \quad \vdots \\ p_n \\ \hline q \end{array}$$

La conclusión **se deriva de** las premisas, es decir que siendo estas verdaderas, la conclusión es necesariamente verdadera (no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa).

Razonamiento **válido**: Conclusión verdadera en todos los casos en que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

Razonamiento no válido o **falacia**: Conclusión falsa en al menos algún caso en que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

Razonamiento **inconsistente**: Cuando no es posible que todas las premisas sean simultáneamente verdaderas.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it, and a dark orange shadow is cast below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# El lenguaje matemático

**Uniforme:** para todos lo mismo

**Unívoco:** sin ambigüedades

Conjunto de proposiciones verdaderas.

Proposiciones iniciales: **axiomas, postulados y definiciones**

Proposiciones deducidas: **proposición, lema, teorema, corolario, ...**

**Conjetura:** proposición que se cree cierta, pero que no se ha podido demostrar verdadera ni falsa

Ej: Conjetura de Goldbach (1742): Todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos números primos

$$4 = 2+2 \quad 6 = 3+3 \quad 8 = 3+5 \quad 10 = 5+5 \quad 12 = 5+7 \quad 14 = 7+7 \quad 16 = 5+11 \dots$$

(se ha comprobado computacionalmente hasta aprox.  $4 \cdot 10^{18}$ )

**Demostraciones:** a partir de un conjunto de proposiciones iniciales, deducimos proposiciones más complejas, mediante reglas de razonamiento aceptadas.

Las proposiciones a demostrar suelen ser de la forma:

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Estrategias de demostración (en muchos casos aparecen combinaciones de dos o más de ellas):

- **Hacia adelante**, directa o método sintético, para demostrar  $A \implies B$ :

Examinamos  $A$  y buscamos una cadena de implicaciones que lleve a  $B$

$$A \implies X_1, \quad X_1 \implies X_2, \quad X_2 \implies \dots \quad \dots \implies X_n, \quad X_n \implies B$$

- **Hacia atrás**, indirecta o método analítico, para demostrar  $A \implies B$ :

Examinamos  $B$  y buscamos una cadena de implicaciones que lleve a  $B$  desde  $A$

$$X_n \implies B, \quad \dots \implies X_n, \quad X_2 \implies \dots, \quad X_1 \implies X_2, \quad A \implies X_1$$

- Por **distinción de casos**:

Cuando la proposición se demuestra separadamente para cada caso en que pueda separarse

- **Contraposición**, para demostrar  $A \implies B$ :

Demostramos  $\neg B \implies \neg A$

- **Reducción al absurdo**, para demostrar  $A \implies B$  (o  $B$ ):

Intentamos demostrar  $A \wedge \neg B$  (o  $\neg B$ ) y llegamos a una contradicción

- **Por contraejemplo**, para demostrar  $\neg \forall x, P(x)$ :

Basta encontrar algún  $a$  para el que  $\neg P(a)$

- **Inducción simple**, para demostrar  $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ :

Demostramos  $P(1) \vee P(k) \implies P(k+1)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Hacia adelante:

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \text{Impar}(n^3)$  (El cubo de todo número impar es impar)

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k + 1$
2.  $n = 2k + 1 \implies n^3 = (2k + 1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$
3.  $n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1 \implies \text{Impar}(n^3)$

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \text{Impar}(n^2)$  (El cuadrado de todo número impar es impar)

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Impar}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k + 1$
2.  $n = 2k + 1 \implies n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
3.  $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \implies \text{Impar}(n^2)$

$\forall n \in \mathbf{N}, \text{Par}(n) \implies \text{Par}(n^2)$  (El cuadrado de todo número par es par)

1.  $\forall n \in \mathbf{N}, \text{Par}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k$
2.  $n = 2k \implies n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
3.  $n^2 = 2(2k^2) \implies \text{Par}(n^2)$

Hacia atrás:

$\forall x, y \in \mathbf{R}, x, y \geq 0 \implies \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$  (La media geométrica de dos números no es mayor que su media aritmética)

1.  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \iff \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0$
2.  $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \geq 0 \iff x+y - 2\sqrt{xy} \geq 0$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Contraposición (y por casos):

$\forall m, n \in \mathbf{Z}, \text{Impar}(nm) \implies \text{Impar}(n) \wedge \text{Impar}(m)$  (Si  $mn$  es impar,  $m$  y  $n$  son impares)

1.  $\neg(\text{Impar}(n) \wedge \text{Impar}(m)) \implies \text{Par}(n) \vee \text{Par}(m)$
2.  $\text{Par}(n) \vee \text{Par}(m) \implies \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \vee \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k$
3.  $\left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \implies mn = 2km = 2(km) \\ \exists k \in \mathbf{Z}, m = 2k \implies mn = 2kn = 2(kn) \end{array} \right\} \implies \text{Par}(mn)$

$\forall n \in \mathbf{N}, n > 2 \wedge \text{Primo}(n) \implies \text{Impar}(n)$  (Todo número primo mayor que 2 es impar)

1.  $\neg \text{Impar}(n) \implies \text{Par}(n)$
2.  $\text{Par}(n) \implies \exists k \in \mathbf{N}, n = 2k$
3.  $\exists k \in \mathbf{N}, n = 2k \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ n \neq 2 \wedge 2 | n \end{array} \right\}$
4.  $\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ n \neq 2 \wedge 2 | n \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \\ \neg \text{Primo}(n) \end{array} \right\} \implies n = 2 \vee \neg \text{Primo}(n)$
5.  $n = 2 \vee \neg \text{Primo}(n) \implies n \leq 2 \vee \neg \text{Primo}(n)$

$\text{Impar}(c) \implies \exists n \in \mathbf{Z}, n^2 + n - c = 0$  (La ecuación  $n^2 + n - c = 0$  no tiene solución entera para  $c$  impar)

1.  $\exists n \in \mathbf{Z}, n^2 + n - c = 0 \implies \text{Par}(n) \vee \text{Impar}(n)$
2.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par}(n) \\ \text{Impar}(n) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \\ \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k + 1 \end{array} \right\}$
3.  $\left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k \\ \exists k \in \mathbf{Z}, n = 2k + 1 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} c = n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) \\ c = n^2 + n = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1) \end{array} \right\} \implies \text{Par}(c)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Reducción al absurdo (y por casos):

$\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$

( $\sqrt{2}$  es irracional)

1.  $\sqrt{2} \in \mathbf{Q} \implies \exists p, q \in \mathbf{N}, \text{Coprimos}(p, q) \wedge \sqrt{2} = \frac{p}{q}$
2.  $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2 = \frac{p^2}{q^2}$
3.  $p^2 = 2q^2 \implies \text{Par}(p^2)$
4.  $\text{Par}(p^2) \implies \text{Par}(p) \quad (2|p)$
5.  $\text{Par}(p) \implies \exists k \in \mathbf{N}, p = 2k$
6.  $p^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2k^2$
7.  $q^2 = 2k^2 \implies \text{Par}(q^2)$
8.  $\text{Par}(q^2) \implies \text{Par}(q) \quad (2|q)$
9.  $2|p \wedge 2|q \wedge \text{Coprimos}(p, q)$  es UNA CONTRADICCIÓN

El conjunto de los números primos no es finito

1.  $\text{PRIMOS} = \{2, 3, 5, 7, \dots, P\}$
2.  $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots P + 1 \wedge M > P$
3.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Primo}(M) \\ \neg \text{Primo}(M) \end{array} \implies \begin{array}{l} \text{(CONTRADICCIÓN)} \\ M = Q \cdot R \wedge \text{Primo}(Q) \end{array} \right\} \implies \left\{ M = Q \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots Q \dots P + 1 \right\}$
4.  $\left\{ Q \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots Q \dots P + 1 \right\} \implies \left\{ Q \cdot (R - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots P) = 1 \right\} \implies \left\{ Q|1 \quad \text{(CONTRADICCIÓN)} \right\}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Por contraejemplo:

$\neg(f \text{ continua en } x = a \implies f \text{ derivable en } x = a)$

1. Considérese  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x|$  en  $x = 0$

Por inducción simple:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.  $F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$        $S(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

2. Queremos probar que  $\forall n \in \mathbf{N}, S(n) = F(n)$

3.  $n = 1 \implies S(1) = 1 \wedge F(1) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

4.  $F(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

5.  $S(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = S(k) + (k+1)$

6.  $S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = F(k+1)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers off to the right. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Por inducción completa:

$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \implies \text{Primo}(n) \vee \text{Producto\_de\_primos}(n)$

1. Para  $n = 1$  es cierta

2.  $n = 2 \implies \text{Primo}(2)$

3.  $n = k + 1 \implies \left\{ \begin{array}{c} \text{Primo}(k + 1) \\ k + 1 = pq \wedge p < k + 1 \wedge q < k + 1 \end{array} \right\}$

4.  $\implies \left\{ k + 1 = pq \wedge (\text{Primo}(p) \vee \text{Producto\_de\_primos}(p)) \wedge (\text{Primo}(q) \vee \text{Producto\_de\_primos}(q)) \right\}$

5.  $\implies \left\{ \text{Producto\_de\_primos}(k + 1) \right\}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background with a soft gradient. Below the text, there is a horizontal orange and yellow brushstroke effect that tapers off to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sección 2

# Álgebra de Boole

## Teoría de conjuntos

**Conjunto:** Colección de objetos determinados y distintos de nuestra percepción o nuestro pensamiento reunidos en un todo (†)

**Pertenencia:** Dado un objeto  $x$  siempre tendremos que poder decidir si  $x$  está o no en el conjunto  $C$   
Definimos así el predicado  $x \in C$  y su negación  $\neg x \in C \iff x \notin C$

### Determinación:

- Por **extensión:** enumerando todos sus elementos  $C = \{a, b, c\}$   
No es útil cuando el número de elementos es muy grande o no finito
- Por **intensión** o **comprensión:** mediante la extensión de un predicado  $C = \{x | P(x)\}$   
Dado cualquier predicado  $P(x)$  siempre tiene asociado un conjunto: el de elementos  $x$  que lo hacen verdadero

### Ejemplos:

- $C = \{2,4,6,8\} = \{x | x \in \mathbf{N} \wedge x < 10 \wedge \text{Par}(x)\}$
- $C' = \{x \in \mathbf{Z} | \text{Par}(x)\}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers off to the right. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Paradoja de B. Russell:

Sea  $X$  el conjunto de los conjuntos que no son elementos de sí mismos:  $X = \{x \mid x \notin x\}$  ¿Será  $X$  elemento de sí mismo?

- Si lo fuera,  $X \in X$ , pero entonces  $X \notin X$
- Si no lo fuera,  $X \notin X$ , pero entonces  $X \in X$

La “*paradoja del barbero*” es similar, en términos de la lógica: En una ciudad hay solamente un barbero, que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos. ¿Quién afeita al barbero?

Sea  $A(b,x)$  el predicado el barbero  $b$  afeita al ciudadano  $x$ . Luego  $\forall x, \neg A(x, x) \iff A(b, x)$

En el caso del barbero  $b$  tenemos que  $\neg A(b, b) \iff A(b, b)$

Estos problemas se resuelven con la teoría axiomática de conjuntos, que construye estos de manera precisa y rigurosa. No la abordaremos en esta asignatura.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Primeras definiciones:

**Inclusión<sup>†</sup> (subconjunto):**  $A \subset B \iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$

**Igualdad:**  $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$        $A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$

**Conjunto vacío:**  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$        $\forall x, x \notin \emptyset$       **(es único<sup>‡</sup>)**

**Conjunto potencia de X:**  $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$        $A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subset X$       (o conjunto de partes de X)

**Propiedades:**

- $\forall A, \emptyset \subset A$
- $\forall A, A \subset A$
- $\forall A, \forall B, \forall C, (A \subset B \wedge B \subset C) \implies A \subset C$
- $\forall X, \emptyset \in \mathcal{P}(X)$
- $\forall X, X \in \mathcal{P}(X)$

(<sup>†</sup>) Se dice que la inclusión es estricta cuando  $A \subset B \wedge A \neq B$ , es decir  $A \subset B \wedge \exists x \in B, x \notin A$   
y se dice que  $A$  es un subconjunto **propio** de  $B$ . A veces se emplean símbolos diferentes:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplo:

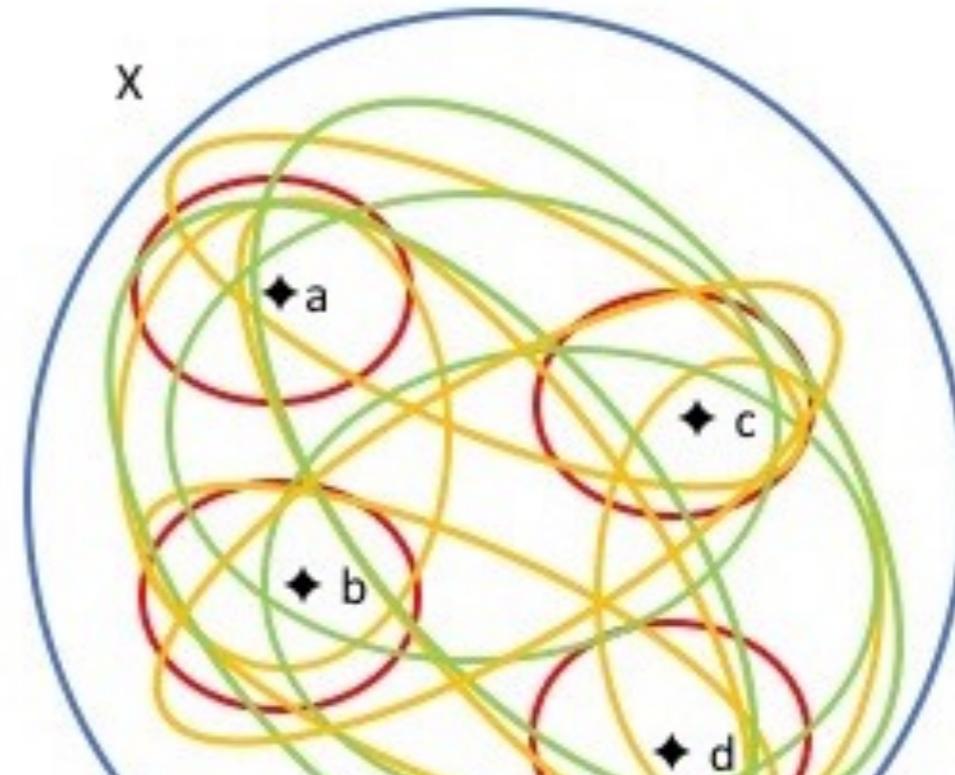
Sea  $X = \{a, b, c, d\}$

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

¿Cuántos elementos tiene?  $2^4 = 16$

Si  $X$  tiene  $n$  elementos,  $\mathcal{P}(X)$  tiene  $2^n$  elementos

Representación mediante diagrama de Venn:



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

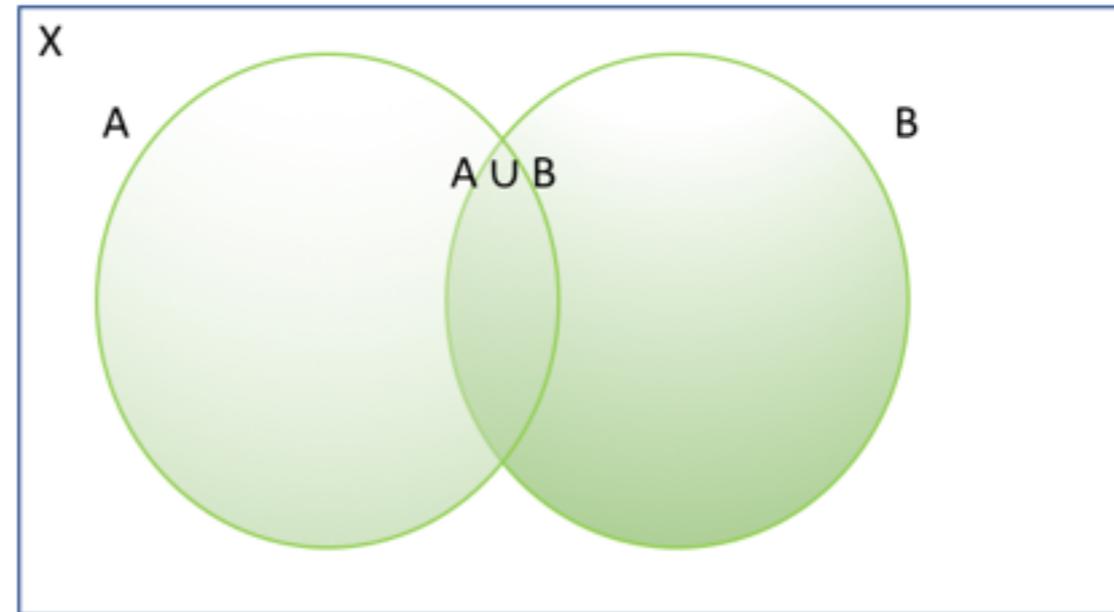
Operaciones en  $\mathcal{P}(X)$

Sean  $A, B \in \mathcal{P}(X)$

Unión:

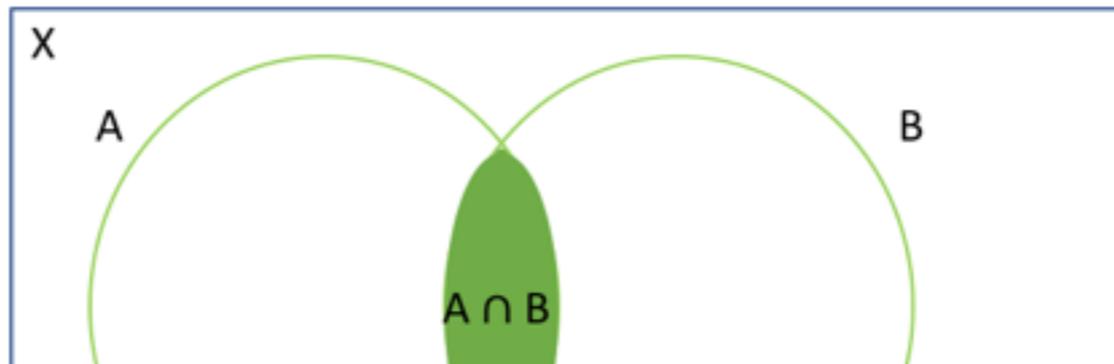
$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\bigcup_{V \in \mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)} V = \{x \mid x \in X \wedge \exists V \in \mathcal{I}, x \in V\}$$



Intersección:

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



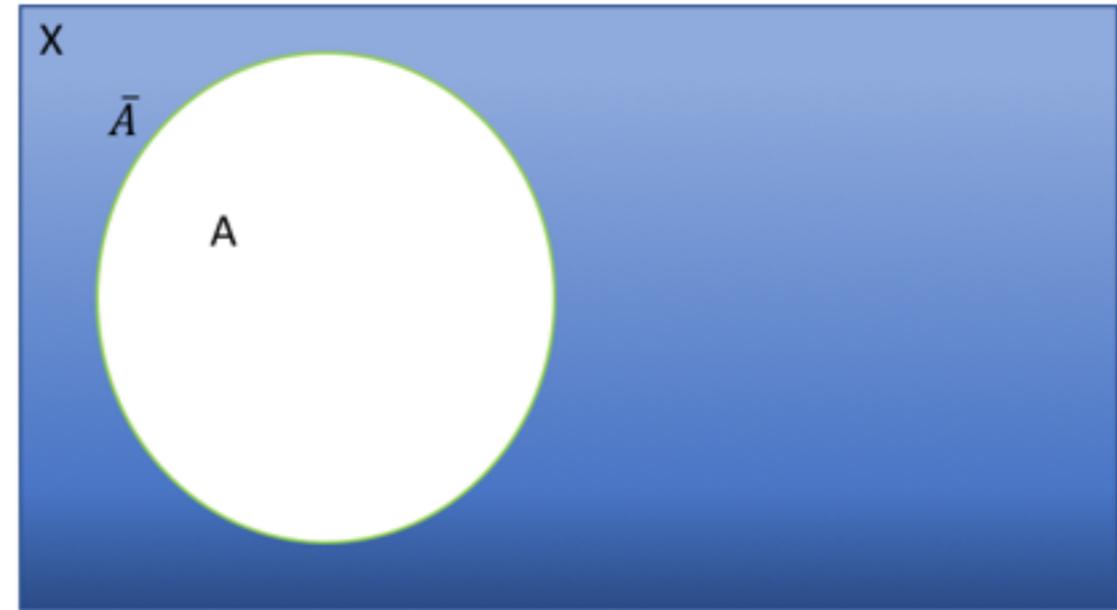
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Complementario  $\bar{A} = \{x \in X | x \notin A\} = X - A$



Diferencia:  $A - B = \{x \in X | x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \bar{B}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Propiedades:

- $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \subset A \cup B$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \subset B \iff A \cup B = B$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), \emptyset - A = \emptyset$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cup A = A$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \cup (A \cap B) = A$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \cup B = B \cup A$
  - $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cup \emptyset = A$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cup X = X$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cup \bar{A} = X$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \cap B \subset A$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \subset B \iff A \cap B = A$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A - \emptyset = A$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cap A = A$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \cap (A \cup B) = A$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \cap B = B \cap A$
  - $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  - $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cap X = A$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \cap \bar{A} = \emptyset$
  - $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (idempotencia)**  
**(absorción)**  
**(conmutatividad)**  
**(asociatividad)**  
**(distributividad)**  
**(elem. neutros)**  
**(elem. absorbentes)**  
**(el. complementarios)**  
**(De Morgan)**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Funciones entre conjuntos

## Producto cartesiano

Dados dos conjuntos  $A, B$  se define el **producto cartesiano** de  $A$  y  $B$ :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

y a sus elementos  $(x, y)$  se les denomina **pares ordenados**

Dados  $n$  conjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  se define:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in X_j, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

y a sus elementos se les denomina tuplas o **n-tuplas**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, brushstroke-like effect behind the letters. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

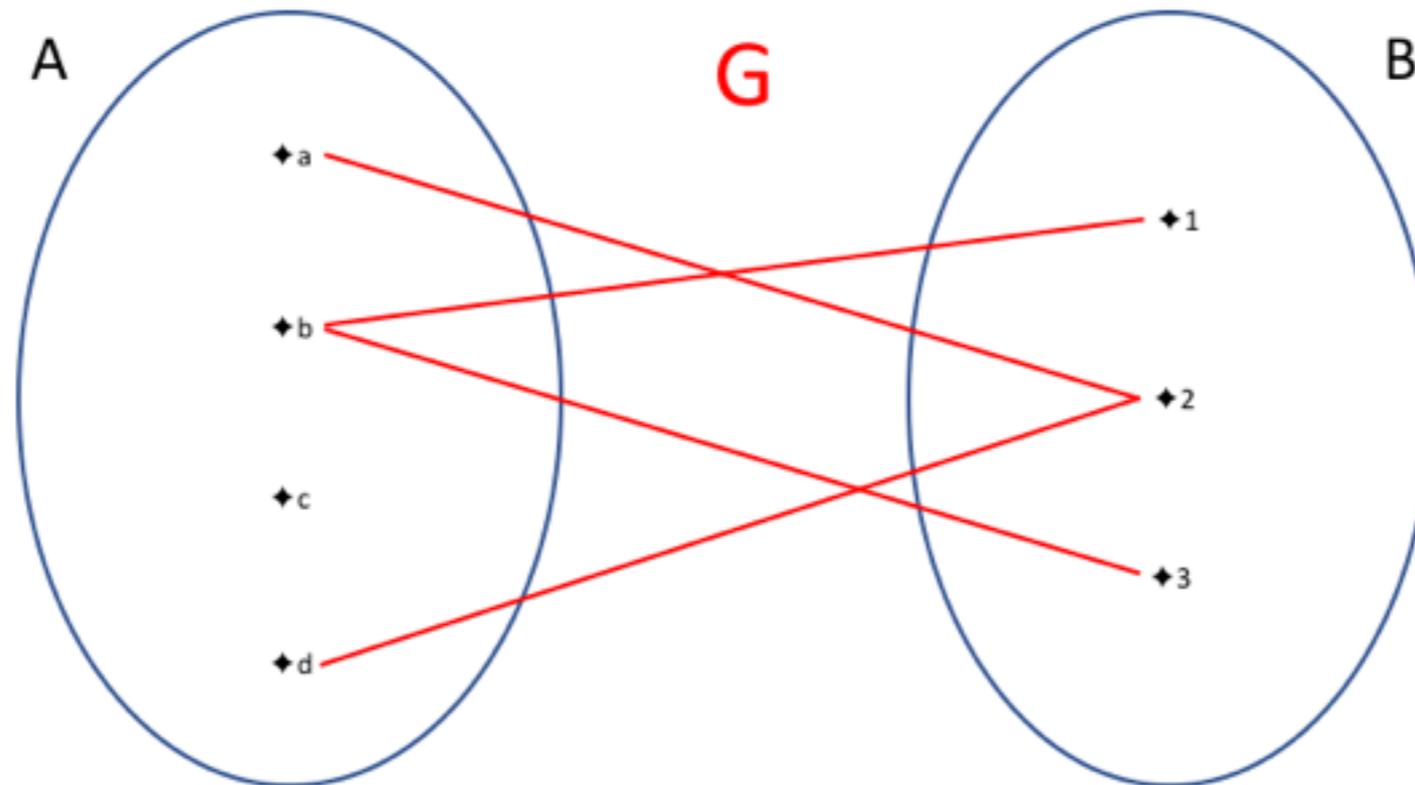
# Grafo

Dados dos conjuntos A, B se define **correspondencia** o **grafo**  $G$  a cualquier subconjunto  $G \subset A \times B$

Se dice que A es el **dominio** de  $G$  y que B es el **codominio** de  $G$

**Grafo inverso del grafo  $G$ :**

$$G^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in G\}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Composición de grafos**  $G \subset A \times B$  y  $H \subset B \times C$

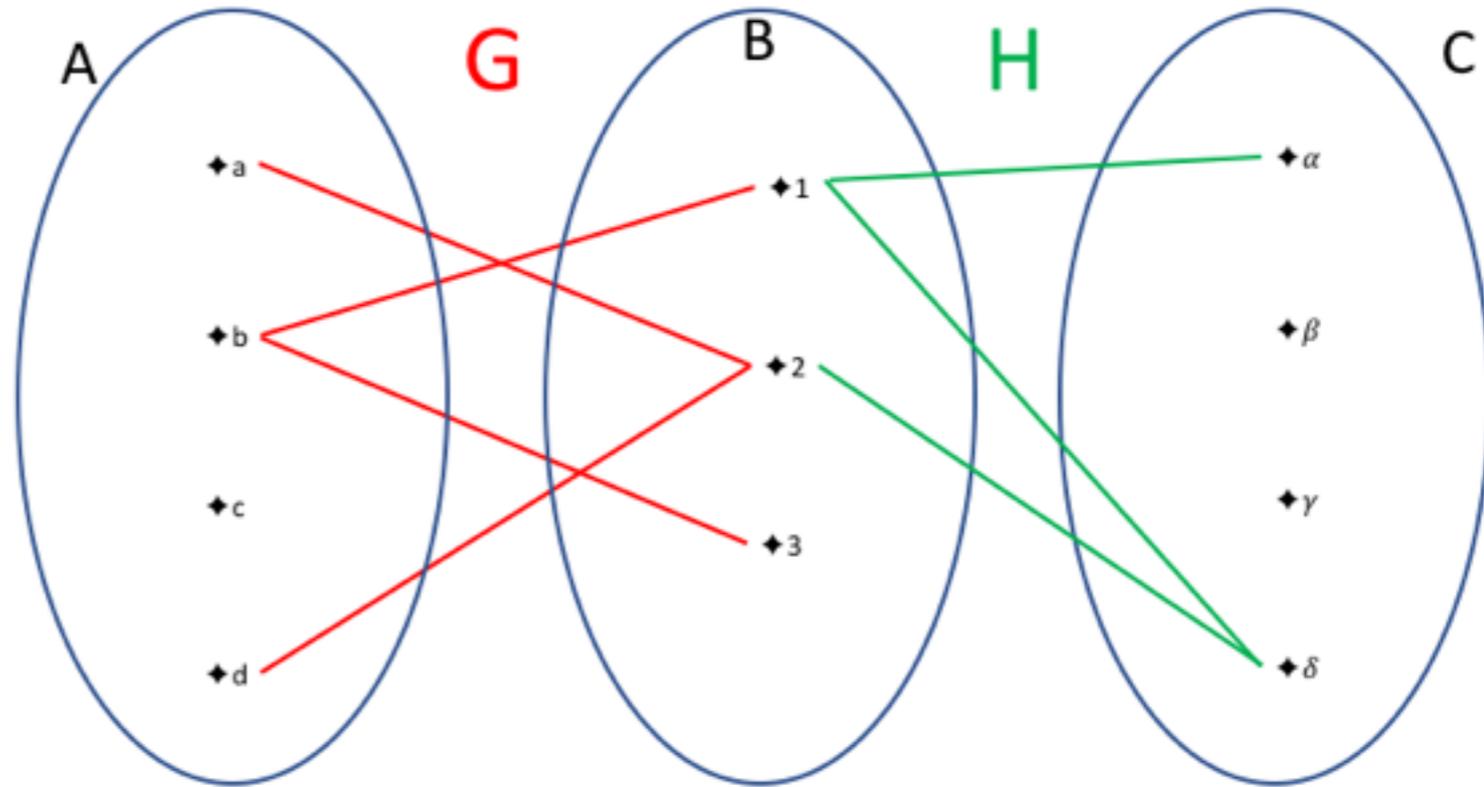
$$H \circ G = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B, (x, y) \in G \wedge (y, z) \in H\}$$

Propiedades:

I.  $K \circ (H \circ G) = (K \circ H) \circ G$

II.  $(H \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ H^{-1}$

III.  $(G^{-1})^{-1} = G$



$$G = \{(a,2), (b,1), (b,3), (d,2)\}$$

$$H = \{(1,\alpha), (1,\delta), (2,\delta)\}$$

$$H \circ G = \{(a, \delta), (b, \alpha), (b, \delta), (d, \delta)\}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

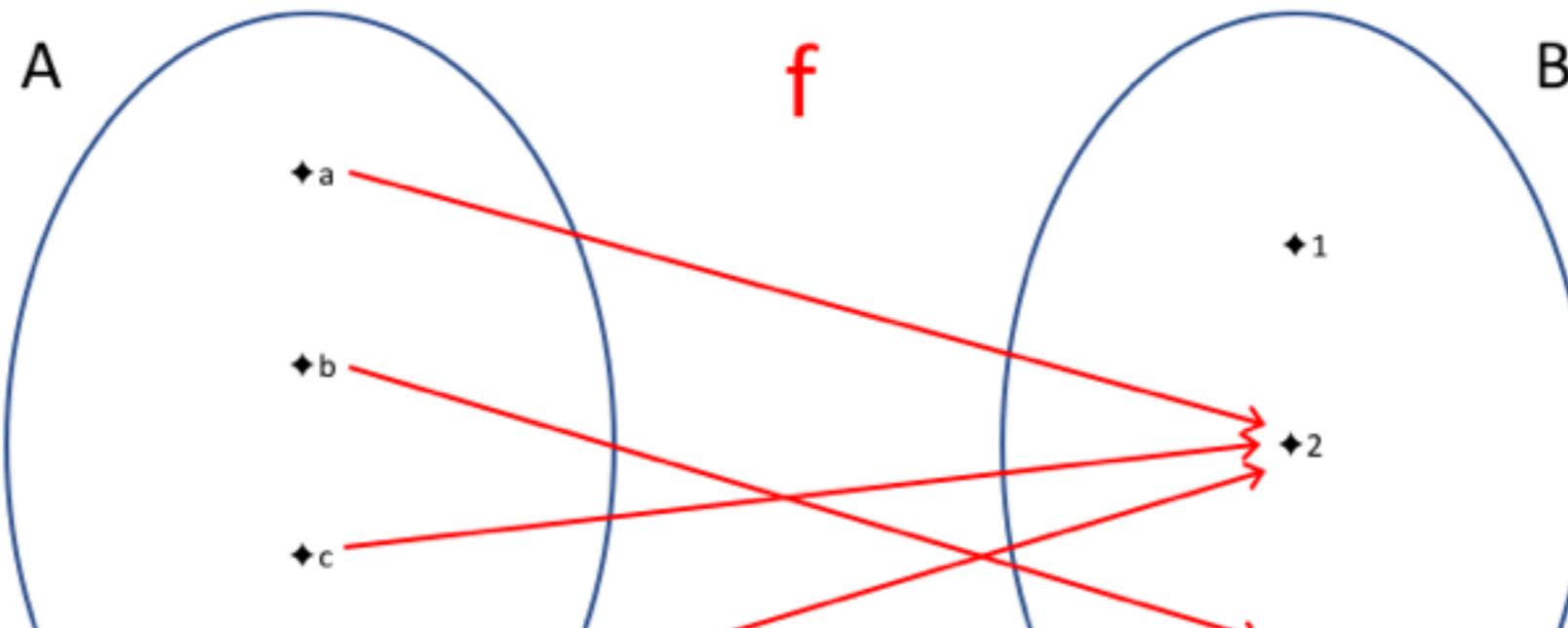
# Función

Dados dos conjuntos  $A$ ,  $B$  se define **función** o **aplicación** de  $A$  en  $B$  a un **grafo**  $f \subset A \times B$  que:

- I.  $\forall x \in A, \exists y \in B, (x, y) \in f$
- II.  $\forall x \in A, (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z$

Notaciones:

$$(f, A, B) \quad (x, y) \in f \iff y = f(x) \quad f : A \rightarrow B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Se dice que  $A$  es el **dominio** de  $f$  y que  $B$  es el **codominio** de  $f$

Se dice que  $y$  es la **imagen** de  $x$  por  $f$ , o que  $x$  es **preimagen** de  $y$  mediante  $f$

**Igualdad:**

$$(f, A, B) = (g, C, D) \iff A = C \wedge B = D \wedge \forall x \in A, f(x) = g(x)$$

**Función identidad:**

$$i_A : A \rightarrow A, \forall x \in A, i_A(x) = x$$

**Imagen de  $X \subset A$ :**

$$f(X) = \{y \in B \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$$

**Recorrido, rango o imagen de  $f$ :**

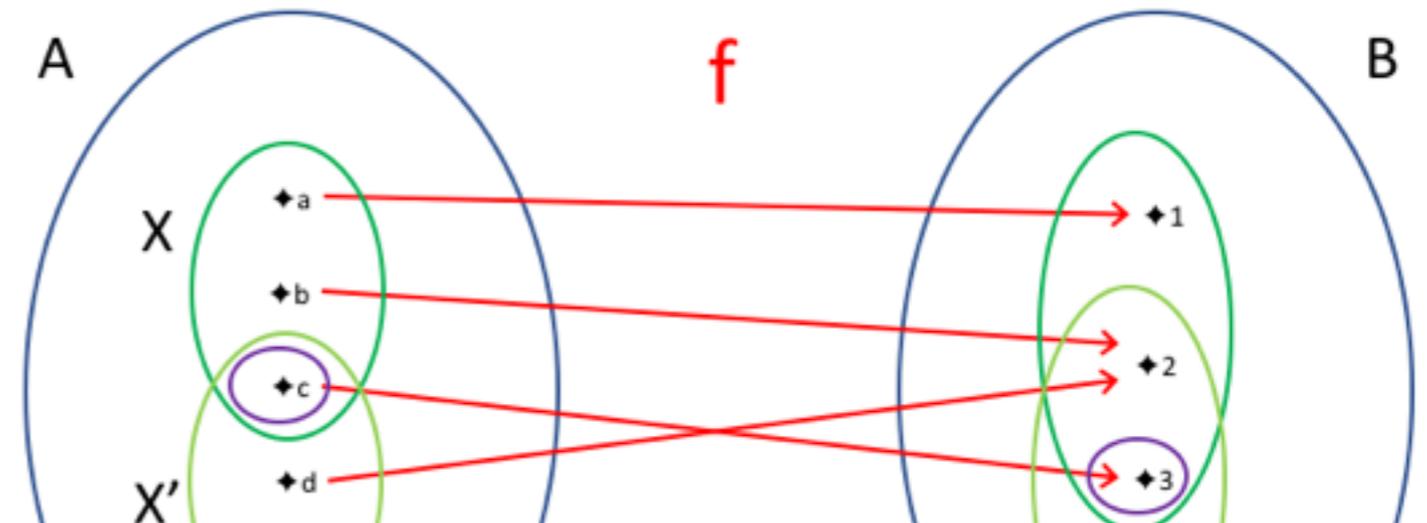
$$\text{Im}(f) = f(A)$$

**Imagen inversa o preimagen de  $Y \subset B$ :**

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

Propiedades:

- I.  $f(\emptyset) = \emptyset$
- II.  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- III.  $\forall X, X' \in \mathcal{P}(A), X \subset X' \implies f(X) \subset f(X')$
- IV.  $\forall X, X' \in \mathcal{P}(A), f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$
- V.  $\forall X, X' \in \mathcal{P}(A), f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Inyectividad:**

$f : A \rightarrow B$  es inyectiva  $\iff \forall x, x' \in A, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

(equiv.)

$\iff \forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \implies x = x'$

**Sobreyectividad:**

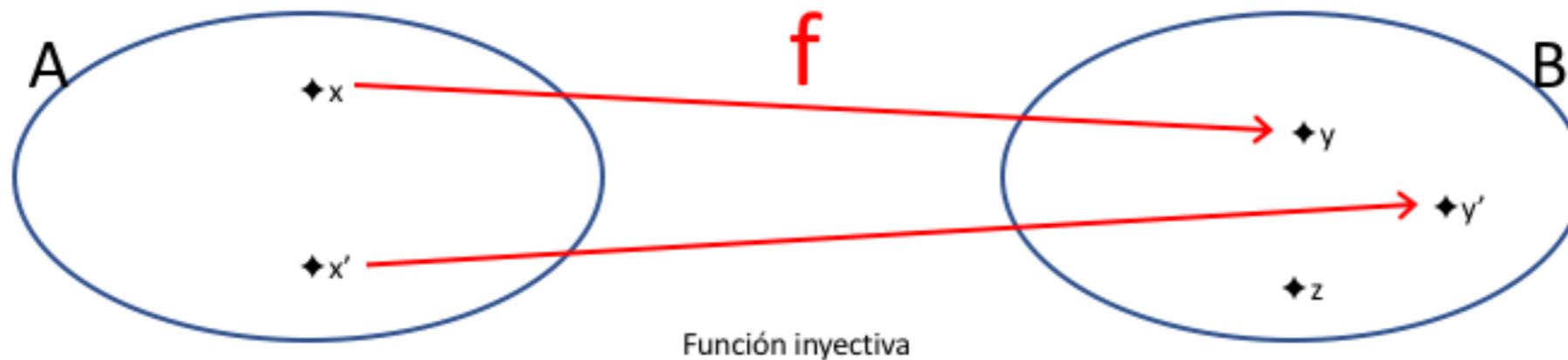
$f : A \rightarrow B$  es sobreyectiva o suprayectiva o sobre  $\iff \forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

(equiv.)

$\iff B = f(A)$

**Biyectividad:**

$f : A \rightarrow B$  es biyectiva o biunívoca  $\iff f$  es inyectiva y sobreyectiva



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

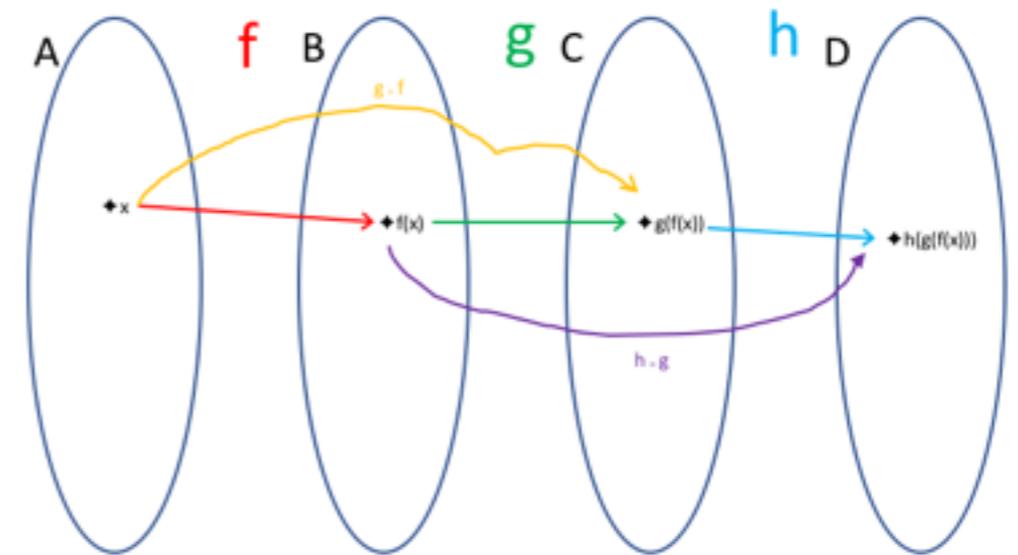
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Composición de funciones:** Siendo  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  se denomina aplicación compuesta de  $f$  y  $g$  a la aplicación

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad \forall x \in A, (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Propiedades:

I. Asociatividad:  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D \implies (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$



II. En general no es conmutativa

Contraejemplo:  $\left. \begin{array}{l} f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x \\ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} (g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2 \\ (f \circ g)(x) = 2(x^2) = 2x^2 \end{cases}$

III.  $f, g$  inyectivas  $\implies g \circ f$  inyectiva

IV.  $f, g$  sobreyectivas  $\implies g \circ f$  sobreyectiva

V.  $f, g$  biyectivas  $\implies g \circ f$  biyectiva

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

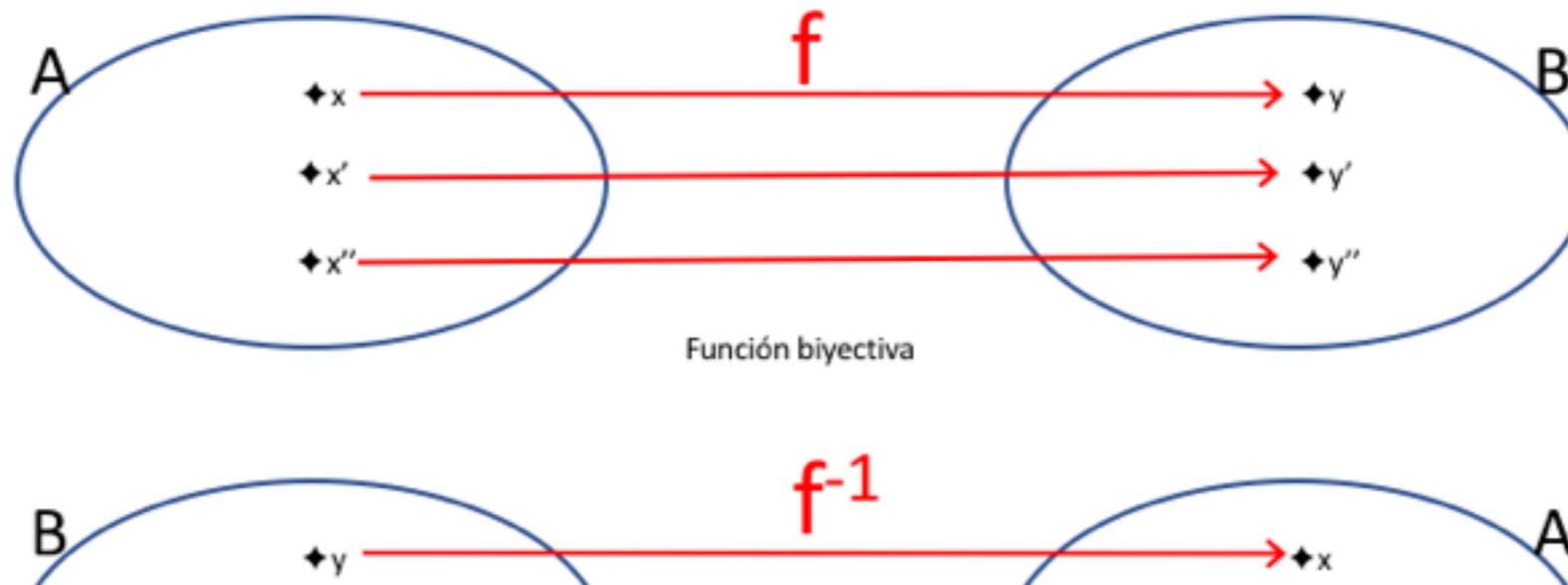
Función inversa: Toda aplicación, por ser grafo, tiene grafo inverso. Este, sin embargo, no siempre es función.

$$f : A \rightarrow B \text{ admite (función) inversa} \iff \exists g : B \rightarrow A, g \circ f = i_A \wedge f \circ g = i_B \text{ y se denota } g = f^{-1}$$

(Recuérdese que la función identidad es  $i_A : A \rightarrow A, \forall x \in A, i_A(x) = x$  y nótese que es una función biyectiva)

Propiedades:

- I.  $f$  admite inversa  $\implies f^{-1}$  es única
- II.  $f$  admite inversa  $f^{-1} \iff f$  es biyectiva
- III.  $f, g$  admiten inversa  $\implies g \circ f$  admite inversa y  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 4

# Grupos, anillos y cuerpos

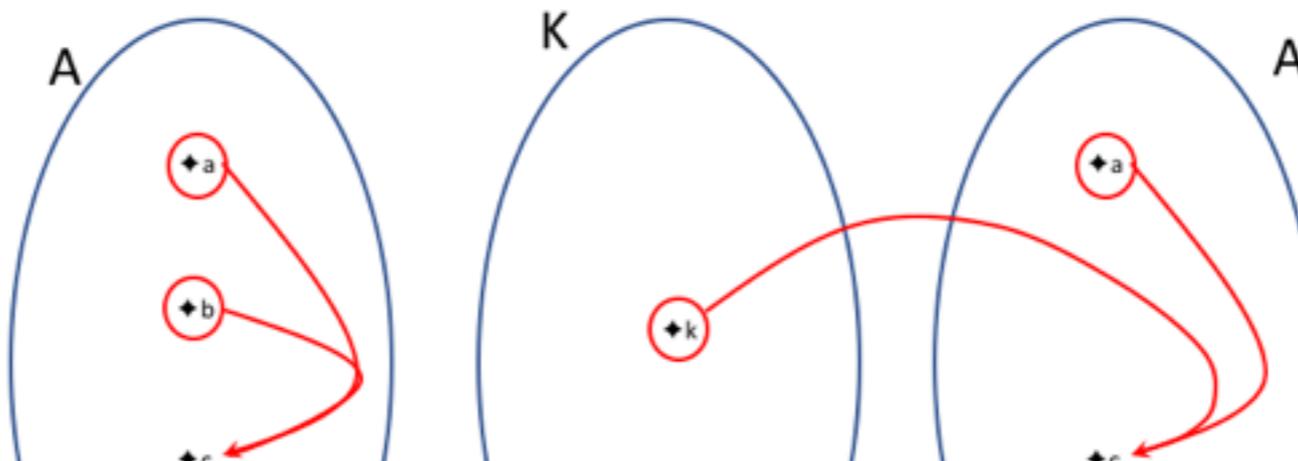
## Operaciones

Dado un conjunto  $A \neq \emptyset$  definimos una operación o **ley de composición interna**:

$$\star : A \times A \rightarrow A \quad \forall a, b \in A, c = \star(a, b) = a \star b \quad (c \in A)$$

Dados un conjunto  $A \neq \emptyset$  y otro  $K \neq \emptyset$  definimos una operación o **ley de composición externa**:

$$\diamond : K \times A \rightarrow A \quad \forall a \in A, \forall k \in K, c = \diamond(k, a) = k \diamond a \quad (c \in A)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Posibles propiedades de una ley de composición interna $\star : A \times A \rightarrow A$

<b>Asociatividad:</b>	$\star$ es asociativa	$\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$
<b>Commutatividad:</b>	$\star$ es conmutativa	$\Leftrightarrow \forall a, b \in A, a \star b = b \star a$
<b>Elemento neutro:</b>	$\star$ tiene elemento neutro	$\Leftrightarrow \exists n \in A, \forall a \in A, a \star n = n \star a = a$
<b>Elemento simétrico:</b>	$a \in A$ tiene elemento simétrico	$\Leftrightarrow \exists a' \in A, a \star a' = a' \star a = n$ (exige elemento neutro)
<b>Elemento idempotente:</b>	$a \in A$ es idempotente	$\Leftrightarrow a \star a = a$
<b>Elemento absorbente:</b>	$a \in A$ es absorbente	$\Leftrightarrow \forall b \in A, a \star b = b \star a = a$
<b>Elemento regular:</b>	$a \in A$ es regular o simplificable	$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall b, c \in A, a \star b = a \star c \implies b = c \\ \forall b, c \in A, b \star a = c \star a \implies b = c \end{cases}$
<b>Idempotencia:</b>	$\star$ es idempotente	$\Leftrightarrow \forall a \in A, a \star a = a$
<b>Ley de simplificación o cancelativa:</b>	$A$ es regular para $\star$	$\Leftrightarrow \forall a \in A, a$ es regular



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Con dos leyes de composición interna $\star : A \times A \rightarrow A$ y $\diamond : A \times A \rightarrow A$

Si ambas operaciones tienen elemento neutro se les suele denominar **elemento cero** (0) y **elemento unidad** (1), respectivamente. En algunos casos se emplearán los símbolos  $\perp$  y  $\top$  u otros

<b>Distributividad:</b>	$\star$ es distributiva respecto de $\diamond$	$\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c) \\ (b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a) \end{cases}$
<b>Elemento invertible<sup>†</sup>:</b>	$a \in A$ es invertible	$\Leftrightarrow \exists a^{-1} \in A, a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = 1$
<b>Divisor de 0:</b>	$a \in A, a \neq 0$ es divisor de 0	$\Leftrightarrow \exists b \in A - \{0\}, a \diamond b = 0 \vee b \diamond a = 0$
	$(A, \star, \diamond)$ no tiene divisores de 0	$\Leftrightarrow a \diamond b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$
<b>Complementario<sup>‡</sup>:</b>	$a \in A$ admite complementario	$\Leftrightarrow \exists \bar{a} \in A, \begin{cases} a \star \bar{a} = \top \\ a \diamond \bar{a} = \perp \end{cases}$

<sup>†</sup>Es el elemento simétrico respecto a la segunda operación cuando esta se denomina *producto*. Cuando existe se le denomina



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplo: $Z_n$

Sea  $Z_n = \{0,1,2,\dots,n-1\}$ , definimos:

$$\oplus : Z_n \times Z_n \rightarrow Z_n \quad \forall x,y \in Z_n, \quad x \oplus y = x + y \pmod n$$

$$\odot : Z_n \times Z_n \rightarrow Z_n \quad \forall x,y \in Z_n, \quad x \odot y = x \cdot y \pmod n$$

$$Z_2 = \{0,1\} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0 \\ 0 \odot 0 = 0, \quad 0 \odot 1 = 0, \quad 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1 \end{array} \right\}$$

Las operaciones las podemos representar mediante **tablas de Cayley**

+	0	1	$Z_2$
0	0	1	
1	1	0	

.	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	$Z_3$
0	0	1	2	
1	1	2	0	
2	2	0	1	

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2	3	$Z_4$
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	0	

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3

+	0	1	2	3	4	$Z_5$
0	0	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	0	

.	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

# Principales estructuras algebraicas para $(A, \star)$

$$\star : A \times A \rightarrow A$$

	Operación interna	Asociativa	Elemento neutro	Elemento inverso	Conmutativa
<b>Magma</b>	Si				
<b>Semigrupo</b>	Si	Si			
<b>Semigrupo conmutativo</b>	Si	Si			Si
<b>Monoide (semigrupo con elemento neutro)</b>	Si	Si	Si		
<b>Monoide conmutativo</b>	Si	Si	Si		Si
<b>Grupo</b>	Si	Si	Si	Si	



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Principales estructuras algebraicas para $(A, \star, \diamond)$

$$\star : A \times A \rightarrow A \quad \diamond : A \times A \rightarrow A$$

	$(A, \star)$	$(A, \diamond)$	$\diamond$ distributiva resp. $\star$	$\diamond$ sin divisores de 0
<b>Anillo</b>	Grupo conmutativo	Semigrupo	Si	
<b>Anillo conmutativo</b>	Grupo conmutativo	Semigrupo conmutativo	Si	
<b>Anillo unitario</b>	Grupo conmutativo	Monoide	Si	
<b>Anillo conmutativo unitario</b>	Grupo conmutativo	Monoide conmutativo	Si	
<b>Anillo íntegro</b>	Grupo conmutativo	Semigrupo	Si	Si
<b>Dominio de integridad</b>	Grupo conmutativo	Monoide conmutativo	Si	Si
<b>Cuerpo</b>	Grupo conmutativo	Grupo (*)	Si	(propiedad)
<b>Campo o cuerpo conmutativo</b>	Grupo conmutativo	Grupo conmutativo (*)	Si	(propiedad)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Principales estructuras algebraicas para $(A, \star, \diamond)$

$$\star : A \times A \rightarrow A \quad \diamond : A \times A \rightarrow A$$

## Álgebra de Boole $(A, \star, \diamond)$ :

- I.  $\star, \diamond$  conmutativas:  $\begin{cases} \forall a, b \in A, a \star b = b \star a \\ \forall a, b \in A, a \diamond b = b \diamond a \end{cases}$
- II.  $\star, \diamond$  tienen elementos neutros  $\perp, \top$ :  $\begin{cases} \exists \perp \in A, \forall a \in A, a \star \perp = \perp \star a = a \\ \exists \top \in A, \forall a \in A, a \diamond \top = \top \diamond a = a \end{cases}$
- III. Todo elemento admite elemento complementario:  $\forall a \in A, \exists \bar{a} \in A, \begin{cases} a \star \bar{a} = \bar{a} \star a = \top \\ a \diamond \bar{a} = \bar{a} \diamond a = \perp \end{cases}$
- IV.  $\diamond$  es distributiva respecto de  $\star$ :  $\forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c) \\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a) \end{cases}$
- V.  $\star$  es distributiva respecto de  $\diamond$ :  $\forall a, b, c \in A, \begin{cases} a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c) \\ (b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a) \end{cases}$

## Ejemplos

- $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$  (elementos neutros,  $\emptyset$  y  $X$ )
- $(\{V, F\}, \vee, \wedge)$  (elementos neutros,  $F$  y  $V$ )
- $(\{0, 1\}, \oplus, \odot)$  (elementos neutros, 0 y 1)



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Propiedades

- Si  $(A, \star)$  tiene elemento neutro  $n \in A$ , es único:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ elemento neutro} \\ n' \text{ elemento neutro} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} n \star n' = n' \star n = n' \\ n' \star n = n \star n' = n \end{array} \right\} \implies n = n'$$

- Si  $(A, \star)$  es monoide, el elemento simétrico, si existe, es único:

$$\left. \begin{array}{l} a' \text{ simétrico de } a \\ a'' \text{ simétrico de } a \end{array} \right\} \implies a'' = a'' \star n = a'' \star (a \star a') = (a'' \star a) \star a' = n \star a' = a'$$

- $a'$  simétrico de  $a \implies a$  simétrico de  $a'$  (es decir  $(a')' = a$ )

## Propiedades de los grupos

- Todos los elementos son regulares (ley de simplificación o ley cancelativa):

$$\left\{ \begin{array}{l} a, x, y \in A, a \star x = a \star y \implies a' \star (a \star x) = a' \star (a \star y) \implies (a' \star a) \star x = (a' \star a) \star y \implies n \star x = n \star y \implies x = y \\ a, x, y \in A, x \star a = y \star a \implies (x \star a) \star a' = (y \star a) \star a' \implies x \star (a \star a') = y \star (a \star a') \implies x \star n = y \star n \implies x = y \end{array} \right.$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- $a \in A, a \star a = a \iff a = n$  (el único elemento idempotente es el neutro)

$$a \star a = a \implies a' \star (a \star a) = a' \star a \implies n \star a = n \implies a = n$$

$$a = n \implies a \star a = a \star n \implies a \star a = a$$

## Propiedades de los anillos<sup>†</sup>

<sup>†</sup>En adelante se empleará el anillo  $(A, \oplus, \odot)$ , denotándose los elementos neutros como 0 y 1, y a los simétricos de  $a \in A$  como  $(-a)$  y  $a^{-1}$  respectivamente de las operaciones  $\oplus, \odot$

- $\forall a \in A, a \odot 0 = 0 \odot a = 0$  (El elemento neutro de  $\oplus$  es absorbente para  $\odot$ )

$$a \odot 0 = a \odot (0 \oplus 0) = (a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \implies 0 = -(a \odot 0) \oplus (a \odot 0) = -(a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \oplus (a \odot 0) \implies 0 = (a \odot 0)$$

$$0 \odot a = (0 \oplus 0) \odot a = (0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \implies 0 = -(0 \odot a) \oplus (0 \odot a) = -(0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \oplus (0 \odot a) \implies 0 = (0 \odot a)$$

- $\forall a, b \in A, (-a) \odot b = a \odot (-b) = -(a \odot b)$

$$(a \odot b) \oplus ((-a) \odot b) = (a \oplus (-a)) \odot b = 0 \odot b = 0 \implies -(a \odot b) = (-a) \odot b$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot (-b)) = a \odot (b \oplus (-b)) = a \odot 0 = 0 \implies -(a \odot b) = a \odot (-b)$$

- $\forall a, b \in A, (-a) \odot (-b) = a \odot b$

$$((-a) \odot (-b)) = -(a \odot (-b)) = -(- (a \odot b)) = a \odot b$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- $\forall a \in A, a \neq 0, a$  divisor de cero  $\Leftrightarrow a$  no simplificable

$$a \in A, a \neq 0, \text{ simplificable y } b \in A, \begin{cases} 0 = a \odot b = a \odot 0 \Rightarrow b = 0 \\ 0 = b \odot a = 0 \odot a \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists b \in A, b \neq 0, a \odot b = 0 \vee b \odot a = 0$$

$\Rightarrow a$  no es divisor de cero

$a \in A, a \neq 0, \text{ no divisor de cero, } b, c \in A,$

$$\begin{cases} (a \odot b) = (a \odot c) \Rightarrow (a \odot b) \oplus (-(a \odot c)) = 0 \Rightarrow (a \odot b) \oplus (a \odot (-c)) = 0 \Rightarrow a \odot (b \oplus (-c)) = 0 \\ (b \odot a) = (c \odot a) \Rightarrow (b \odot a) \oplus (-(c \odot a)) = 0 \Rightarrow (b \odot a) \oplus ((-c) \odot a) = 0 \Rightarrow (b \oplus (-c)) \odot a = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = c \Rightarrow a$  es simplificable

## Propiedades de los anillos unitarios

- $\forall a \in A, (-a) = (-1) \odot a$

$$(-1) \odot a = 1 \odot (-a) = -(1 \odot a) = -a$$

- $a, b \in A$  invertibles  $\Rightarrow a \odot b$  invertible y  $(a \odot b)^{-1} = b^{-1} \odot a^{-1}$

$$(a \odot b) \odot (b^{-1} \odot a^{-1}) = (a \odot (b \odot b^{-1})) \odot a^{-1} = (a \odot 1) \odot a^{-1} = a \odot a^{-1} = 1 \Rightarrow (a \odot b)^{-1} = (b^{-1} \odot a^{-1})$$

- $a \in A$  invertible  $\rightarrow -a$  invertible y  $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- $a \in A$  invertible  $\implies a$  no es divisor de cero  $(a \in A$  es divisor de cero  $\implies a$  no es invertible)

$$a \neq 0, \text{ invertible} \implies \left\{ \begin{array}{l} a \odot b = 0 \implies a^{-1} \odot (a \odot b) = a^{-1} \odot 0 \implies 1 \odot b = 0 \\ b \odot a = 0 \implies (b \odot a) \odot a^{-1} = 0 \odot a^{-1} \implies b \odot 1 = 0 \end{array} \right\} \implies b = 0$$

- $0 \in A$  no es invertible

$$\forall a \in A, 0 \odot a = 0 \wedge a \odot 0 = 0 \implies \nexists 0^{-1} \in A, 0 \odot 0^{-1} = 0^{-1} \odot 0 = 1$$

## Propiedades de los cuerpos

- No tiene divisores de cero

$$\forall a, a \neq 0 \implies \exists a^{-1} \in A \implies a \text{ no es divisor de cero}$$

- $a \neq 0, \forall b, c \in A, (a \odot x) \oplus b = c$  y  $(x \odot a) \oplus b = c$  tienen solución única en  $x$

$$((a \odot x) \oplus b) \oplus (-b) = c \oplus (-b) \implies a \odot x = c \oplus (-b) \implies a^{-1} \odot (a \odot x) = a^{-1} \odot (c \oplus (-b)) \implies x = a^{-1} \odot (c \oplus (-b))$$

$$((x \odot a) \oplus b) \oplus (-b) = c \oplus (-b) \implies x \odot a = c \oplus (-b) \implies (x \odot a) \oplus a^{-1} = (c \oplus (-b)) \odot a^{-1} \implies x = (c \oplus (-b)) \odot a^{-1}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Propiedades de las álgebras de Boole

•  $\forall a \in A, a \star a = a \wedge a \diamond a = a$

(idempotencia)

$$a \star a = (a \star a) \diamond \top = (a \star a) \diamond (a \star \bar{a}) = a \star (a \diamond \bar{a}) = a \star \perp = a$$

$$a \diamond a = (a \diamond a) \star \perp = (a \diamond a) \star (a \diamond \bar{a}) = a \diamond (a \star \bar{a}) = a \diamond \top = a$$

•  $\forall a \in A, a \star \top = \top \wedge a \diamond \perp = \perp$

(neutros cruzados absorbentes)

$$a \star \top = (a \star \top) \diamond \top = (a \star \top) \diamond (a \star \bar{a}) = a \star (\top \diamond \bar{a}) = a \star \bar{a} = \top$$

$$a \diamond \perp = (a \diamond \perp) \star \perp = (a \diamond \perp) \star (a \diamond \bar{a}) = a \diamond (\perp \star \bar{a}) = a \diamond \bar{a} = \perp$$

•  $\forall a, b \in A, a \diamond (a \star b) = a \wedge a \star (a \diamond b) = a$

(absorción)

$$a \diamond (a \star b) = (a \star \perp) \diamond (a \star b) = a \star (\perp \diamond b) = a \star \perp = a$$

$$a \star (a \diamond b) = (a \diamond \top) \star (a \diamond b) = a \diamond (\top \star b) = a \diamond \top = a$$

•  $\forall a, b, c \in A, a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \wedge a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$

(asociativa)

$$\left. \begin{aligned} p &= a \star (b \star c) \implies a \diamond p = a \diamond (a \star (b \star c)) = a \\ q &= (a \star b) \star c \implies a \diamond q = a \diamond ((a \star b) \star c) = (a \diamond (a \star b)) \star (a \diamond c) = a \star (a \diamond c) = a \end{aligned} \right\} \implies a \diamond p = a \diamond q$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} \diamond p &= \bar{a} \diamond (a \star (b \star c)) = (a \diamond \bar{a}) \star (\bar{a} \diamond (b \star c)) = \perp \star (\bar{a} \diamond (b \star c)) = \bar{a} \diamond (b \star c) \\ \bar{a} \diamond q &= \bar{a} \diamond ((a \star b) \star c) = (\bar{a} \diamond (a \star b)) \star (\bar{a} \diamond c) = ((\bar{a} \diamond a) \star (\bar{a} \diamond b)) \star (\bar{a} \diamond c) = \\ &= (\perp \star (\bar{a} \diamond b)) \star (\bar{a} \diamond c) = \bar{a} \diamond (b \star c) \end{aligned} \right\} \implies \bar{a} \diamond p = \bar{a} \diamond q$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

•  $\forall a \in A, \exists! \bar{a} \in A, a \star \bar{a} = \top \wedge a \diamond \bar{a} = \perp$

(el complementario es único)

$$\begin{aligned} \bar{a}, \bar{a}' \in A, a \star \bar{a} = \top \wedge a \diamond \bar{a} = \perp \wedge a \star \bar{a}' = \top \wedge a \diamond \bar{a}' = \perp &\implies \\ \bar{a} = \bar{a} \diamond \top = \bar{a} \diamond (a \star \bar{a}') = (\bar{a} \diamond a) \star (\bar{a} \diamond \bar{a}') = \perp \star (\bar{a} \diamond \bar{a}') = (\bar{a} \diamond \bar{a}') = & \\ = (\bar{a} \diamond \bar{a}') \star \perp = (\bar{a} \diamond \bar{a}') \star (a \diamond \bar{a}') = (\bar{a} \star a) \diamond \bar{a}' = \top \diamond \bar{a}' = \bar{a}' & \end{aligned}$$

•  $\forall a \in A, \overline{(\bar{a})} = a$

(doble complementación)

$$\forall a \in A, \exists \bar{a}, a \star \bar{a} = \top \wedge a \diamond \bar{a} = \perp \implies \bar{a} \star a = \top \wedge \bar{a} \diamond a = \perp \implies \overline{(\bar{a})} = a$$

•  $\bar{\top} = \perp \wedge \bar{\perp} = \top$

(complementación de neutros)

$$\left. \begin{aligned} \top \star \perp = \top \wedge \top \diamond \perp = \perp \\ \perp \star \perp = \perp \wedge \perp \diamond \top = \top \end{aligned} \right\} \implies \left\{ \begin{aligned} \perp \star \top = \top \\ \perp \diamond \top = \perp \end{aligned} \right\} \implies \bar{\top} = \perp$$

$$\left. \begin{aligned} \top \star \perp = \top \\ \top \diamond \perp = \perp \end{aligned} \right\} \implies \bar{\perp} = \top$$

•  $\forall a, b \in A, \overline{(a \star b)} = \bar{a} \diamond \bar{b} \wedge \overline{(a \diamond b)} = \bar{a} \star \bar{b}$

(leyes de De Morgan)

$$\begin{aligned} (a \star b) \star (\bar{a} \diamond \bar{b}) &= ((a \star b) \star \bar{a}) \diamond ((a \star b) \star \bar{b}) = (b \star (a \star \bar{a})) \diamond (a \star (b \star \bar{b})) = (b \star \top) \diamond (a \star \top) = \top \diamond \top = \top \\ (a \star b) \diamond (\bar{a} \diamond \bar{b}) &= (a \diamond (\bar{a} \diamond \bar{b})) \star (b \diamond (\bar{a} \diamond \bar{b})) = ((a \diamond \bar{a}) \diamond \bar{b}) \star ((b \diamond \bar{b}) \diamond \bar{a}) = (\perp \diamond \bar{b}) \star (\perp \diamond \bar{a}) = \perp \star \perp = \perp \end{aligned}$$

$$\implies \overline{(a \star b)} = \bar{a} \diamond \bar{b}$$

$$(a \diamond b) \star (\bar{a} \star \bar{b}) = (a \star (\bar{a} \star \bar{b})) \diamond (b \star (\bar{a} \star \bar{b})) = ((a \star \bar{a}) \star \bar{b}) \diamond ((b \star \bar{b}) \star \bar{a}) = (\top \star \bar{b}) \diamond (\top \star \bar{a}) = \top \diamond \top = \top$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Subestructuras algebraicas

Sea  $(A, \star)$  grupo y  $S \subset A$ . Si  $(S, \star)$  es grupo decimos que  $(S, \star)$  es subgrupo de  $(A, \star)$

Sea  $(A, \star, \diamond)$  anillo y  $S \subset A$ . Si  $(S, \star, \diamond)$  es anillo decimos que  $(S, \star, \diamond)$  es subanillo de  $(A, \star, \diamond)$

Sea  $(A, \star, \diamond)$  cuerpo y  $S \subset A$ . Si  $(S, \star, \diamond)$  es cuerpo decimos que  $(S, \star, \diamond)$  es subcuerpo de  $(A, \star, \diamond)$

## Ejemplos

$(\mathbf{Z}, +), (\mathbf{Q}, +), (\mathbf{R}, +), (\mathbf{C}, +)$

$(\mathbf{Z}_n, +)$

$(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$

$(M_{m \times n}(\mathbf{R}), +)$

$(\mathbf{N}, +)$

$(\mathbf{Z}, \cdot), (\mathbf{Q}, \cdot), (\mathbf{R}, \cdot), (\mathbf{C}, \cdot)$

$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$

$(\mathbf{Q}, +, \cdot), (\mathbf{R}, +, \cdot), (\mathbf{C}, +, \cdot)$

$(M_{n \times n}(\mathbf{R}), +, \cdot)$

$(F(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$

$(\mathbf{Q}[X], +, \cdot), (\mathbf{R}[X], +, \cdot), (\mathbf{C}[X], +, \cdot)$

$(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$

$(\mathbf{Z}, +), (\mathbf{Q}, +), (\mathbf{R}, +), (\mathbf{C}, +)$

$(\mathbf{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbf{C} - \{0\}, \cdot)$

son grupos abelianos

es grupo abeliano

son grupos abelianos

es grupo abeliano

es semigrupo conmutativo

son monoides conmutativos

es anillo conmutativo unitario (dominio de integridad)

son cuerpos conmutativos

es anillo unitario (no conmutativo, tiene divisores de cero)

es anillo conmutativo unitario (tiene divisores de cero)

son anillos conmutativos unitarios (dominios de integridad)

es anillo conmutativo unitario (tiene divisores de 0) si  $n$  no es primo

y cuerpo conmutativo si  $n$  es primo

son subgrupos (cada uno de los que le siguen)

son subcuerpos (cada uno de los que le siguen)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

# Álgebra matricial y sist. de ecs. lineales

 **Método de eliminación de Gauss**

 **Rango de una matriz**

 **Operaciones con matrices**

 **Inversa de una matriz**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 1

# Método de eliminación de Gauss

## Definiciones

Se denomina **sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas** a una expresión de la forma:

$$(\dagger) \left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right\} a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

**Coeficientes del sistema:** elementos  $a_{ij} \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

**Términos independientes del sistema:** elementos  $b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, m\}$

**Incógnitas:** los elementos desconocidos  $x_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Una **solución** del sistema son  $n$  elementos  $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{K}$  tales que al sustituir cada  $x_i$  por  $s_i$  se obtienen  $m$  igualdades

**Sistema compatible:** tiene al menos una solución, **determinado**, si tiene solamente una, e **indeterminado** si tiene más de una

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Sistema homogéneo:** el que es de la forma:

$$(\ddagger) \left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema  $(\ddagger)$  obtenido a partir de  $(\dagger)$  se le denomina **sistema homogéneo asociado** a  $(\dagger)$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like effect behind the letters. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Métodos

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

1. Método de igualación
2. Método de sustitución
3. Método de reducción o eliminación
4. Método de Cramer o de los determinantes

Algunos de estos métodos no son siempre generales ni prácticos para sistemas “grandes”

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right\}$$

En esta asignatura abordaremos únicamente el método de reducción, también denominado:

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like underline beneath the '99'.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Método de Gauss

Se pueden realizar las siguientes operaciones, denominadas **operaciones elementales**, con las ecuaciones del sistema:

1. Multiplicar una ecuación por un  $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$
2. Intercambiar dos ecuaciones
3. Sumar a una ecuación el resultado de multiplicar cualquier otra por un  $\beta \in \mathbb{K}$

El resultado de aplicar una secuencia de operaciones elementales a un sistema es otro sistema **equivalente**, es decir que tiene las mismas soluciones

El objetivo del método es lograr un sistema equivalente al dado lo más sencillo posible

Son de interés dos formas equivalentes sencillas equivalentes a un sistema dado:

- I. **Forma escalonada** (no es única, y requiere operaciones adicionales para obtener posteriormente la solución)
- II. **Forma escalonada reducida** (es única y da directamente la solución, si la hay única)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{array} \right\}$$

1.  $e_2 - 3e_1$

2.  $e_3 - 3e_1$

3.  $e_2 \leftrightarrow e_3$

En este momento obtenemos una forma escalonada:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ -7x_2 - x_3 = 12 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

4.  $e_1 - e_3$

5.  $e_2 + e_3$

6.  $\frac{-1}{7}e_2$

7.  $e_1 - 3e_2$

Obtenemos la forma escalonada reducida que nos da directamente la solución única:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{array} \right\}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like underline that extends to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Matrices

Disposición rectangular de coeficientes (y términos independientes), encerrada entre paréntesis:

**Matriz de los coeficientes del sistema:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

**Matrix ampliada del sistema:**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in \mathbf{M}_{m \times n+1}(\mathbb{K})$$

Las operaciones elementales que realizamos con las ecuaciones pueden hacerse con las filas de la matriz ampliada

Ejemplo: El sistema del ejemplo anterior anterior puede representarse por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y realizando sobre ella la secuencia de operaciones elementales  $e_2 - 3e_1$ ,  $e_3 - 3e_1$ ,  $e_2 \leftrightarrow e_3$ ,  $e_1 - e_3$ ,  $e_2 + e_3$ ,  $\frac{-1}{7}e_2$  y  $e_1 - 3e_2$  obtenemos

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

¿Cuándo una matriz está en forma escalonada?

1. Puede trazarse una “escalera” descendente
2. Cada “peldaño” tiene altura 1 y está a la derecha del anterior
3. Bajo la “escalera” todos los elementos de la matriz son nulos
4. En cada esquina de un “peldaño” hay un elemento no nulo, llamado **pivote**

¿Cuándo una matriz está en forma escalonada reducida?

1. Está en forma escalonada
2. Cada pivote es la unidad
3. Sobre cada pivote los elementos son nulos

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -3 + \lambda \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \end{pmatrix}$$

SISTEMA INCOMPATIBLE



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Teorema de Rouché-Frobenius (1.0)

Siendo:

$A$  = matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales

$p$  = número de peldaños de una matriz escalonada de  $A$

$\bar{A}$  = matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales

$\bar{p}$  = número de peldaños de una matriz escalonada de  $\bar{A}$

$n$  = número de incógnitas del sistema

Un sistema de ecuaciones lineales es:

- I. compatible determinado  $\iff p = \bar{p} = n$
- II. compatible indeterminado  $\iff p = \bar{p} < n$
- III. incompatible  $\iff p \neq \bar{p} \quad (p + 1 = \bar{p})$

Nota: Un sistema homogéneo siempre admite la solución trivial  $0,0,\dots,0$  y es por tanto siempre compatible ( $p = \bar{p}$ )

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplos

Resolver en  $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

+	0	1	2	.	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Resolver en  $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

+	0	1	.	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 2

# Rango de una matriz

## Vectores

Podemos agrupar las soluciones de un sistema lineal,  $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{K}$ , en un único objeto que denominaremos vector

Definimos el conjunto (de los vectores)  $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

**Componentes de un vector:**  $x_1$ , primera componente;  $x_2$ , segunda componente; .... ;  $x_n$ , n-ésima componente

**Vector cero:**  $0 = (0, 0, \dots, 0)$

**Igualdad de vectores:** 
$$\left. \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right\} x = y \iff \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, x_i = y_i$$

Llamaremos **vectores fila** y **vectores columna** de una matriz a cada una de sus filas y columnas

Según interese, escribiremos indistintamente los vectores vertical u horizontalmente, y los podremos considerar matrices:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x \in \mathbb{K}^n$$

$$x \in \mathbf{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K}^n$$

$$x \in \mathbf{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Definimos una ley de composición interna y otra externa, que denominaremos **suma de vectores** y **producto por un escalar**:

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Propiedades:

I. La suma es un grupo conmutativo

A.  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  es el elemento neutro

B. El elemento opuesto de cada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es  $(-x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

II.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{K}^n, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

III.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

IV.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$

V.  $\forall x \in \mathbb{K}^n, 1 \cdot x = x$

A.  $\forall x \in \mathbb{K}^n, 0 \cdot x = 0 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot 0 = 0$

B.  $\forall x \in \mathbb{K}^n, -x = (-1) \cdot x$

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Dependencia e independencia lineal

**Combinación lineal:**  $x \in \mathbb{K}^n$  es combinación lineal de  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k$

o también:  $0 = (-1) \cdot x + \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k$

0 es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores:  $0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$

## Dependencia lineal:

**I.** El conjunto de vectores  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{K}^n$  es **linealmente dependiente** o **ligado**

$$\iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos que } \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k = 0$$

**II.** El conjunto de vectores  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{K}^n$  es **linealmente independiente** o **libre** si no es ligado

$$\iff \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_k \cdot x_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplos:

Determinar si  $\{(2,1), (1,1)\}$  es libre o ligado.

$$\alpha \cdot (2,1) + \beta \cdot (1,1) = (0,0) \iff (2\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) = (0,0) \iff (2\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (0,0) \iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{sistema homogéneo } 2 \times 2)$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{sistema compatible determinado, solución única } (0,0))$$

El conjunto es **libre**

Determinar si  $\{(1,1,3), (0,1,2), (1,2,5)\}$  es libre o ligado.

$$\alpha \cdot (1,1,3) + \beta \cdot (0,1,2) + \gamma(1,2,5) = (0,0,0) \iff (\alpha + \gamma, \alpha + \beta + 2\gamma, 3\alpha + 2\beta + 5\gamma) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \quad (\text{S.H. } 3 \times 3)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{S.C.I, varias soluciones})$$

El conjunto es **ligado**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Rango

Se denomina **rango de un conjunto de vectores** al mayor número de ellos que son linealmente independientes

Se denomina **rango de una matriz  $A$ ,  $r(A)$** , al rango de sus vectores columna

El rango de una matriz coincide con el número de peldaños de una de sus formas escalonadas

Los vectores correspondientes a las columnas pivote (escalones) son linealmente independientes

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The 'C' is significantly larger than the other letters. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath, all contained within a yellow rectangular box.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Teorema de Rouché-Frobenius (2.0)

Siendo:

$A$  = matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales

$\bar{A}$  = matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales

$n$  = número de incógnitas del sistema

Un sistema de ecuaciones lineales es:

- I. compatible determinado  $\iff r(A) = r(\bar{A}) = n$
- II. compatible indeterminado  $\iff r(A) = r(\bar{A}) < n$
- III. incompatible  $\iff r(A) \neq r(\bar{A}) \quad (r(A) + 1 = r(\bar{A}))$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like effect behind the letters. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Estructura de las soluciones

Sea el sistema (†) y su sistema homogéneo asociado (‡)

$$a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(†) \left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

$$(‡) \left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- I. Si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  son soluciones de (‡)  $u + v$  es solución de (‡)
- II. Si  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  es solución de (‡),  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot u$  es solución de (‡)
- III. Si (‡) es indeterminado  $\exists u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{K}^n$  linealmente independientes de modo que cualquier solución de (‡) es:

$$s_{gh} = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \dots + \alpha_k \cdot u_k \text{ para algunos } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$$

Además  $k = n - r(A)$

- IV. Si  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n), w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$  son soluciones de (†),  $w - w'$  es solución de (‡)
- V. Si  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  es solución de (†) y  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  es solución de (‡),  $w + u$  es también solución de (†)
- VI. Dada  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , solución de (†), cualquier otra solución de (†),  $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_n)$ , puede escribirse:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Operaciones con matrices

## Aplicaciones lineales

**Aplicación lineal asociada a la matriz**  $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  es la aplicación  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  que

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

o bien  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)$

### Propiedades:

I.  $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, f(x + y) = f(x) + f(y)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

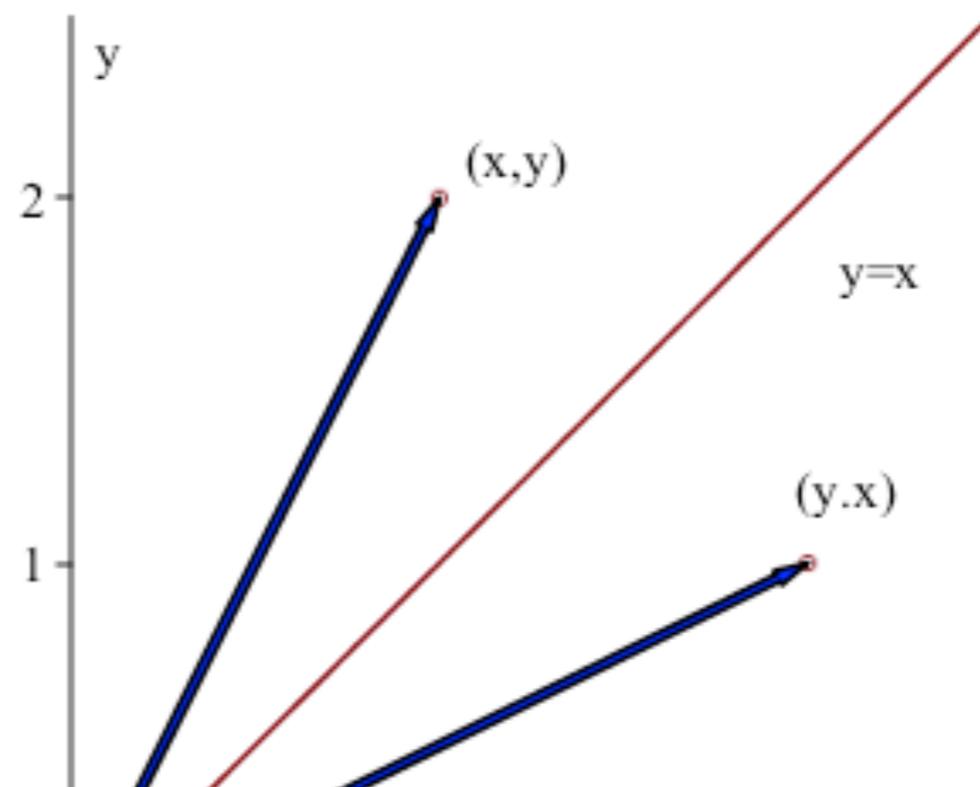
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Ejemplos:

Para  $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  la aplicación lineal asociada es  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, f(x, y) = (0x + 1y, 1x + 0y) = (y, x)$

y es el punto (vector) simétrico de cada  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  respecto de la recta  $y = x$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

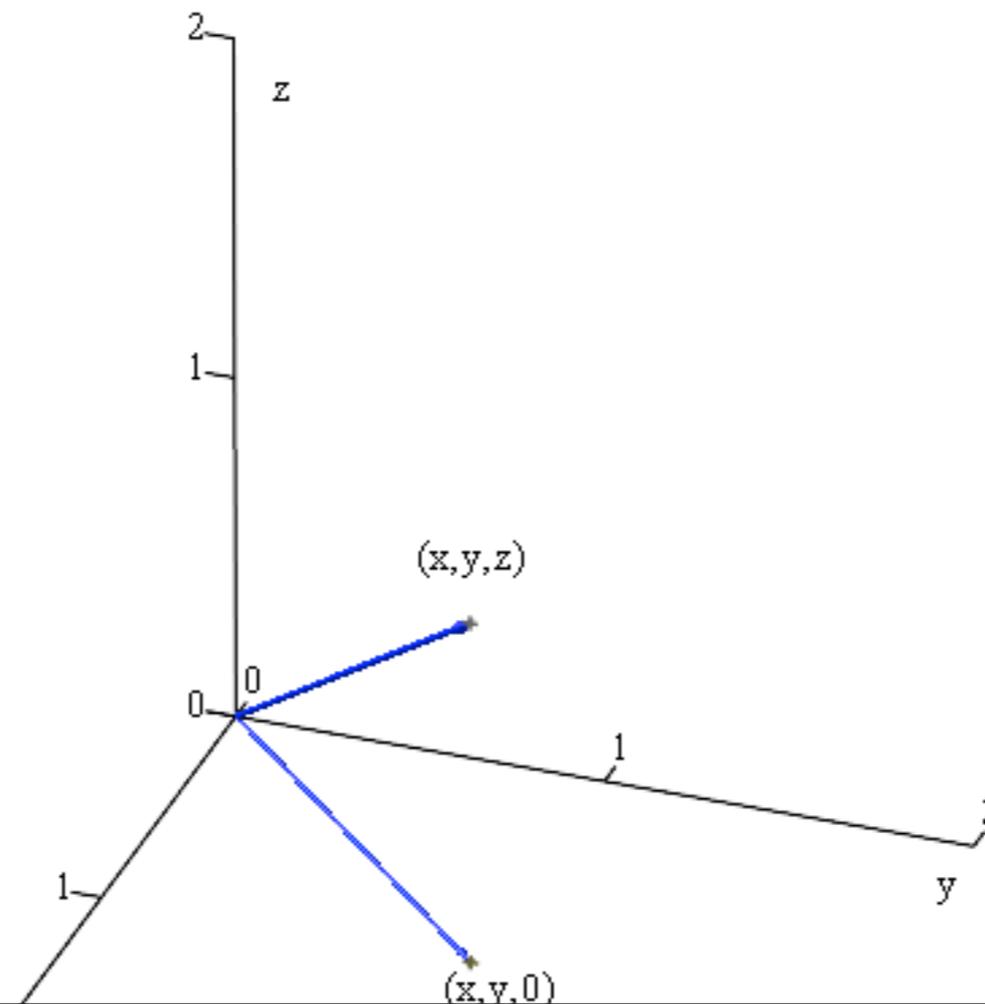
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Para  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  la aplicación lineal asociada es  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (x + 0y + 0z, 0x + 1y + 0z, 0x + 0y + 0z) = (x, y, 0)$

y es la proyección de cada punto (vector)  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  sobre el plano  $z = 0$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

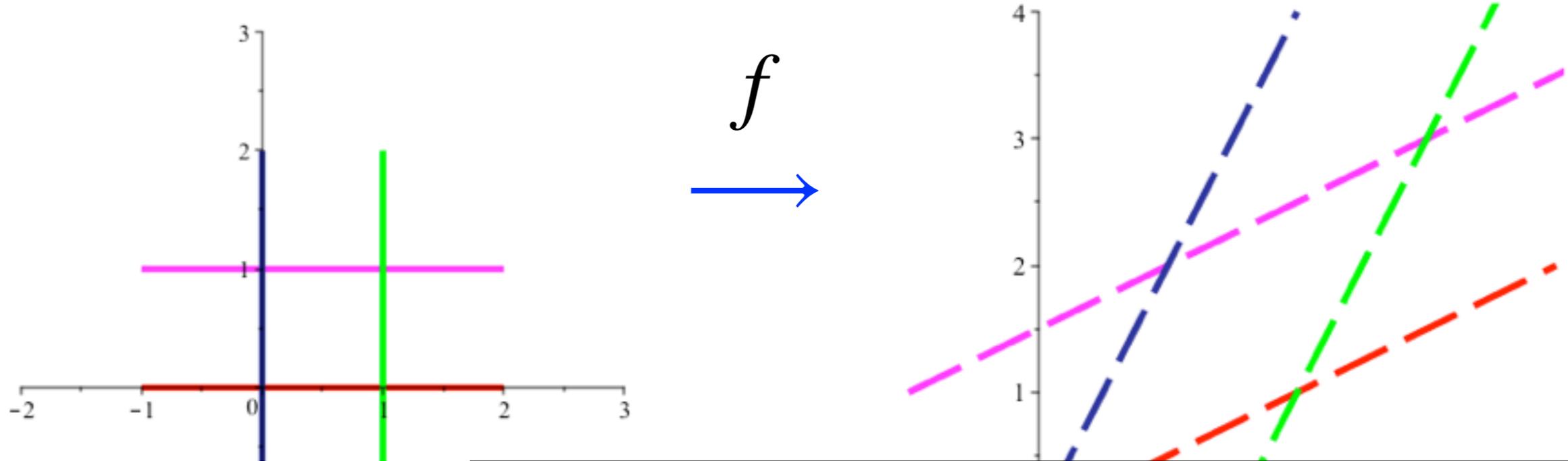
La imagen de la recta  $r = r_0 + \lambda v$  (que pasa por  $r_0$  y tiene la dirección de  $v$ ), por una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (o  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) es:

$$f(r) = f(r_0 + \lambda v) = f(r_0) + \lambda f(v)$$

es decir, la recta que pasa por  $f(r_0)$  y tiene la dirección de  $f(v)$

Ejemplo:

Para  $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , la imagen del cuadrado de vértices  $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$  es



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Teorema:

Sea  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  una aplicación que:

- I.  $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- II.  $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$\Rightarrow f$  es una aplicación lineal cuya matriz está formada por las columnas  $f(1,0,0,\dots,0), f(0,1,0,\dots,0), f(0,0,1,\dots,0), \dots, f(0,0,0,\dots,1)$

## Demostración:

Como  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + (0, 0, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + x_n(0, 0, \dots, 1)$ ,

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + x_n(0, 0, \dots, 1)) = x_1 f(1, 0, \dots, 0) + x_2 f(0, 1, \dots, 0) + x_n f(0, 0, \dots, 1)$

Siendo  $f(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), f(0, 1, \dots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, f(0, 0, \dots, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ ,

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

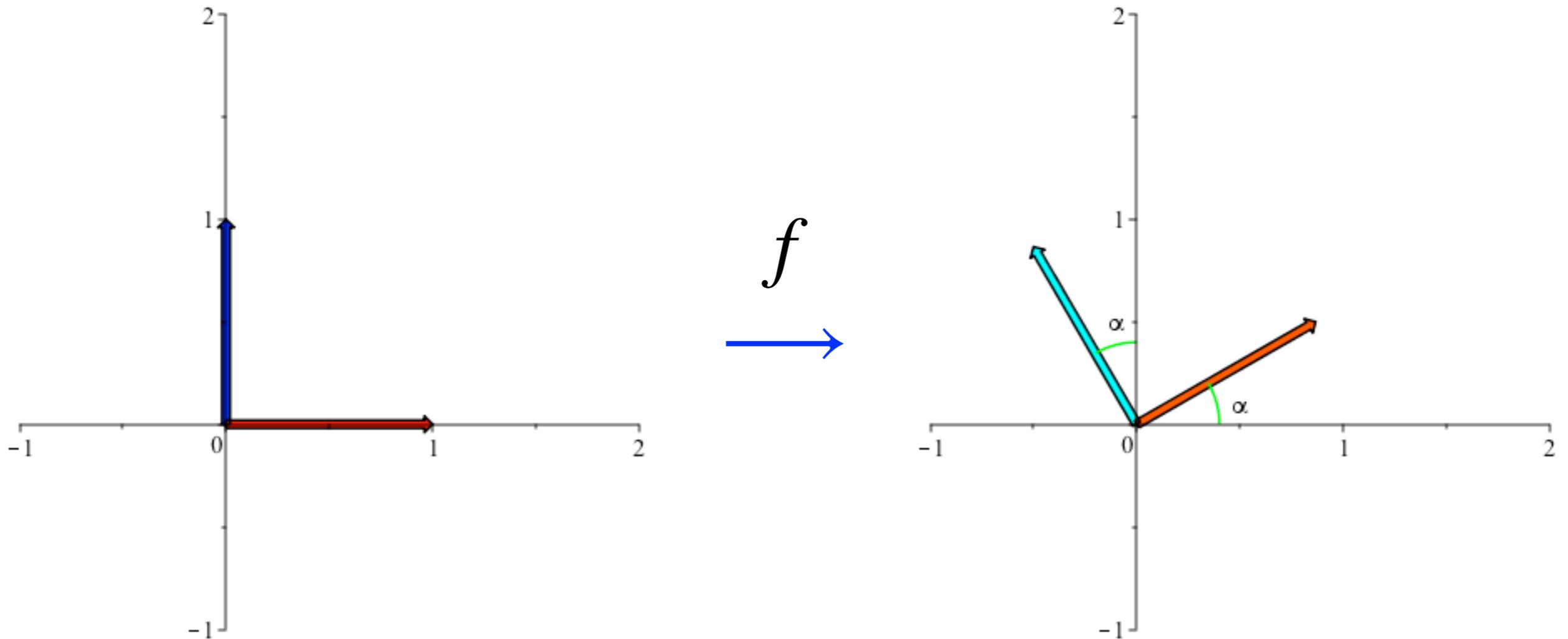
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo:

Sabiendo que un giro de un ángulo  $\alpha$  en  $\mathbf{R}^2$  es una aplicación lineal, encontrar su matriz



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Operaciones con aplicaciones lineales

Llamando  $\mathbb{L}_{m \times n} = \mathbb{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  al conjunto de aplicaciones lineales  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ( $f \in \mathbb{L}_{m \times n}$ ) podemos definir

$$+ : \mathbb{L}_{m \times n} \times \mathbb{L}_{m \times n} \rightarrow \mathbb{L}_{m \times n} \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_{m \times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{L}_{m \times n} \rightarrow \mathbb{L}_{m \times n} \quad \forall f \in \mathbb{L}_{m \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Efectivamente  $(f + g)$  y  $(\alpha f)$  son aplicaciones lineales:

I.  $(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$

II.  $(f + g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda(f + g)(x)$

I.  $(\alpha f)(x + y) = \alpha f(x + y) = \alpha(f(x) + f(y)) = \alpha f(x) + \alpha f(y) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(y)$

II.  $(\alpha f)(\lambda x) = \alpha f(\lambda x) = \alpha(\lambda f(x)) = (\alpha \lambda)f(x) = (\lambda \alpha)f(x) = \lambda(\alpha f(x)) = \lambda(\alpha f)(x)$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Si las matrices de  $f, g$  son respectivamente  $F, G$

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Las columnas de las matrices de  $f + g$  y de  $\alpha f$  son

$$(f + g)(1, 0, \dots, 0) = f(1, 0, \dots, 0) + g(1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \end{pmatrix} \quad (\alpha f)(1, 0, \dots, 0) = \alpha f(1, 0, \dots, 0) = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} \\ \alpha a_{21} \\ \vdots \\ \alpha a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$(f + g)(0, 1, \dots, 0) = f(0, 1, \dots, 0) + g(0, 1, \dots, 0) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} \\ a_{22} + b_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} + b_{m2} \end{pmatrix} \quad (\alpha f)(0, 1, \dots, 0) = \alpha f(0, 1, \dots, 0) = \alpha \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{12} \\ \alpha a_{22} \\ \vdots \\ \alpha a_{m2} \end{pmatrix}$$

⋮

⋮

$$(f + g)(0, 0, \dots, 1) = f(0, 0, \dots, 1) + g(0, 0, \dots, 1) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} + b_{1n} \\ a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (\alpha f)(0, 0, \dots, 1) = \alpha f(0, 0, \dots, 1) = \alpha \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Operaciones con matrices

En  $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  podemos definir

$$+ : \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \times \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \forall F, G \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), F + G = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \forall F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha F = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{siendo } F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Propiedades de la suma y el producto externo de aplicaciones lineales (y de matrices)

I. La suma es un grupo conmutativo

$$A. \begin{cases} 0 \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \in \mathbb{L}_{m \times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, 0(x) = (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \text{ es el elemento neutro de } \begin{cases} \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \\ \mathbb{L}_{m \times n} \end{cases}$$

$$B. \text{ El elemento opuesto de cada } \begin{cases} F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \end{cases} \text{ es } \begin{cases} -F = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \\ -f \in \mathbb{L}_{m \times n}, \forall x \in \mathbb{K}^n, (-f)(x) = -f(x) \end{cases}$$

$$II. \begin{cases} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall F, G \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \alpha \cdot (F + G) = \alpha \cdot F + \alpha \cdot G \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathbb{L}_{m \times n}, \alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g \end{cases}$$

$$III. \begin{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), (\alpha + \beta) \cdot F = \alpha \cdot F + \beta \cdot F \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathbb{L}_{m \times n}, (\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f \end{cases}$$

$$IV. \begin{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), (\alpha\beta) \cdot F = \alpha(\beta \cdot F) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathbb{L}_{m \times n}, (\alpha\beta) \cdot f = \alpha(\beta \cdot f) \end{cases}$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Composición de aplicaciones lineales

Sean  $f \in \mathbb{L}_{m \times n}, g \in \mathbb{L}_{p \times m}$  de matrices  $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$

La composición de aplicaciones lineales  $g \circ f \in \mathbb{L}_{p \times n}$  es una aplicación lineal:

- I.  $\forall x, y \in \mathbb{K}^n, (g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$
- II.  $\forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K} (g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x)$

La columna  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  de su matriz es:

$$(g \circ f)(0, 0, \dots, 1, \dots, 0) = g(f(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)) = g(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) = \begin{pmatrix} b_{11}a_{1j} + b_{12}a_{2j} + \cdots + b_{1m}a_{mj} \\ b_{21}a_{1j} + b_{22}a_{2j} + \cdots + b_{2m}a_{mj} \\ \vdots \\ b_{p1}a_{1j} + b_{p2}a_{2j} + \cdots + b_{pm}a_{mj} \end{pmatrix}$$

y la matriz de  $g \circ f$  es  $\begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1m}a_{m2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}a_{11} + b_{p2}a_{21} + \cdots + b_{pm}a_{m1} & b_{p1}a_{12} + b_{p2}a_{22} + \cdots + b_{pm}a_{m2} & \cdots & b_{p1}a_{1n} + b_{p2}a_{2n} + \cdots + b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Producto de matrices

Siendo las matrices  $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , y  $G = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$  se define el producto de ambas

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1m}a_{m2} & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2m}a_{m1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2m}a_{m2} & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}a_{11} + b_{p2}a_{21} + \cdots + b_{pm}a_{m1} & b_{p1}a_{12} + b_{p2}a_{22} + \cdots + b_{pm}a_{m2} & \cdots & b_{p1}a_{1n} + b_{p2}a_{2n} + \cdots + b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{p \times n}$$

de modo que el elemento situado en la fila  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , columna  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  del resultado  $C = G \cdot F$  es

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^m b_{ik}a_{kj}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$G \cdot F = i \rightarrow \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \star & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \star & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \star & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \star & \dots & \dots \end{pmatrix} \Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



## Propiedades:

En el producto de matrices, al igual que en la composición de funciones, el orden está determinado, y cuando es posible cambiarlo, ni el producto ni la composición son conmutativos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no es cancelativo:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{I. } \begin{cases} (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \\ (H \cdot G) \cdot F = H \cdot (G \cdot F) \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} h \circ (g + f) = h \circ g + h \circ f \\ H \cdot (G + F) = H \cdot G + H \cdot F \end{cases}$$

$$\text{III. } \begin{cases} (h + g) \circ f = h \circ f + g \circ f \\ (H + G) \cdot F = H \cdot F + G \cdot F \end{cases}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f) \\ (\alpha G) \cdot F = G \cdot (\alpha F) = \alpha(G \cdot F) \end{cases}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Sistemas de ecuaciones, matrices y aplicaciones lineales

Sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Aplicación lineal:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

El sistema puede escribirse:

$$f(x) = b \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$F \cdot x = b \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it, and a dark orange shadow is cast below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 4

# Inversa de una matriz

## Inversa de una aplicación lineal

La aplicación lineal  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  admite inversa  $\iff \exists f^{-1} : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n, f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{K}^n} \wedge f \circ f^{-1} = i_{\mathbb{K}^m}$

Veremos más adelante que solamente admitirán inversa (algunas) aplicaciones lineales cuando  $n = m$

La aplicación inversa  $f^{-1}$  es lineal<sup>†</sup>:

- I.  $f(f^{-1}(x + y)) = x + y = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \implies f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$
- II.  $f(f^{-1}(\alpha x)) = \alpha x = \alpha f(f^{-1}(x)) = f(\alpha f^{-1}(x)) \implies f^{-1}(\alpha x) = \alpha f^{-1}(x)$

Si  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})^{\ddagger}$  es la matriz (cuadrada) de  $f$  (invertible), a la matriz de  $f^{-1}$  la denominaremos matriz inversa  $F^{-1} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  y:

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{matriz de } i_{\mathbb{K}^n})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Cálculo de la inversa de una matriz

Sea la matriz  $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , su inversa  $F^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  verificará:

$$F \cdot F^{-1} = I_n \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos  $n$  sistemas de ecuaciones, cada uno de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas<sup>†</sup>, teniendo todos ellos la misma matriz del sistema.

Si todos ellos son compatibles y determinados, tendremos una (única) matriz inversa:

$$F \text{ es invertible} \iff r(F) = n$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Para resolverlos, podemos hacer la misma secuencia de operaciones elementales en cada uno de ellos y resolverlos simultáneamente:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right)$$

## Inversa de la matriz de un sistema de ecuaciones

Dado el sistema dado por  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  :

$$F \cdot x = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Ejemplo:

Calcular la inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Llamemos  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Se verificará:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y los resolvemos simultáneamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3/2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 4 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1/2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

O De manera más rápida y práctica:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 4 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 3 & -1 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ampliación de conceptos de matrices

**Matriz cuadrada:**

$$F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

**Diagonal principal de  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ :**

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

**Matriz diagonal  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ :**

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \implies a_{ij} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}$$

**Matriz identidad  $I_n \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ :**

matriz diagonal que además  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ii} = 1$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue, cloud-like background with a white outline. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Matriz triangular inferior**  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, i < j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \star & \star & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \star & \star & \dots & \star & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \star & 0 & \dots & 0 \\ \star & \star & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star \\ \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \dots & \star \\ \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$$

**Matriz triangular superior**  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, i > j \implies a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \dots & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \star \\ 0 & 0 & \dots & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Matriz triangular unitaria**  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ : matriz triangular que además  $\forall i \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}, a_{ii} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \star & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & \dots & \star \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Potencias de matrices**  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})^\dagger$ :  $F^2 = F \cdot F$     $F^3 = F^2 \cdot F = F \cdot F \cdot F$     $F^k = F^{k-1} \cdot F = \overleftarrow{F} \cdot \overleftarrow{F} \cdot \dots \cdot \overrightarrow{F}$     $(k \in \mathbf{N})$

$F^{-2} = F^{-1} \cdot F^{-1}$     $F^{-k} = F^{-(k-1)} \cdot F^{-1} = \overleftarrow{F^{-1}} \cdot \overleftarrow{F^{-1}} \cdot \dots \cdot \overrightarrow{F^{-1}}$     $(k \in \mathbf{N})$

$^\dagger$ Potencias negativas solo si  $F$  es invertible

$F^0 = I_n$     $\forall k, l \in \mathbf{Z}, F^{k+l} = F^k \cdot F^l$

**Matriz transpuesta de**  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ :

$F^T \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, b_{ij} = a_{ji}$

$$F = \begin{pmatrix} \star & \odot & \dots & \oplus & \otimes \\ \star & \odot & \dots & \oplus & \otimes \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \odot & \dots & \oplus & \otimes \end{pmatrix} \implies F^T = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ \odot & \odot & \dots & \odot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \oplus & \oplus & \dots & \oplus \\ \otimes & \otimes & \dots & \otimes \end{pmatrix}$$

**Matriz transpuesta hermitiana de**  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ :

$F^H \in \mathbf{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Propiedades:

I.  $(F^T)^T = F$     $(F^H)^H = F$

II.  $(F + G)^T = F^T + G^T$     $(F + G)^H = F^H + G^H$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  es una **matriz simétrica**  $\Leftrightarrow F = F^T$
- $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  es una **matriz antisimétrica**  $\Leftrightarrow F = -F^T$
- $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  es una **matriz hermítica (o hermitiana)**  $\Leftrightarrow F = F^H$
- $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  es una **matriz idempotente**  $\Leftrightarrow F^2 = F$
- $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  es una **matriz involutiva**  $\Leftrightarrow F^2 = I$  ( $\Leftrightarrow F = F^{-1}$ )

Propiedades:

- I.  $F \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{K}), G \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), F$  simétrica  $\Rightarrow G^T \cdot F \cdot G \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es simétrica
- II.  $F \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{C}), G \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{C}), F$  hermítica  $\Rightarrow G^H \cdot F \cdot G \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es hermítica
- III.  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow F^T \cdot F \in \mathbf{M}_{n \times n}$  y  $F \cdot F^T \in \mathbf{M}_{m \times m}$  son simétricas
- IV.  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow F + F^T \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es simétrica
- V.  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow F - F^T \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es antisimétrica
- VI.  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \Rightarrow F = \frac{1}{2}(F + F^T) + \frac{1}{2}(F - F^T) \in \mathbf{M}_{n \times n}$
- VII.  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  invertible  $\Rightarrow F^T$  invertible y  $(F^T)^{-1} = (F^{-1})^T$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Matriz particionada por filas:**

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix} \quad \text{con } f_{Fi} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$$

**Matriz particionada por columnas:**

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (c_{F1} \ c_{F2} \ \cdots \ c_{Fn}) \quad \text{con } c_{Fi} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

**Producto de matrices mediante matrices particionadas:**

$$G \in \mathbf{M}_{p \times m}(\mathbb{K}), F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), G \cdot F \in \mathbf{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$$

$$G \cdot F = (c_{G1} \ c_{G2} \ \cdots \ c_{Gm}) \cdot \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix} = c_{G1} \cdot f_{F1} + c_{G2} \cdot f_{F2} + \cdots + c_{Gm} \cdot f_{Fm} \quad c_{Gi} \cdot f_{Fi} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{pmatrix} \cdot (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) = \begin{pmatrix} b_{1i}a_{i1} & b_{1i}a_{i2} & \cdots & b_{1i}a_{in} \\ b_{2i}a_{i1} & b_{2i}a_{i2} & \cdots & b_{2i}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{pi}a_{i1} & b_{pi}a_{i2} & \cdots & b_{pi}a_{in} \end{pmatrix}$$

$$G \cdot F = \begin{pmatrix} f_{G1} \\ f_{G2} \\ \vdots \\ f_{Gp} \end{pmatrix} \cdot (c_{F1} \ c_{F2} \ \cdots \ c_{Fn}) = \begin{pmatrix} f_{G1} \cdot c_{F1} & f_{G1} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{G1} \cdot c_{Fn} \\ f_{G2} \cdot c_{F1} & f_{G2} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{G2} \cdot c_{Fn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{Gp} \cdot c_{F1} & f_{Gp} \cdot c_{F2} & \cdots & f_{Gp} \cdot c_{Fn} \end{pmatrix} \quad f_{Gi} \cdot c_{Fj} = (b_{i1} \ b_{i2} \ \cdots \ b_{im}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj}) = \left( \sum_{k=1}^m b_{ik}a_{kj} \right)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Producto por matriz columna:**

$$F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), X \in \mathbf{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}), F \cdot X \in \mathbf{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

$$F \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (c_{F1} \quad c_{F2} \quad \cdots \quad c_{Fn}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 c_{F1} + x_2 c_{F2} + \cdots + x_n c_{Fn}$$

Es una matriz columna combinación lineal de las columnas de  $F$

$$\begin{pmatrix} \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \\ \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \odot & \cdots & \oplus & \otimes \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \odot \\ \odot \\ \vdots \\ \odot \end{pmatrix} + \cdots + x_{n-1} \begin{pmatrix} \oplus \\ \oplus \\ \vdots \\ \oplus \end{pmatrix} + x_n \begin{pmatrix} \otimes \\ \otimes \\ \vdots \\ \otimes \end{pmatrix}$$

**Producto por matriz fila:**

$$F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), Y \in \mathbf{M}_{1 \times m}(\mathbb{K}), Y \cdot F \in \mathbf{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

$$Y \cdot F = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m) \cdot \begin{pmatrix} f_{F1} \\ f_{F2} \\ \vdots \\ f_{Fm} \end{pmatrix} = y_1 f_{F1} + y_2 f_{F2} + \cdots + y_m f_{Fm}$$

Es una matriz fila combinación lineal de las filas de  $F$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

**Matriz columna unidad:**

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

(columna  $j$  de la matriz identidad  $I_n$ )

**Matriz fila unidad:**

$$e_j^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \overset{j}{\downarrow} 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

(fila  $j$  de la matriz identidad  $I_n$ )



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Propiedades:**

$$e_i \cdot e_j^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \qquad e_j^T \cdot e_i = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} (0) & i \neq j \\ (1) & i = j \end{cases}$$

$$e_j^T \cdot F = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn})$$

$$e_i \cdot (e_j^T \cdot F) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Matrices elementales:**

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

(intercambio de filas  $i < j$  de la matriz identidad  $I_n$ )

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

(multiplicación de la fila  $i$  de la matriz identidad  $I_n$  por  $\alpha \neq 0$ )



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

(adición a la fila  $i$  de la matriz identidad  $I_n$  su fila  $j$  multiplicada por  $\alpha \neq 0$ )

### Propiedades:

- I. Las matrices elementales son invertibles:  $E_{ij}^{-1} = E_{ji} = E_{ij}$        $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$        $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$
- II. Al intercambiar las filas  $i, j$  de  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  obtenemos:  $E_{ij} \cdot F$
- III. Al multiplicar la fila  $i$  de  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  por  $\alpha \neq 0$  obtenemos:  $E_i(\alpha) \cdot F$
- IV. Al añadir a la fila  $i$  de  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  la fila  $j$  multiplicada por  $\alpha \neq 0$  obtenemos:  $E_{ij}(\alpha) \cdot F$
- V. Una secuencia de operaciones elementales de fila realizadas sobre  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  es:

$$S \cdot F = E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot F$$

$$S = E_n \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \in \mathbf{M}_{m \times m}(\mathbb{K}) \text{ es invertible y } S^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot \dots \cdot E_n^{-1}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Espacios vectoriales

-  **Espacio vectorial. Ejemplos**
-  **Dependencia e independencia lineal**
-  **Bases y dimensión**
-  **Subespacios vectoriales. Operaciones entre ellos**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Espacio vectorial. Ejemplos

Sean un conjunto  $\mathcal{V}$  y un cuerpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ , a cuyos elementos denominaremos **vectores** y **escalares** respectivamente

Definamos una operación interna  $+$  y una externa  $\cdot$  :

$$\begin{aligned} + : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ (u, v) &\rightarrow w = u + v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ (\alpha, v) &\rightarrow w = \alpha v \end{aligned}$$

Diremos que  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  es un  $\mathbb{K}$ -**espacio vectorial** o espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  si se verifican:

- I.  $\forall u, v \in \mathcal{V}, u + v = v + u$
- II.  $\forall u, v, w \in \mathcal{V}, (u + v) + w = u + (v + w)$
- III.  $\exists 0 \in \mathcal{V}, \forall u \in \mathcal{V}, u + 0 = 0 + u = u$
- IV.  $\forall u \in \mathcal{V}, \exists (-u) \in \mathcal{V}, u + (-u) = (-u) + u = 0$
- V.  $\forall u \in \mathcal{V}, 1u = u$
- VI.  $\forall u \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
- VII.  $\forall u \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Espacio vectorial real: cuando  $\mathbb{K} = \mathbf{R}$

Espacio vectorial complejo: cuando  $\mathbb{K} = \mathbf{C}$

### Propiedades:

I.  $\forall u \in \mathcal{V}, 0u = 0$

$$u = 1u = (0 + 1)u = 0u + 1u = 0u + u \implies 0u = 0$$

II.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha 0 = 0$

$$a0 = a(0 + 0) = a0 + a0 \implies a0 = 0$$

III.  $\forall u \in \mathcal{V}, (-u) = (-1)u$

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0 \implies (-u) = (-1)u$$

### Ejemplos:

$(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$  vectores reales en el plano

$(\mathbf{R}^3, +, \cdot)$  vectores reales en el espacio

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  vectores n-tuplas de elementos de  $\mathbb{K}$

$(\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  matrices de  $m$  filas y  $n$  columnas de elementos de  $\mathbb{K}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplos:

$\{0\}$  con las operaciones  $0 + 0 = 0$  y  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha 0 = 0$

$\mathbb{K}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mid a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbf{N}\}$  (sucesiones de elementos de  $\mathbb{K}$ ) con las operaciones:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n, \dots)$$

$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_j \in \mathbb{K}, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$  (polinomios en  $x$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ ), con:

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n \quad (\text{si } m \leq n)$$

$$\alpha(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

$\mathbb{K}_m[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid a_j \in \mathbb{K}, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, n \leq m \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$  (polinomios de  $\mathbb{K}[x]$  de grado como mucho  $m$ )

con las mismas operaciones que  $\mathbb{K}(x)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

El conjunto  $S \subset \mathbb{K}^n$  de soluciones de un sistema homogéneo  $\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\}$  con las ops. de  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$

Si  $A$  es la matriz del sistema:  $x \in S \iff A \cdot x = 0$

Las dos operaciones son leyes de composición en  $S$

$$x, y \in S, A \cdot (x + y) = 0 \implies x + y \in S$$

$$x \in S, \alpha \in \mathbb{K} \quad A \cdot (\alpha x) = 0 \implies \alpha x \in S$$

Las propiedades de  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  las tiene  $(S, +, \cdot)$  ya que

$$A \cdot 0 = 0 \implies 0 \in S$$

$$A \cdot (-x) = -A \cdot x = 0 \implies (-x) \in S$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Dependencia e independencia lineal

Sea  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial:

**Combinación lineal:**  $v \in \mathcal{V}$  es combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V} \iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

o también:  $0 = (-1)v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ .

0 es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores:  $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

**Dependencia lineal:**

I. El conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{V}$  es **linealmente dependiente** o **ligado**

$$\iff \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \text{ no todos nulos que } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

II. El conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{V}$  es **linealmente independiente** o **libre** si no es ligado

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sistema de generadores:

El conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{V}$  es un **sistema de generadores de  $\mathcal{V}$**

$$\iff \forall v \in \mathcal{V}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

## Propiedades:

I. Si el conjunto  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathcal{V}$  es ligado, al menos uno de sus elementos es combinación lineal de los demás

$$\exists \alpha_j \neq 0, j \in \{1, \dots, k\}, \alpha_j \neq 0 \wedge \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

$$\implies v_j = -\alpha_1 \alpha_j^{-1} v_1 - \dots - \alpha_{j-1} \alpha_j^{-1} v_{j-1} - \alpha_{j+1} \alpha_j^{-1} v_{j+1} - \dots - \alpha_k \alpha_j^{-1} v_k$$

II. Cualquier conjunto finito  $V \subset \mathcal{V}$  que  $0 \in V$  es ligado

$$V = \{0, v_1, \dots, v_k\} \implies \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha 0 + 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k = 0$$

III. Si el conjunto finito  $V \subset \mathcal{V}$  es libre,  $W \subset V \implies W$  es libre  $(W = \{v_1, v_2, \dots, v_l\} \subset V = \{v_1, v_2, \dots, v_l, \dots, v_k\})$

$$\text{Si } W \text{ fuese ligado, } V \text{ lo sería también: } \exists \alpha_j \neq 0, j \in \{1, \dots, l\} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_l v_l + 0v_{l+1} + \dots + 0v_k = 0$$

IV. Si el conjunto finito  $V \subset \mathcal{V}$  es ligado,  $V \subset W \implies W$  es ligado

V.  $V = \{v\}$  es libre  $\iff v \neq 0$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplos:

En  $\mathbb{K}^n$  cualquier conjunto de más de  $n$  vectores es ligado

Sea  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ , con  $v_i = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni}), i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$

La expresión  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$  es equivalente a un sistema homogéneo cuya matriz del sistema tiene como columnas los vectores de  $V$ :

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n+1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n \times n+1}(\mathbb{K})$$

y su rango verificará  $R(A) \leq n < n+1 \implies$  El sistema homogéneo asociado a  $A$  es compatible indeterminado y  $V$  es ligado

En  $\mathbb{K}^n$  cualquier conjunto libre con  $n$  vectores es un sistema de generadores de  $\mathbb{K}^n$

Sea  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  libre,  $\forall v \in \mathbb{K}^n$  el conjunto  $\{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es ligado y

$$0 = \alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \implies \alpha \neq 0 \wedge v = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Los polinomios  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \subset \mathbb{K}(x)$  forman un conjunto libre

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n = 0^\dagger \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

† El segundo miembro de la igualdad representa al polinomio  $0 \in \mathbb{K}(x)$

Las funciones  $\{1, x, x^2\} \subset C([-1, 1], \mathbf{R})$  forman un conjunto libre

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0^\ddagger \implies \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

‡ El segundo miembro de la igualdad representa la función  $0 \in C([-1, 1], \mathbf{R})$  que  $\forall x \in [-1, 1], 0(x) = 0$ . No confundir esta igualdad con la ecuación  $\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$  que puede verificarse para un máximo de dos valores de  $x \in [-1, 1]$

Las funciones  $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\} \subset C([- \pi, \pi], \mathbf{R})$  forman un conjunto ligado

$$(-1)1 + 1 \sin^2 x + 1 \cos^2 x = 0$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers off to the right. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Dependencia lineal en conjuntos numerables:

I. El conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k \dots\} \subset \mathcal{V}$  es **linealmente dependiente** o **ligado**

$\Leftrightarrow$  Algún subconjunto finito  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es ligado

II. El conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_k \dots\} \subset \mathcal{V}$  es **linealmente independiente** o **libre**

$\Leftrightarrow$  Todo subconjunto finito  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es libre

## Ejemplos:

$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\} \subset C([-\pi, \pi], \mathbf{R})$  es libre

$\{1, e^{jx}, e^{-jx}, \dots, e^{jnx}, e^{-jnx}, \dots\} \subset C([-\pi, \pi], \mathbf{C})$  es libre

$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subset \mathbb{K}[x]$  es libre

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like effect behind the letters. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Sección 3

# Bases y dimensión

El conjunto de vectores  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathcal{V}$  es **una base** del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ es libre} \\ B \text{ es sistema de generadores de } \mathcal{V} \end{cases}$$

Si  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de  $\mathcal{V}$  y  $\forall v \in \mathcal{V}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Se denominan **componentes** o **coordenadas** de  $v$  respecto de la base  $B$  a los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Son únicas

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \wedge v = \alpha'_1 v_1 + \alpha'_2 v_2 + \dots + \alpha'_n v_n \Rightarrow 0 = (\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) v_n \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = \alpha'_i$$

Escribiremos las coordenadas de  $v \in \mathcal{V}$  respecto de la base  $B^\dagger$  con la tupla  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$

Dada una base  $B$  podemos definir la función (biyectiva) de coordenadas:  $c_B : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$  que  $\forall v \in \mathcal{V}, c_B(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplos:

$B_c = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , con  $e_j = (0 \dots 0 \overset{j}{\downarrow} 1 0 \dots 0)$ , es una base de  $\mathbb{K}^n$

$B_c = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  es una base de  $\mathbb{K}_n[x]$

$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$  es base de  $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Las coordenadas del polinomio  $1 + x + 3x^2 \in (\mathbf{Z}_5)_9[x]$  respecto de la base  $B_c$  son el vector  $(1, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbf{Z}_5^{10}$

Las coordenadas del vector  $(1, 2, 3) \in \mathbf{R}^3$  respecto de la base  $B_c$  son él mismo

Las coordenadas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbf{R})$  respecto de la base  $B_c$  son el vector  $(1, 3, 2, 4) \in \mathbf{R}^4$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### Proposición:

Si el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  tiene una base  $B$  con  $n$  elementos, cualesquiera  $n + 1$  vectores de  $\mathcal{V}$  son ligados

Sea la base  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y los  $n + 1$  vectores cualesquiera de  $\mathcal{V}$   $w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}$

$$\text{Por ser } B \text{ base de } \mathcal{V} \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \dots + \alpha_{n1}v_n \\ w_2 = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{n2}v_n \\ \vdots \\ w_n = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \dots + \alpha_{nn}v_n \\ w_{n+1} = \alpha_{1n+1}v_1 + \alpha_{2n+1}v_2 + \dots + \alpha_{nn+1}v_n \end{array} \right. \quad \text{Para que sean ligados } \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_n w_n + \gamma_{n+1} w_{n+1} = 0$$

Es decir:

$$\gamma_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \dots + \alpha_{n1}v_n) + \gamma_2(\alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{n2}v_n) + \dots + \gamma_n(\alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \dots + \alpha_{nn}v_n) + \gamma_{n+1}(\alpha_{1n+1}v_1 + \alpha_{2n+1}v_2 + \dots + \alpha_{nn+1}v_n) = 0$$

$$(\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{12} + \dots + \gamma_n\alpha_{1n} + \gamma_{n+1}\alpha_{1n+1})v_1 + (\gamma_1\alpha_{21} + \gamma_2\alpha_{22} + \dots + \gamma_n\alpha_{2n} + \gamma_{n+1}\alpha_{2n+1})v_2 + \dots + (\gamma_1\alpha_{n1} + \gamma_2\alpha_{n2} + \dots + \gamma_n\alpha_{nn} + \gamma_{n+1}\alpha_{nn+1})v_n = 0$$

Por ser  $B$  base (y por tanto libre):

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{12} + \dots + \gamma_n\alpha_{1n} + \gamma_{n+1}\alpha_{1n+1} = 0 \\ \gamma_1\alpha_{21} + \gamma_2\alpha_{22} + \dots + \gamma_n\alpha_{2n} + \gamma_{n+1}\alpha_{2n+1} = 0 \\ \vdots \\ \gamma_1\alpha_{n1} + \gamma_2\alpha_{n2} + \dots + \gamma_n\alpha_{nn} + \gamma_{n+1}\alpha_{nn+1} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Sistema homogéneo con } n \text{ ecuaciones y } n + 1 \text{ incógnitas } \gamma_i, i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$$

Como  $\text{rango} \leq n < n + 1$  el sistema es compatible indeterminado y los vectores  $w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}$  son ligados



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Teorema:

Todas las bases de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  poseen el mismo número de elementos

Sean las bases  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ base} \wedge B' \text{ libre} \implies m \leq n \\ B' \text{ base} \wedge B \text{ libre} \implies n \leq m \end{array} \right\} \implies m = n$$

Llamamos **dimensión** del  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  al número de vectores de una cualquiera de sus bases -  $\dim(\mathcal{V})$

## Ejemplos:

$$\dim(\{0\}) = 0$$

$$\dim(\mathbb{K}^n) = n$$

$$\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$$

$$\dim(\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = m n$$

Decimos que un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  es de **dimensión infinita** si se puede encontrar un  $S \subset \mathcal{V}$  no finito y libre

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Proposición:

En un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ , todo conjunto libre que tenga  $n$  vectores es una base de  $\mathcal{V}$

Sea el conjunto libre  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ,  $\forall v \in \mathcal{V}$  el conjunto  $\{v, u_1, u_2, \dots, u_n\}$  tiene  $n + 1$  vectores y por tanto es ligado

$\exists \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha v + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$  y  $\alpha \neq 0$  (si fuese  $\alpha = 0$   $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  no podría ser libre)

$v = -\alpha^{-1} \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha^{-1} \alpha_n u_n$  ( $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{V}$ )

### Teorema:

En un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ , todo conjunto libre de vectores puede completarse para obtener una base, es decir si  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ,  $k < n$ , es libre, existen  $n - k$  vectores  $u_{k+1}, \dots, u_n \in \mathcal{V}$  de modo que  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$  es una base de  $\mathcal{V}$

Dado  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  siempre podemos encontrar algún vector linealmente independiente con ellos, ya que de lo contrario  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  sería una base, lo que contradice que  $k < n$ . Sea  $u_{k+1}$  ese vector. Repitiendo el razonamiento para  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$  llegaremos a encontrar  $n$  vectores linealmente independientes, que han de ser necesariamente base

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Lema:

En un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ , si el conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{V}$  y los vectores  $u_{k+1}, \dots, u_m$  son combinación de lineal de los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , entonces  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{V}$

Por ser  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  sistema de generadores de  $\mathcal{V}$ :  $\forall v \in \mathcal{V}, v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_m u_m$

Por ser los  $m - k$  últimos combinación lineal de los  $k$  primeros:

$$\begin{cases} u_{k+1} = \alpha_{1\ k+1} u_1 + \dots + \alpha_{k\ k+1} u_k \\ \vdots \\ u_m = \alpha_{1\ m} u_1 + \dots + \alpha_{k\ m} u_k \end{cases}$$

Sustituyendo:  $\forall v \in \mathcal{V}, v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} (\alpha_{1\ k+1} u_1 + \dots + \alpha_{k\ k+1} u_k) + \dots + \alpha_m (\alpha_{1\ m} u_1 + \dots + \alpha_{k\ m} u_k)$

$$v = (\alpha_1 + \alpha_{k+1} \alpha_{1\ k+1} + \dots + \alpha_m \alpha_{1\ m}) u_1 + \dots + (\alpha_k + \alpha_{k+1} \alpha_{k\ k+1} + \dots + \alpha_m \alpha_{k\ m}) u_k$$

Es decir  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  es un sistema de generadores de  $\mathcal{V}$

### Teorema:

Si  $S$  es un sistema de generadores de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ , podemos encontrar un subconjunto de  $S$  con  $n$  elementos que sea una base de  $\mathcal{V}$

Elegimos  $u_1 \in S, u_1 \neq 0$ . A continuación elegimos  $u_2 \in S$  con  $\{u_1, u_2\}$  libre. Suponiendo elegidos  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , elegimos  $u_{k+1} \in S$  de modo que  $\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}\}$  sea libre. Se repite este proceso hasta que sea imposible añadir un nuevo vector de  $S$  que sea linealmente independiente con los obtenidos  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Este conjunto será sistema de generadores de  $\mathcal{V}$  (lema anterior) y por



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Cambio de base

Sean  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  bases del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$ , denominadas *base antigua* y *base nueva* respectivamente

Podremos escribir, por ser  $B$  base de  $\mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} v'_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n \\ v'_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ v'_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n \end{aligned} \quad \text{y denominaremos matriz del cambio de base de } B \text{ a } B' \text{ a } M_B^{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Y análogamente, por ser  $B'$  base de  $\mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= a'_{11}v'_1 + a'_{21}v'_2 + \dots + a'_{n1}v'_n \\ v_2 &= a'_{12}v'_1 + a'_{22}v'_2 + \dots + a'_{n2}v'_n \\ &\vdots \\ v_n &= a'_{1n}v'_1 + a'_{2n}v'_2 + \dots + a'_{nn}v'_n \end{aligned} \quad \text{y denominaremos matriz del cambio de base de } B' \text{ a } B \text{ a } M_{B'}^B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ambas matrices de cambio de base son invertibles y  $M_B^{B'^{-1}} = M_{B'}^B$

$$\begin{aligned} v_1 &= a'_{11}v'_1 + a'_{21}v'_2 + \dots + a'_{n1}v'_n = a'_{11}(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n) + \dots + a'_{n1}(a_{11}v_1 + \dots + a_{nn}v_n) = (a'_{11}a_{11} + \dots + a'_{n1}a_{1n})v_1 + \dots + (a'_{11}a_{n1} + \dots + a'_{n1}a_{nn})v_n \\ v_2 &= a'_{12}v'_1 + a'_{22}v'_2 + \dots + a'_{n2}v'_n = a'_{12}(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n) + \dots + a'_{n2}(a_{11}v_1 + \dots + a_{nn}v_n) = (a'_{12}a_{11} + \dots + a'_{n2}a_{1n})v_1 + \dots + (a'_{12}a_{n1} + \dots + a'_{n2}a_{nn})v_n \\ &\vdots \\ v_n &= a'_{1n}v'_1 + a'_{2n}v'_2 + \dots + a'_{nn}v'_n = a'_{1n}(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n) + \dots + a'_{nn}(a_{11}v_1 + \dots + a_{nn}v_n) = (a'_{1n}a_{11} + \dots + a'_{nn}a_{1n})v_1 + \dots + (a'_{1n}a_{n1} + \dots + a'_{nn}a_{nn})v_n \end{aligned}$$

Y como las coordenadas respecto de una base son únicas:

$$\begin{aligned} a_{11}a'_{11} + \dots + a_{1n}a'_{n1} &= 1 \\ &\vdots \\ a_{n1}a'_{11} + \dots + a_{nn}a'_{n1} &= 0 \\ a_{11}a'_{12} + \dots + a_{1n}a'_{n2} &= 0 \\ a_{21}a'_{12} + \dots + a_{2n}a'_{n2} &= 1 \\ &\vdots \\ a_{n1}a'_{12} + \dots + a_{nn}a'_{n2} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{11}a'_{1n} + \dots + a_{1n}a'_{nn} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}a'_{1n} + \dots + a_{nn}a'_{nn} &= 1 \end{aligned}$$

abreviadamente:  $\sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

o bien:  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Teorema (cambio de base):

Sea el vector  $v \in \mathcal{V}$ , y  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  bases del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$  (base antigua y base nueva)

Denominemos  $V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  y  $V_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$  a las coordenadas de  $v$  respecto de la bases  $B$  y  $B'$  respectivamente

Se verifican:  $V_B = M_B^{B'} \cdot V_{B'}$  y  $V_{B'} = M_{B'}^B \cdot V_B$  ( $V_{B'} = M_B^{B'^{-1}} \cdot V_B$ )

Siendo  $B, B'$  bases de  $\mathcal{V}$  podremos escribir

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad V_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad v = \alpha'_1 v'_1 + \dots + \alpha'_n v'_n \quad V_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v &= \alpha'_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n) + \alpha'_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n) + \dots + \alpha'_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n) \\ &= (a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \dots + a_{1n}\alpha'_n)v_1 + (a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \dots + a_{2n}\alpha'_n)v_2 + \dots + (a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \dots + a_{nn}\alpha'_n)v_n \end{aligned}$$

Al ser las coordenadas respecto una base únicas:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha'_1 + a_{12}\alpha'_2 + \dots + a_{1n}\alpha'_n \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha'_1 + a_{22}\alpha'_2 + \dots + a_{2n}\alpha'_n \\ &\vdots \\ \alpha_n &= a_{n1}\alpha'_1 + a_{n2}\alpha'_2 + \dots + a_{nn}\alpha'_n \end{aligned} \right\} \text{ o bien: } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 4

# Subespacios vectoriales y operaciones

Un subconjunto  $W \subset \mathcal{V}$  del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$  es un **subespacio vectorial** de  $\mathcal{V}$  si  $W$  es un  $\mathbb{K}$ -e.v. con las operaciones definidas en  $\mathcal{V}$

$$W \subset \mathcal{V} \text{ es un subespacio vectorial de } \mathcal{V} \iff \begin{cases} W \neq \emptyset \\ \forall u, v \in W, u + v \in W \\ \forall u \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha u \in W \end{cases}$$

Subespacios impropios de un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$ :  $\{0\}$  y  $\mathcal{V}$

$\mathcal{V}$  es  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensión finita  $n \implies$  la dimensión de cualquier subespacio de  $\mathcal{V}$  no supera a  $n$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it, and a dark orange shadow is cast below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Ejemplos:

Todas las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios vectoriales de  $\mathbf{R}^3$

$\mathbb{K}_m[x]$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{K}[x]$

Siendo  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  un conjunto de vectores de un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$ , el conjunto

$L(S) = \{a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_mu_m \mid a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}\}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$  denominado **subespacio generado** por  $S$

El conjunto  $S \subset \mathbb{K}^n$  de soluciones de un sistema homogéneo es un subespacio vectorial de  $\mathbb{K}^n$ . Su dimensión es  $r = n - r(A)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{array} \right\} \quad x \in S \iff A \cdot x = 0$$

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, green, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the word "Cartagena". The text is set against a light blue background with a white shadow effect, and a horizontal orange and yellow gradient bar is positioned below the text.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Análogamente, todo subespacio vectorial de  $\mathbb{K}^n$  puede expresarse por un sistema homogéneo. Veamos un ejemplo:

Sea  $V$  el subespacio de  $\mathbb{R}^5$  que tiene como base  $\{(1,2,0,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ , formada por los vectores  $e'_1, e'_2$

Dado cualquier vector  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V$  el conjunto de vectores  $\{e'_1, e'_2, x\}$  deberá ser ligado y tener rango 2

Por tanto la matriz formada -por columnas- con las coordenadas<sup>†</sup> de esos tres vectores tendrá rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

Obtenemos una forma escalonada de esa matriz\_

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \\ 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

na base con  $e(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

## Operaciones con subespacios vectoriales:

Sean  $U, W \subset \mathcal{V}$  subespacios del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$ , los siguientes conjuntos:

I.  $U \cap W = \{v \in \mathcal{V} \mid v \in U \wedge v \in W\}$

**Intersección** de los subespacios vectoriales  $U$  y  $W$

II.  $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$

**Suma** de los subespacios vectoriales  $U$  y  $W$

son subespacios vectoriales del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$

$$x, y \in U \cap W \Rightarrow x, y \in U \wedge x, y \in W \Rightarrow x + y \in U \wedge x + y \in W \Rightarrow x + y \in U \cap W$$

$$x \in U \cap W \Rightarrow x \in U \wedge x \in W \Rightarrow \alpha x \in U \wedge \alpha x \in W \Rightarrow \alpha x \in U \cap W$$

$$x, y \in U + W \Rightarrow \begin{matrix} x = x_u + x_w \\ x_u \in U \wedge x_w \in W \end{matrix} \wedge \begin{matrix} y = y_u + y_w \\ y_u \in U \wedge y_w \in W \end{matrix} \Rightarrow x + y = (x_u + y_u) + (x_w + y_w) \Rightarrow x + y \in U + W$$

$x_u + y_u \in U \wedge x_w + y_w \in W$

$$x \in U + W \Rightarrow \begin{matrix} x = x_u + x_w \\ x_u \in U \wedge x_w \in W \end{matrix} \Rightarrow \alpha x = (\alpha x_u) + (\alpha x_w) \Rightarrow \alpha x \in U + W$$

$\alpha x_u \in U \wedge \alpha x_w \in W$

La **unión** de espacios vectoriales  $U \cup W = \{v \in \mathcal{V} \mid v \in U \vee v \in W\}$  **no es**, en general, **subespacio vectorial** del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### Proposición (fórmula de Grassman):

Sean  $U, W \subset \mathcal{V}$  subespacios del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n$ . Se verifica:  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Sean  $\dim(U) = n$ ,  $\dim(W) = m$  y  $\dim(U \cap W) = r$  y  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  una base de  $U \cap W$

Completamos dicha base para formar bases de  $U$  y  $W$  a partir de ella (añadiendo  $n - r$  y  $m - r$  vectores respectivamente)

$$B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, \dots, u_{n-r}\} \quad B_W = \{e_1, e_2, \dots, e_r, w_1, \dots, w_{m-r}\}$$

Sea el conjunto  $B = B_U \cup B_W = \{e_1, e_2, \dots, e_r, u_1, \dots, u_{n-r}, w_1, \dots, w_{m-r}\}$ , formado por  $r + (n - r) + (m - r) = n + m - r$  vectores

I.  $B_U \cup B_W$  es sistema de generadores de  $U + W$

$$x \in U + W \implies x = x_u + x_w \implies x = x_{u1}e_1 + \dots + x_{ur}e_r + x'_{u1}u_1 + \dots + x'_{u_{n-r}}u_{n-r} + x_{w1}e_1 + \dots + x_{wr}e_r + x'_{w1}w_1 + \dots + x'_{w_{m-r}}w_{m-r}$$

$x_u \in U \wedge x_w \in W$

$$\implies x = (x_{u1} + x_{w1})e_1 + \dots + (x_{ur} + x_{wr})e_r + x'_{u1}u_1 + \dots + x'_{u_{n-r}}u_{n-r} + x'_{w1}w_1 + \dots + x'_{w_{m-r}}w_{m-r} \implies x \in L(B_U \cup B_W)$$

II.  $B$  es libre

Sea  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{n-r} u_{n-r} + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{m-r} w_{m-r} = 0$  y podemos escribir:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{n-r} u_{n-r} = -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{m-r} w_{m-r} \implies \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{n-r} u_{n-r} \in U \cap W$$

$$\implies \beta_1 = \dots = \beta_{n-r} = 0 \quad \text{quedando} \quad \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{m-r} w_{m-r} = 0 \text{ y al ser } B_W \text{ base:}$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-r} = 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Suma directa:

Un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$  es **suma directa** de dos de sus subespacios  $U, W \subset \mathcal{V}$ :

$$1. \mathcal{V} = U + W$$

$$2. U \cap W = \{0\}$$

y escribiremos  $\mathcal{V} = U \oplus W$ . Se verifica que:  $\dim(\mathcal{V}) = \dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

Ejemplos. En  $\mathbf{R}^3$ :

Sean  $P_1, P_2$  planos que pasan por el origen y se cortan en la recta  $R = P_1 \cap P_2$

$$\dim(P_1 + P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 \cap P_2) = 2 + 2 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^3 = P_1 + P_2$$

Sean  $P$  un plano y  $R$  una recta no contenida en él que pasan por el origen

$$\dim(P + R) = \dim(P) + \dim(R) - \dim(P \cap R) = 2 + 1 - 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}^3 = P \oplus R$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers off to the right. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Proposición:

$$\mathcal{V} = U \oplus W \iff \forall v \in \mathcal{V}, \exists! u \in U, \exists! w \in W, v = u + w$$

$$\begin{aligned} v \in \mathcal{V} \wedge v = u + w \wedge v = u' + w' &\implies u + w = u' + w' \implies u - u' = w' - w, \implies u - u' \in U \wedge w' - w \in W \\ &\implies u - u' \in U \cap W \wedge w' - w \in U \cap W \quad U \cap W = \{0\} \implies u - u' = w' - w = 0 \implies u = u' \wedge w' = w \end{aligned}$$

$$v \in U \cap W \implies v = 0 + v \wedge v = v + 0 \implies v = 0 \quad \text{Esto es: } U \cap W \subset \{0\}. \text{ Como } \{0\} \subset U \cap W \text{ tenemos que } U \cap W = \{0\}$$

## Definiciones:

Sean  $V_1, V_2, \dots, V_n \subset \mathcal{V}$  subespacios del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$ , los siguientes conjuntos:

- I.  $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n = \{v \in \mathcal{V} \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, v \in V_i\}$
- II.  $V_1 + V_2 + \dots + V_n = \{v_1 + v_2 + \dots + v_n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, v_i \in V_i\}$

son subespacios vectoriales del  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathcal{V}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Aplicaciones lineales

-  **Aplicaciones lineales**
-  **Núcleo e imagen**
-  **Representación matricial. Cambios de base**
-  **Composición de aplicaciones lineales**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Aplicación lineal entre espacios vectoriales

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ . Diremos que una aplicación  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

$$\text{es una \textbf{aplicación lineal} } \iff \begin{cases} \forall u, v \in \mathcal{V}, f(u + v) = f(u) + f(v) \\ \forall v \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha v) = \alpha f(v) \end{cases}$$

**Ejemplo:**

$$D : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x] \qquad D(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n) = p_1 + 2p_2x + \dots + np_nx^{n-1}$$

(alternativamente puede definirse  $D : \mathbb{K}_m[x] \rightarrow \mathbb{K}[x]$   $D : \mathbb{K}_m[x] \rightarrow \mathbb{K}_m[x]$  o incluso  $D : \mathbb{K}_m[x] \rightarrow \mathbb{K}_{m-1}[x]$ )

**Propiedades:**

I.  $f(0) = 0$

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

III.  $V \subset \mathcal{V}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{V} \implies f(V) \subset \mathcal{W}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{W}$

$$w_1, w_2 \in f(V) \implies \exists v_1, v_2 \in V, f(v_1) = w_1 \wedge f(v_2) = w_2 \implies \begin{cases} w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \wedge v_1 + v_2 \in V \implies w_1 + w_2 \in f(V) \\ \alpha w_1 = \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) \wedge \alpha v_1 \in V \implies \alpha w_1 \in f(V) \end{cases}$$

IV.  $W \subset \mathcal{W}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{W} \implies f^{-1}(W) \subset \mathcal{V}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

$$v_1, v_2 \in f^{-1}(W) \implies f(v_1), f(v_2) \in W \implies \begin{cases} f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in W \implies v_1 + v_2 \in f^{-1}(W) \\ \alpha f(v_1) = f(\alpha v_1) \in W \implies \alpha v_1 \in f^{-1}(W) \end{cases}$$

V.  $\dim(V) = k \implies \dim(f(V)) \leq k$

$$B = \{e_1, \dots, e_k\} \text{ base de } \mathcal{V} \implies \forall v \in \mathcal{V}, v = v_1 e_1 + \dots + v_k e_k \implies f(v) = f(v_1 e_1 + \dots + v_k e_k) = v_1 f(e_1) + \dots + v_k f(e_k) \\ \implies f(v) \in L(\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_k)\}) = f(V) \implies \dim(f(V)) \leq k$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

VI.  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  base de  $\mathcal{V}$  y  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  vectores cualesquiera de  $\mathcal{W} \implies$  existe una única aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

$$f(e_1) = w_1 \wedge f(e_2) = w_2 \wedge \dots \wedge f(e_n) = w_n$$

Sean:  $\begin{cases} u = u_1e_1 + \dots + u_n e_n \in \mathcal{V} \\ v = v_1e_1 + \dots + v_n e_n \in \mathcal{V} \end{cases}$  Definamos  $f$  de modo que  $f(e_1) = w_1 \wedge f(e_2) = w_2 \wedge \dots \wedge f(e_n) = w_n$

Se verificará  $\begin{cases} f(u) = f(u_1e_1 + \dots + u_n e_n) = u_1f(e_1) + \dots + u_nf(e_n) = u_1w_1 + \dots + u_nw_n \\ f(v) = f(v_1e_1 + \dots + v_n e_n) = v_1f(e_1) + \dots + v_nf(e_n) = v_1w_1 + \dots + v_nw_n \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} f(u+v) = f(u_1e_1 + \dots + u_n e_n + v_1e_1 + \dots + v_n e_n) = f((u_1+v_1)e_1 + \dots + (u_n+v_n)e_n) \\ \quad = (u_1+v_1)w_1 + \dots + (u_n+v_n)w_n = u_1w_1 + \dots + u_nw_n + v_1w_1 + \dots + v_nw_n = f(u) + f(v) \quad (f \text{ es lineal}) \\ f(\alpha u) = f(\alpha u_1e_1 + \dots + \alpha u_n e_n) = \alpha u_1w_1 + \dots + \alpha u_nw_n = \alpha(u_1w_1 + \dots + u_nw_n) = \alpha f(u) \end{cases}$$

Supuestas dos aplicaciones lineales  $f, g$  que satisfagan  $f(e_1) = g(e_1) = w_1 \wedge f(e_2) = g(e_2) = w_2 \wedge \dots \wedge f(e_n) = g(e_n) = w_n$

$$f(v) = f(v_1e_1 + \dots + v_n e_n) = v_1f(e_1) + \dots + v_nf(e_n) = v_1w_1 + \dots + v_nw_n = v_1g(e_1) + \dots + v_ng(e_n) = g(v_1e_1 + \dots + v_n e_n) = g(v)$$

VII.  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  ligado  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  ligado

$$\exists \alpha_j \neq 0, \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_jv_j + \dots + \alpha_kv_k = 0 \implies \alpha_1f(v_1) + \dots + \alpha_jf(v_j) + \dots + \alpha_kf(v_k) = f(0) = 0 \wedge \alpha_j \neq 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

IX.  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  libre,  $f$  inyectiva  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  libre

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0 \implies f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = 0 \implies \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

X.  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  base de  $\mathcal{V}$ ,  $f$  sobreyectiva  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  sistema de generadores de  $\mathcal{W}$

$$\forall w \in \mathcal{W}, \exists v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k)$$

XI.  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  base de  $\mathcal{V}$ ,  $f$  biyectiva  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  base de  $\mathcal{W}$

$f$  inyectiva  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  libre

$f$  sobreyectiva  $\implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)\}$  sistema de generadores de  $\mathcal{W}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Sección 2

# Representaciones matriciales de una aplicación lineal

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

Sean  $\dim(\mathcal{V}) = n$ ,  $\dim(\mathcal{W}) = m$ ,  $B_{\mathcal{V}} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $\mathcal{V}$ , y  $B_{\mathcal{W}} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $\mathcal{W}$

$$\begin{cases} f(v_1) \in \mathcal{W} \implies f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) \in \mathcal{W} \implies f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ f(v_n) \in \mathcal{W} \implies f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m \end{cases} \implies f(v) = f(\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n) = \alpha_1f(v_1) + \dots + \alpha_nf(v_n) \quad \text{y sustituyendo}$$

$$f(v) = \alpha_1f(v_1) + \dots + \alpha_nf(v_n) = \alpha_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + \alpha_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = (\alpha_1a_{11} + \dots + \alpha_na_{1n})w_1 + \dots + (\alpha_1a_{m1} + \dots + \alpha_na_{mn})w_m$$

Si denominamos a  $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  matriz de la aplicación lineal  $f$  respecto de las bases  $B_{\mathcal{V}}$  y  $B_{\mathcal{W}}$ :

$$c_{B_{\mathcal{W}}}(f(v)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{Es decir } c_{B_{\mathcal{W}}}(f(v)) = F \cdot c_{B_{\mathcal{V}}}(v)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Toda aplicación lineal entre  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita puede representarse mediante una matriz respecto a dos bases dadas.

Análogamente, dadas dos bases de un par de  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales de dimensión finita,  $n$  y  $m$ , toda matriz de  $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  representa a una única aplicación lineal entre ambos espacios.

Llamando  $\mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  al conjunto de aplicaciones lineales  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  ( $f \in \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $\dim(\mathcal{V}) = n \wedge \dim(\mathcal{W}) = m$ ) podemos definir

$$+ : \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \times \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \quad \forall f, g \in \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \forall x \in \mathcal{V}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \rightarrow \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \quad \forall f \in \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathcal{V}, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Podemos comprobar que efectivamente  $(f + g)$  y  $(\alpha f)$  son aplicaciones lineales y que  $\mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial

Entre los espacios vectoriales  $\mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  y  $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  existe una aplicación (lineal) biyectiva

Se verifica además que  $\dim(\mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) = \dim(\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = m \cdot n$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Cambios de base en aplicaciones lineales:

Consideremos los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ , siendo  $\dim(\mathcal{V}) = n$ ,  $\dim(\mathcal{W}) = m$

Sean  $B_{\mathcal{V}} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $\mathcal{V}$ ,  $B_{\mathcal{W}} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $\mathcal{W}$  y  $F \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  la matriz de  $f$  respecto de ambas

Consideremos otra base de  $\mathcal{V}$ ,  $B'_{\mathcal{V}} = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ , y otra de  $\mathcal{W}$ ,  $B'_{\mathcal{W}} = \{w'_1, \dots, w'_m\}$

Llamemos  $M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}}$  y  $M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}}$  las correspondientes matrices de cambio de base:

- Dado  $v \in \mathcal{V}$  llamemos  $c_v$  a sus coordenadas respecto a  $B_{\mathcal{V}}$  y  $c'_v$  a sus coordenadas respecto a  $B'_{\mathcal{V}}$   $c_v = M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}} \cdot c'_v$
- Siendo  $w = f(v) \in \mathcal{W}$  llamemos  $c_w$  a sus coordenadas respecto a  $B_{\mathcal{W}}$  y  $c'_w$  a sus coordenadas respecto a  $B'_{\mathcal{W}}$   $c_w = M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}} \cdot c'_w$
- La relación entre ambas coordenadas es  $c_w = F \cdot c_v$

Podemos escribir  $M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}} \cdot c'_w = F \cdot M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}} \cdot c'_v \iff c'_w = (M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}})^{-1} \cdot F \cdot M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}} \cdot c'_v$

Si denominamos  $F'$  la matriz de  $f$  respecto de las bases  $B'_{\mathcal{V}}$  y  $B'_{\mathcal{W}}$ , se verificará  $c'_w = F' \cdot c'_v$  y por tanto:

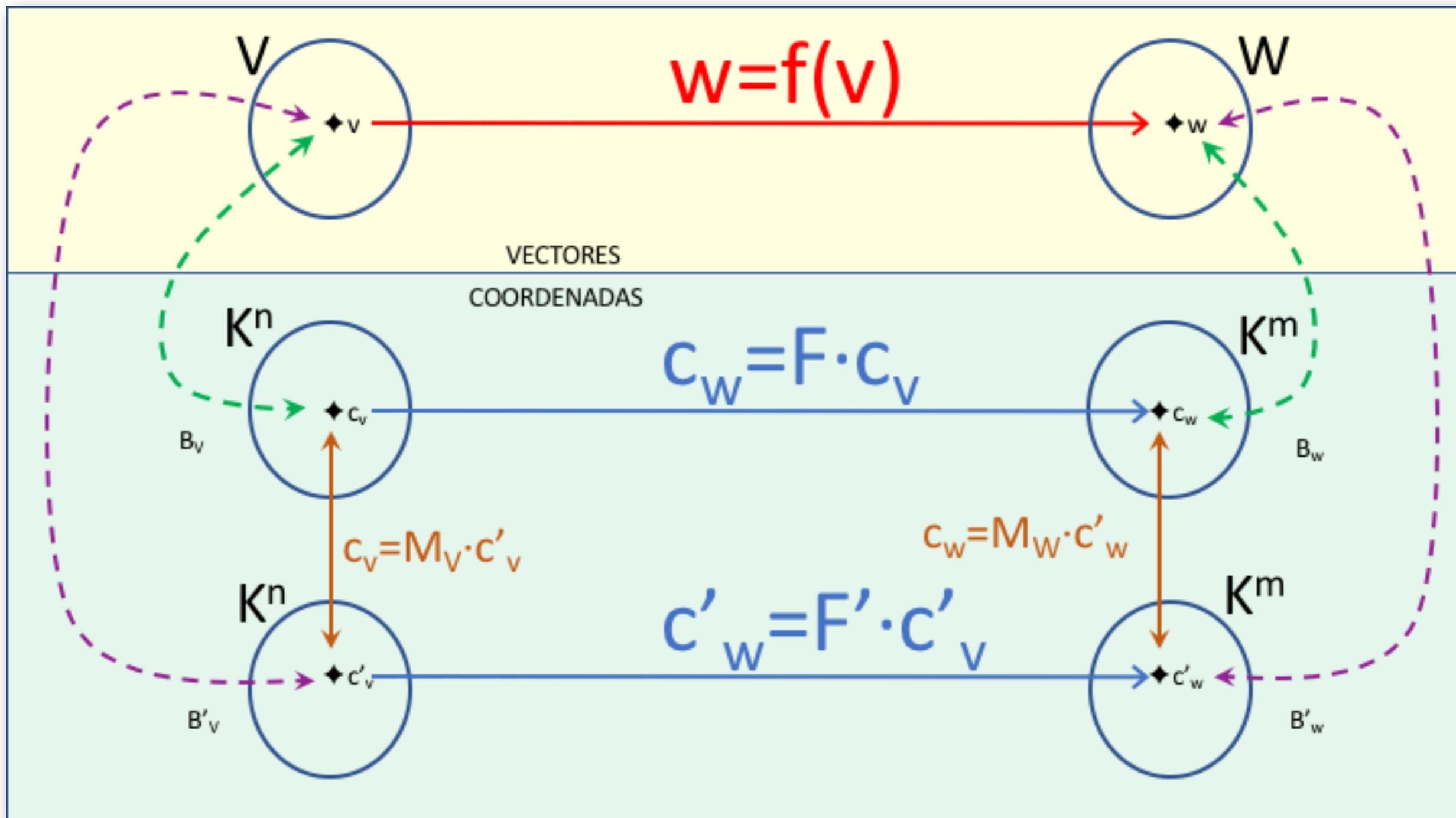
$$F' = (M_{B_{\mathcal{W}}}^{B'_{\mathcal{W}}})^{-1} \cdot F \cdot M_{B_{\mathcal{V}}}^{B'_{\mathcal{V}}}$$

The logo for Cartagena99 features the text "Cartagena99" in a stylized, teal-colored font. The "99" is significantly larger and more prominent than "Cartagena". The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

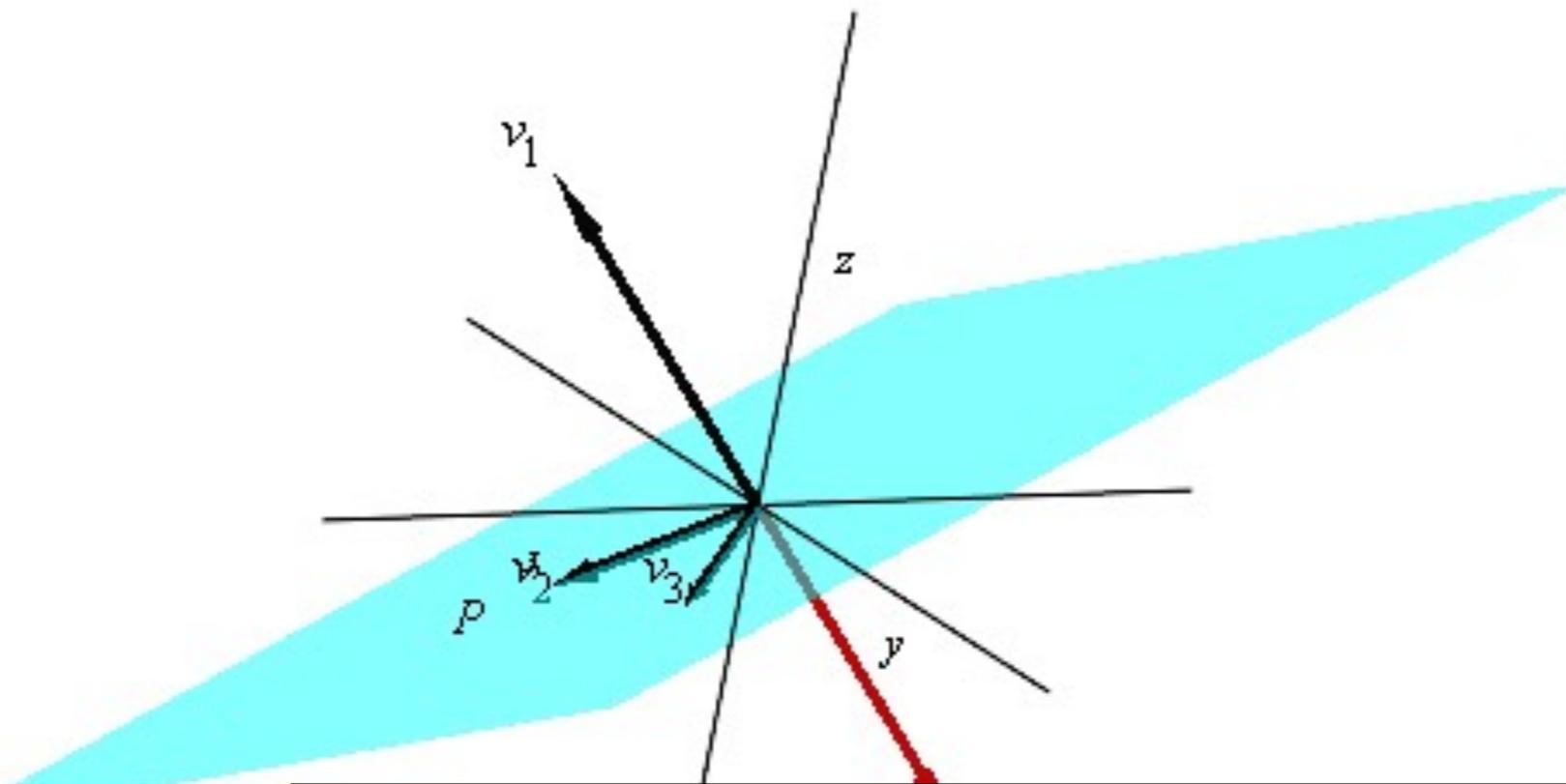
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### Ejemplo:

Considere la (aplicación lineal de) simetría respecto al plano  $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$

Encontremos la matriz de esta aplicación lineal respecto de la base canónica (tanto en el dominio como en el codominio)

Una base de  $\mathbf{R}^3$  para la que es sencillo encontrar las imágenes de sus vectores es  $B' = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -1, 2), (1, -1, -1), (2, 2, 0)\}$



# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$f(v_1) = -v_1 = (-1, 1, -2) \quad f(v_2) = v_2 = (1, -1, -1) \quad f(v_3) = v_3 = (2, 2, 0)$$

La matriz de  $f$  respecto de esta base  $B'$  está formada por las coordenadas (columnas) de  $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$  respecto de esta base:

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 = (-1)v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{cases} \implies F' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base, de la base canónica  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  a la base  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ , está formada por las coordenadas (columnas) de  $v_1, v_2, v_3$  respecto de la base canónica

$$\begin{cases} v_1 = (1, -1, 2) = 1e_1 + (-1)e_2 + 2e_3 \\ v_2 = (1, -1, -1) = 1e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3 \\ v_3 = (2, 2, 0) = 2e_1 + 2e_2 + 0e_3 \end{cases} \implies M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La relación entre la matriz pedida  $F$  y las obtenidas arriba es  $F' = (M_B^{B'})^{-1} \cdot F \cdot M_B^{B'}$  lo que puede escribirse:

$$F = M_B^{B'} \cdot F' \cdot (M_B^{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por tanto, respecto de la base canónica:



( 2 1 2 1 2 2 2 2 1 )

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

**Núcleo** de  $f$ :  $N(f) = \ker(f) = \{v \in \mathcal{V} \mid f(v) = 0\}$

Propiedades:

I.  $0 \in \ker(f)$  ( $\ker(f) \neq \emptyset$ )

$$f(0) = 0 \implies 0 \in \ker(f)$$

II.  $\ker(f) \subset \mathcal{V}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

$$v, w \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \wedge f(w) = 0 \implies f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0 \implies v + w \in \ker(f)$$

$$v \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \implies f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha 0 = 0 \implies \alpha v \in \ker(f)$$

III.  $f$  es inyectiva  $\iff \ker(f) = \{0\}$

$$f(0) = 0 \wedge f \text{ inyectiva} \wedge v \in \ker(f) \implies f(v) = 0 \implies v = 0 \implies \ker(f) = \{0\}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Ejemplo:** Encontrar el núcleo de la aplicación lineal  $t : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , cuya matriz (respecto la b.c.) es  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Se trata de encontrar los vectores  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$  tales que  $t(v) = 0$ , es decir:

$$T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema homogéneo de 3 ecuaciones y 5 incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = -v_3 - 2v_4 = -\lambda - 2\mu \\ v_2 = v_4 - v_5 = \mu - \gamma \\ v_3 = \lambda \\ v_4 = \mu \\ v_5 = \gamma \end{cases} \implies \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2\mu \\ \mu - \gamma \\ \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\mu \\ \mu \\ 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(t) = L(\{(1,0,1,0,0), (-2,1,0,1,0), (0, -1,0,0,1)\})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

**Imagen de  $f$ :**  $\text{img}(f) = f(\mathcal{V}) = \{w \in \mathcal{W} \mid \exists v \in \mathcal{V}, f(v) = w\}$

Propiedades:

I.  $0 \in \text{img}(f)$  ( $\text{img}(f) \neq \emptyset$ )

$$f(0) = 0 \implies 0 \in \text{img}(f)$$

II.  $\text{img}(f) \subset \mathcal{W}$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{W}$

$\text{img}(f) = f(\mathcal{V})$  por ser la imagen de un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

III.  $f$  es sobreyectiva  $\iff \text{img}(f) = \mathcal{W}$

IV.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $\mathcal{V} \implies \{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$  es sistema de generadores de  $\text{img}(f)$

$$w \in \text{img}(f) \implies \exists v \in \mathcal{V}, v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \wedge w = f(v) \implies w = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

$$\implies w \in L(\{f(v_1), \dots, f(v_n)\})$$

Corolario:  $\dim(\text{img}(f)) \leq \dim(\mathcal{V})$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Ejemplo:** Encontrar la imagen de la aplicación lineal  $t : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$ , cuya matriz (respecto la b.c.) es  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Se trata de encontrar los vectores  $w = (w_1, w_2, w_3)$  tales que  $\exists v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5), t(v) = w$ , es decir:

$$w = T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + v_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{img}(t) = L(\{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (1, -1,2), (1,1,0)\}) = \text{col}(T)$$

$$\text{img}(t) = L(\{(1,0,1), (1,1,0)\})$$

Recuérdese que  $r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$  y que sus dos primeras columnas son l.i.

$$\dim(\text{img}(t)) = r(T) = \dim(\text{col}(T)) = 2$$

Podemos expresar  $\text{img}(t)$  mediante un sistema de ecuaciones:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Teorema:** Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ , con  $\dim(\mathcal{V}) = n$ , y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{img}(f)) = \dim(\mathcal{V})$$

Sea  $k = \dim(\ker(f))$ ,  $k \leq n$  Elijamos una base de  $\ker(f)$ ,  $B_K = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

Completémosla con  $n - k$  vectores hasta obtener una base de  $\mathcal{V}$ ,  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Consideremos  $B = \{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$

$$\begin{aligned} w \in \text{img}(f) &\implies \exists v \in \mathcal{V}, v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n, w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) \implies w \in L(B) \end{aligned}$$

(es decir,  $B$  es sistema de generadores de  $\text{img}(f)$ )

Además, si  $\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) = 0 \implies f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0 \implies \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker(f)$

$$\implies \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \implies \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \dots - \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

(es decir,  $B$  es libre)

Por tanto  $B$  es base de  $\text{img}(f)$  y  $\dim(\text{img}(f)) = n - k = \dim(\mathcal{V}) - \dim(\ker(f))$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Corolarios:

- I.  $\dim(\text{img}(f)) \leq \dim(\mathcal{V}) \quad \dim(\text{ker}(f)) \leq \dim(\mathcal{V})$
- II.  $f$  inyectiva  $\iff \dim \mathcal{V} = r(f) = \dim(\text{img}(f))$
- III.  $f$  inyectiva  $\implies \dim(\mathcal{V}) = \dim(\text{img}(f)) \leq \dim(\mathcal{W})$
- IV.  $f$  sobreyectiva  $\implies \dim(\mathcal{W}) = \dim(\text{img}(f)) \leq \dim(\mathcal{V})$
- V.  $f$  biyectiva  $\implies \dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W})$

### Corolario:

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$ , con  $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) = n$ , y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ . Son equivalentes:

- (a)  $f$  inyectiva
- (b)  $f$  sobreyectiva
- (c)  $f$  biyectiva
- (d)  $\text{ker}(f) = \{0\}$
- (e)  $r(f) = n$

$$(c) \implies (a) \iff (d)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena" in a large, stylized, teal-colored font with a slight shadow effect. To its right, the number "99" is written in a smaller, bold, black font. The entire logo is set against a light blue and orange gradient background.

## Notas (nomenclatura):

Sean los  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  y la aplicación lineal  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$

- Se dice que  $f$  es un **homomorfismo**
- Si  $f$  es **inyectiva** se dice que es un **monomorfismo**
- Si  $f$  es **sobreyectiva** se dice que es un **epimorfismo**
- Si  $f$  es **biyectiva** se dice que es un **isomorfismo**
- Si  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$  se dice que  $f$  es un **endomorfismo**
- Si  $\mathcal{V} = \mathcal{W}$  y  $f$  es **biyectiva** se dice que es un **automorfismo**

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, cloud-like background that tapers off to the right. Below the text, there is a horizontal orange brushstroke that also tapers off to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Composición de aplicaciones lineales

Composición:

Siendo  $f \in \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $g \in \mathbb{L}(\mathcal{W}, \mathcal{X})$ , la composición de ambas es  $h = g \circ f \in \mathbb{L}(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ ,  $\forall v \in \mathcal{V}, h(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v))$

Podemos comprobar que efectivamente  $g \circ f$  es una aplicación lineal:

- I.  $\forall x, y \in \mathcal{V}, (g \circ f)(x + y) = g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$
- II.  $\forall x \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{K} (g \circ f)(\alpha x) = g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)) = \alpha (g \circ f)(x)$

y que siendo  $F$  y  $G$  las matrices de  $f$  y  $g$ , respecto de bases fijadas de antemano, la matriz de  $h = g \circ f$  es:

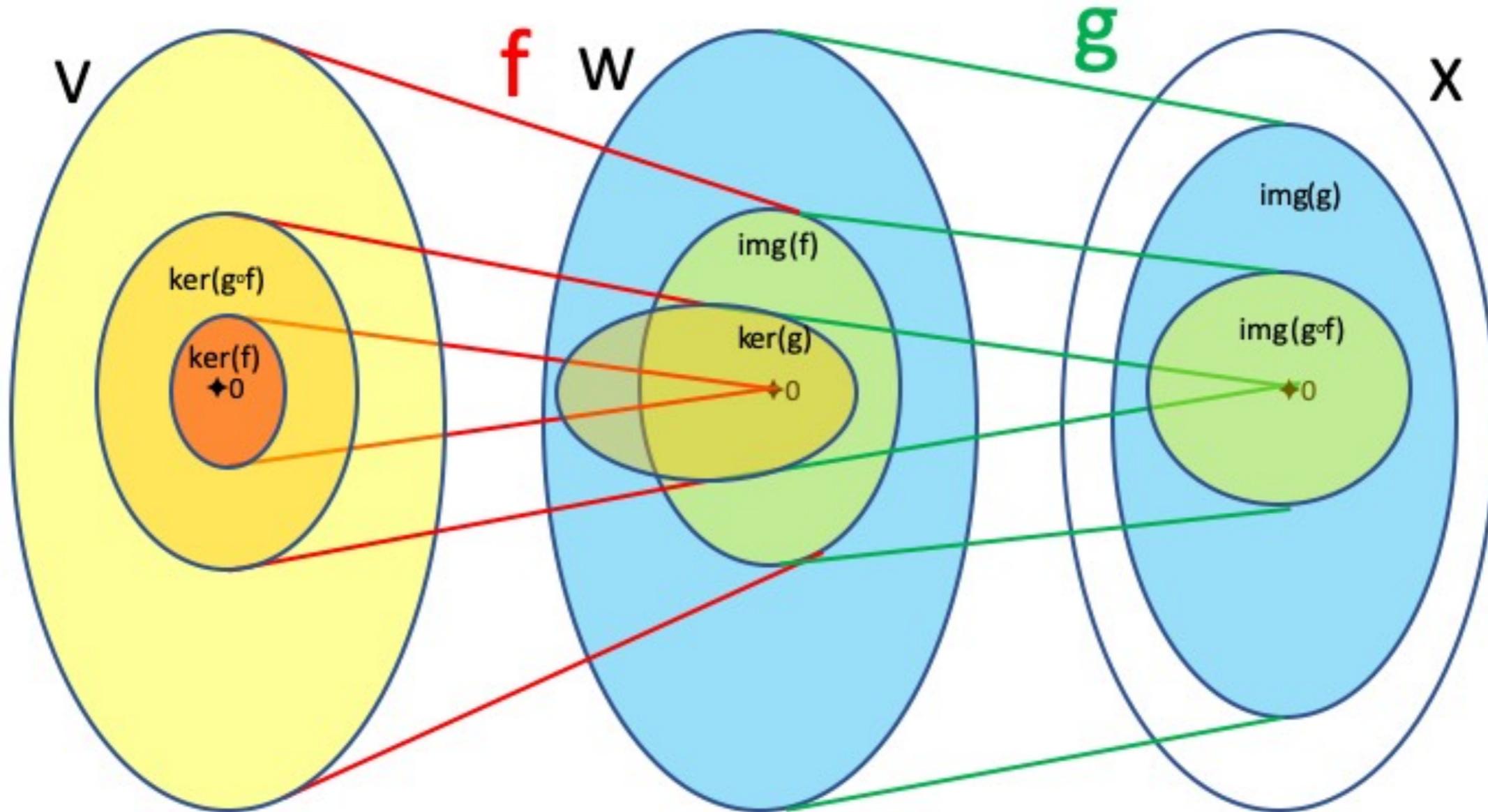
$$H = G \cdot F$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{img}(f)) = \dim(\mathcal{V})$$

$$\dim(\ker(g)) + \dim(\text{img}(g)) = \dim(\mathcal{W})$$

$$\dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\text{img}(g \circ f)) = \dim(\mathcal{V})$$

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Producto escalar y ortogonalidad

-  **Espacios euclídeos**
-  **Ortogonalidad**
-  **Ortogonalización. Método de Gram-Schmidt**
-  **Proyecciones ortogonales.**
-  **Ejemplo: Series de Fourier**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Productos escalares. Espacios euclídeos

Sea  $\mathcal{V}$  un  $\mathbf{R} - e.v.$  ( $\mathbf{C} - e.v.$ )

Diremos que la aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{C}$ ) es un **producto escalar** (**producto hermítico**) sobre  $\mathcal{V}$  si verifica las siguientes propiedades:

- I.  $\forall u, v \in \mathcal{V}$   $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  ( $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ )
- II.  $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall u, v \in \mathcal{V}$   $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$  ( $\forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall u, v \in \mathcal{V}$ )
- III.  $\forall u, v, w \in \mathcal{V}$   $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- IV.  $\forall u \in \mathcal{V}$   $u \neq 0 \implies \langle u, u \rangle > 0$

Diremos también que  $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un **Espacio euclídeo** (**Espacio hermítico**)



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## PROPIEDADES

$$\text{V. } \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall u, v \in \mathcal{V} \quad \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad (\forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall u, v \in \mathcal{V}, \langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle)$$

$$\text{VI. } \forall u, v, w \in \mathcal{V} \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\text{VII. } \forall u \in \mathcal{V} \quad \langle 0, u \rangle = 0$$

$$\text{VIII. } \forall u \in \mathcal{V} \quad u = 0 \iff \langle u, u \rangle = 0$$

$$\text{IX. } \left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^m b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \langle u_i, v_j \rangle = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \dots & \langle u_1, v_m \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \dots & \langle u_2, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, v_1 \rangle & \dots & \langle u_n, v_m \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, \sum_{j=1}^m b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \bar{b}_j \langle u_i, v_j \rangle = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \cdot \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \dots & \langle u_1, v_m \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \dots & \langle u_2, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, v_1 \rangle & \dots & \langle u_n, v_m \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## EXPRESIÓN ANALÍTICA (MATRIZ DE GRAM)

En espacios  $\mathcal{V}$  de dimensión finita, sean:

una base de  $\mathcal{V}$ ,  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  y dos vectores  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  y  $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \cdot \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \bar{v}_j \langle e_i, e_j \rangle = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \cdot \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

El producto escalar o hermitico de dos vectores se puede escribir en función de sus coordenadas y de la matriz de Gram de la base empleada:

$$\langle u, v \rangle = u^T \cdot G \cdot v$$

$$\langle u, v \rangle = u^T \cdot G \cdot \bar{v}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue and white background with a subtle wave-like pattern.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## EJEMPLOS

En  $\mathbf{R}^n$

$$\langle u, v \rangle = \langle (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n), (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

En  $\mathbf{C}^n$

$$\langle u, v \rangle = \langle (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n), (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \dots + u_n \bar{v}_n = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

$$\text{En } C([a, b]; \mathbf{R}) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b fg = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

$$\text{En } C([a, b]; \mathbf{C}) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## NORMA

Sea  $\mathcal{V}$  un  $\mathbf{R} - e.v.$  o un  $\mathbf{C} - e.v.$

Llamando  $\mathbb{K}$  al cuerpo, diremos que la aplicación  $\| \cdot \| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una **norma** sobre  $\mathcal{V}$  si verifica las siguientes propiedades:

- I.  $\forall u \in \mathcal{V} \quad \|u\| \geq 0$
- II.  $\forall u \in \mathcal{V} \quad u = 0 \iff \|u\| = 0$
- III.  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathcal{V} \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$
- IV.  $\forall u, v \in \mathcal{V} \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (desigualdad triangular)

Toda norma permite definir una distancia  $d : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}$  de modo que  $\forall u, v \in \mathcal{V}, d(u, v) = \|u - v\|$

Propiedades:

$$\forall u, v, w \in \mathcal{V} \quad \text{I. } d(u, v) \geq 0 \quad \text{II. } d(u, v) = 0 \iff u = v \quad \text{III. } d(u, v) = d(v, u) \quad \text{IV. } d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

## NORMA INDUCIDA

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

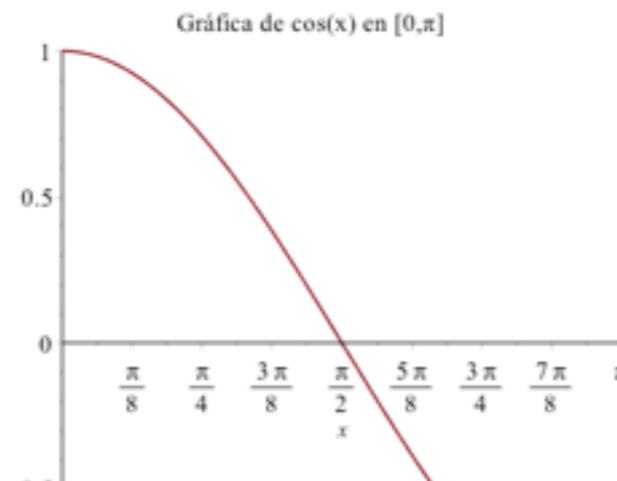
que cumple además la siguiente propiedad (desigualdad de Schwarz):

$$\forall u, v \in \mathcal{V} \quad | \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad ( | \langle u, v \rangle |^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle )$$

En el caso de espacios euclídeos, puede escribirse:

$$\forall u, v \in \mathcal{V} \quad u, v \neq 0 \implies -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$$

lo que permite definir el ángulo entre  $u$  y  $v$  ( $\angle_{u,v} \in [0, \pi]$ ):



# Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Sección 2

# Ortogonalidad entre vectores y subespacios

En Geometría decimos que dos vectores son perpendiculares si el ángulo entre ellos es recto

Se verifica que  $\forall u, v \in \mathcal{V} \quad u, v \neq 0 \wedge \angle_{u,v} = \frac{\pi}{2} \implies \langle u, v \rangle = 0$

Generalizando este concepto, definimos, en espacios euclídeos y hermíticos:

Dos vectores  $u, v \in \mathcal{V}$  son ortogonales  $\iff \langle u, v \rangle = 0$

Propiedades:

- I. 0 es ortogonal a todos los vectores  $\forall u \in \mathcal{V} \quad \langle 0, u \rangle = 0$
- II. Solamente 0 es ortogonal a sí mismo  $\langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0$

III. En un espacio euclídeo, si dos vectores son ortogonales, o bien uno es nulo o bien forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio euclídeo o hermítico. Considerando los conjuntos  $V, W \subset \mathcal{V}$  y el vector  $u \in \mathcal{V}$  definimos:

$$u \text{ es ortogonal a } V \iff \forall v \in V, \langle u, v \rangle = 0$$

$$V \text{ es ortogonal a } W \iff \forall v \in V, \forall w \in W, \langle v, w \rangle = 0$$

En el caso de que  $V, W \subset \mathcal{V}$  sean subespacios vectoriales de  $\mathcal{V}$ , con bases  $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  respectivamente, se verifica:

$$u \text{ es ortogonal a } V \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle u, v_i \rangle = 0$$

$$V \text{ es ortogonal a } W \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \langle v_i, w_j \rangle = 0$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, brush-stroke-like underline that extends to the right.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## SISTEMAS ORTOGONALES

Un conjunto finito o numerable de vectores  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  es un **sistema ortogonal** de vectores si

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \implies \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Propiedades:

I.  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  sistema ortogonal  $\wedge 0 \notin S \implies S$  es libre

II.  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  sistema ortogonal  $\implies \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$  (teorema generalizado de Pitágoras)

Llamamos **sistema ortonormal** de vectores a un sistema ortogonal de vectores que además verifique:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \|u_i\| = 1$$

Propiedad:

I. A partir de todo sistema ortogonal de vectores que no incluya a 0 podemos construir uno ortonormal

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### Sección 3

# Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  un conjunto **libre**, finito o numerable de vectores de  $\mathcal{V}$

Llamemos  $L_k = L(\{u_1, u_2, \dots, u_k\})$  al subespacio generado por los  $k$  primeros vectores de  $S$

Construyamos el conjunto  $T = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  de manera que:

$$\bullet e_1 = u_1$$

$$\bullet e_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

$$\bullet e_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle u_3, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$$

$$\bullet e_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

se verifica que:

$$\text{I. } L_k = L(\{u_1, u_2, \dots, u_k\}) = L(\{e_1, e_2, \dots, e_k\}) = L'_k$$

$$\text{II. } e_{k+1} \text{ es ortogonal a } L_k$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(Se verá después que  $e_k = u_k - P_{L_{k-1}}^\perp(u_k)$ , siendo  $P_{L_k}^\perp(v)$  la proyección ortogonal de  $v$  sobre el subespacio  $L_k$ )

## BASES ORTOGONALES

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio euclídeo o hermítico de dimensión finita  $n$

Sea  $B_{\mathcal{V}} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  una base de  $\mathcal{V}$  ( $\mathcal{V} = L(\{u_1, u_2, \dots, u_n\}) = L_n$ )

Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt obtenemos  $B_{\mathcal{V}_N} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , sistema ortogonal (y libre) de vectores, con  $L'_n = L(\{e_1, e_2, \dots, e_n\}) = L_n = \mathcal{V}$

$\implies B_{\mathcal{V}_N}$  es base (ortogonal) de  $\mathcal{V}$

(en todo espacio euclídeo o hermítico de dimensión finita existen bases ortogonales)

La matriz del cambio de base de  $B_{\mathcal{V}_N} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a  $B_{\mathcal{V}} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\langle u_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} & \dots & \frac{\langle u_{n-1}, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} & \frac{\langle u_n, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{\langle u_{n-1}, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} & \frac{\langle u_n, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

...

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## PRODUCTO ESCALAR EN BASES ORTOGONALES

Sea  $B_{\mathcal{V}} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{V}$  (espacio euclídeo / **hermítico**)

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \mathcal{V} \quad v = \sum_{j=1}^n v_j e_j \in \mathcal{V}$$

Se verifica:

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \bar{v}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

Es decir:

$$\langle u, v \rangle = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

(La matriz de Gram para bases ortonormales es la identidad)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



## COORDENADAS EN BASES ORTOGONALES

Sea  $B_{\mathcal{V}} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base ortogonal / **ortonormal** de  $\mathcal{V}$  y  $u, v \in \mathcal{V}$

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad \Rightarrow \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \langle u, e_j \rangle = u_j \langle e_j, e_j \rangle \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \langle u, e_j \rangle = u_j$$

Luego:

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \qquad u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i \quad (\dagger)$$

Se verifica:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \quad (\dagger)$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{\langle e_i, e_i \rangle} \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle} \quad (\dagger)$$

Y por tanto:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2 \quad (\dagger)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2 \qquad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2 \quad (\dagger)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

# Proyecciones ortogonales

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio euclídeo / **hermítico** de dimensión finita y  $U \subset \mathcal{V}$  un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

Llamamos **subespacio ortogonal (complemento ortogonal)** de  $U$

$$U^\perp = \{w \in \mathcal{V} / \forall u \in U, \langle w, u \rangle = 0\}$$

Propiedades:

I.  $U^\perp$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

II.  $U \cap U^\perp = \{0\}$

III.  $\mathcal{V} = U \oplus U^\perp$  (y  $\dim(\mathcal{V}) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$ )

IV.  $\forall v \in \mathcal{V}, \exists! u \in U, \exists! u^\perp \in U^\perp, v = u + u^\perp$  A  $u \in U$  le llamamos **proyección ortogonal** de  $v$  sobre  $U$

(y  $u^\perp \in U^\perp$  es la **proyección ortogonal** de  $v$  sobre  $U^\perp$ )

V.  $(U^\perp)^\perp = U$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## CÁLCULO DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL

Dada una base del subespacio  $U \subset \mathcal{V}$ ,  $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , la proyección ortogonal sobre  $U$  de  $v \in \mathcal{V}$  será

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

Como  $v - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in U^\perp$  ha de ser ortogonal a  $U$ , se verifica:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \langle v - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, u_j \rangle = 0 \quad (\text{sistema de } n \text{ ecuaciones y } n \text{ incógnitas } \alpha_j)$$

Si la base del subespacio  $U \subset \mathcal{V}$ ,  $B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , es ortogonal / **ortonormal**, para cualquier  $v \in \mathcal{V}$  su proyección ortogonal sobre  $U$  es:

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i \qquad u = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

Podemos definir la aplicación  $p_U^\perp : \mathcal{V} \longrightarrow U$  que asigne a cada  $v \in \mathcal{V}$  su proyección ortogonal  $u$

Propiedades:

I.  $p_U^\perp$  es lineal

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## MEJOR APROXIMACIÓN

Siendo  $p_U^\perp(v)$  la proyección ortogonal sobre  $U$  de  $v \in \mathcal{V}$  se verifica

$$\forall w \in U, \|v - p_U^\perp(v)\| \leq \|v - w\|$$

siendo por tanto  $p_U^\perp(v)$  el elemento de  $U$  más cercano a  $v$  de todos los  $w$  de  $U$   
( $p_U^\perp(v)$  es la mejor aproximación a  $v$  en  $U$ )

Propiedades:

I.  $\|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v - u\|^2$  ( $\|v\|^2 = \|p_U^\perp(v)\|^2 + \|p_{U^\perp}^\perp(v)\|^2$ )

II. Siendo  $B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base **ortogonal** de  $U$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|v\|^2 \quad (\dagger) \qquad v \in U \implies \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} = \|v\|^2 \quad (\ddagger)$$

III. Siendo  $B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base **ortonormal** de  $U$

$$\sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\dagger) \qquad v \in U \implies \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2 \quad (\ddagger)$$

(†) Primera desigualdad de Bessel

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Ejemplo: Series de Fourier

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio euclídeo / hermítico de dimensión no finita

El sistema  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} \subset \mathcal{V}$  es **libre**  $\iff \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es **libre**

El sistema  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} \subset \mathcal{V}$  es **ligado**  $\iff \exists n \in \mathbb{N}, S_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es **ligado**

Encontraremos ejemplos de espacios de dimensión no finita en los **espacios funcionales**

- $C([a, b]; \mathbb{K})$  de las funciones reales o complejas de variable real continuas
- $CT([a, b]; \mathbb{K})$  de las funciones reales o complejas de variable real continuas a trozos
- $R_2([a, b]; \mathbb{K})$  de las funciones reales o complejas de variable real, continuas a trozos en  $(a, b)$  y de cuadrado integrable<sup>†</sup> en  $[a, b]$

Caso  $\mathbb{K} = \mathbf{R}$        $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$       Producto escalar       $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg = \int_a^b f(x)g(x) dx$

Caso  $\mathbb{K} = \mathbf{C}$        $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$       Producto hermítico       $\langle f, g \rangle = \int_a^b f\bar{g} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$

En los casos  $CT([a, b]; \mathbb{K})$  y  $R_2([a, b]; \mathbb{K})$  es necesario considerar como iguales funciones que lo son en casi todo punto (pero no



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

• a

J a

J a

## PROYECCIÓN ORTOGONAL

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio euclídeo / **hermítico** de dimensión no finita y  $U \subset \mathcal{V}$  un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$

Llamamos **subespacio ortogonal**<sup>†</sup> de  $U$

$$U^\perp = \{w \in \mathcal{V} / \forall u \in U, \langle w, u \rangle = 0\}$$

Propiedades:

- I.  $U^\perp$  es subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$
- II.  $U \subset (U^\perp)^\perp$
- III.  $U \cap U^\perp = \{0\}$
- IV. No tiene porqué existir la proyección ortogonal de un vector  $v \in \mathcal{V}$  sobre  $U$
- V. Si  $U$  es de dimensión finita, con base  $B_U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortogonal / **ortonormal**, sí está garantizada la existencia de la proyección ortogonal  $\forall v \in \mathcal{V}$

$$p_U^\perp(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$p_U^\perp(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text is a horizontal orange brushstroke.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## MEJOR APROXIMACIÓN

Sea  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  un **sistema ortogonal / ortonormal** del espacio euclídeo / hermítico  $\mathcal{V}$

Consideremos  $v \in \mathcal{V}$  y los subespacios  $U_n = L(\{e_1, e_2, \dots, e_n\})$

En cada uno de ellos, la mejor aproximación es  $p_{U_n}^\perp(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$   $p_{U_n}^\perp(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$  verificándose:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|v\|^2 \qquad \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

considerando  $m > n$  ( $U_m \supset U_n$ ) se verifica: (suma de términos no negativos acotada)

$$\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \sum_{i=1}^m \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|v\|^2 \qquad \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

El (cuadrado del) error cometido es, en cada caso:

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^m \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \qquad \|v\|^2 - \sum_{i=1}^m |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Llamando: 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$

Se verifica: 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \leq \|v\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\text{desigualdad de Bessel})$$

y 
$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\langle v, e_i \rangle|}{\|e_i\|} = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\langle v, e_i \rangle| = 0$$

El (cuadrado del) error en norma cometido con la sucesión de mejores aproximaciones converge a:

$$\|v\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} \qquad \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i \rangle|^2$$

### SERIE DE FOURIER

$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  un **sistema ortogonal /ortonormal** del espacio euclídeo / hermítico  $\mathcal{V}$

Definimos **Serie de Fourier** asociada a cada  $v \in \mathcal{V}$

$$v \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$v \sim \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle e_i$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## PERIODICIDAD

Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{K}$  se dice **periódica** de período  $T$  si verifica  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x + T)$

Propiedad:  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódica de período  $T \implies \forall x \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}, f(x) = f(x + kT)$

(es también periódica de período  $kT$ )

Llamamos período fundamental  $T_0$  al menor  $T > 0$  que verifique  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = f(x + T)$

Llamamos *frecuencia de  $f$*  a  $\nu = \frac{1}{T_0}$ , y *pulsación de  $f$*  a  $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$

Propiedad:  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódica de período  $T \implies \forall \alpha \in \mathbf{R}, \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

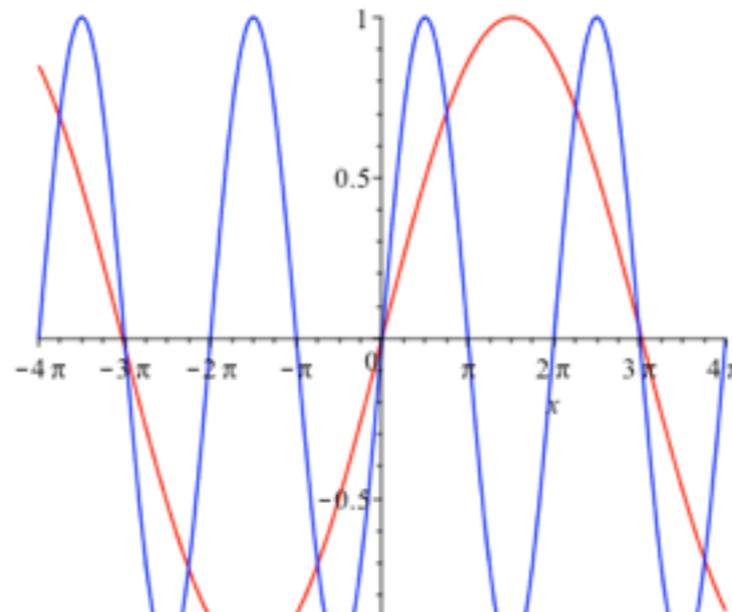
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$e^{j0x} = 1 \text{ (cualquier período)} \quad k \neq 0 \implies e^{jk(x+\frac{2\pi}{k})} = e^{jkx} e^{2\pi j} = e^{jkx} \quad (T_0 = \frac{2\pi}{k})$$

Si realizamos el cambio de variables  $x = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$  obtenemos las funciones periódicas

$$\sin \omega t, \cos \omega t \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad \sin n\omega t, \cos n\omega t \quad \left(T_0 = \frac{2\pi}{n\omega}\right)$$

$$k \neq 0 \implies e^{jk\omega(t+\frac{2\pi}{k\omega})} = e^{jk\omega t} e^{2\pi j} = e^{jk\omega t} \quad (T_0 = \frac{2\pi}{k\omega})$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

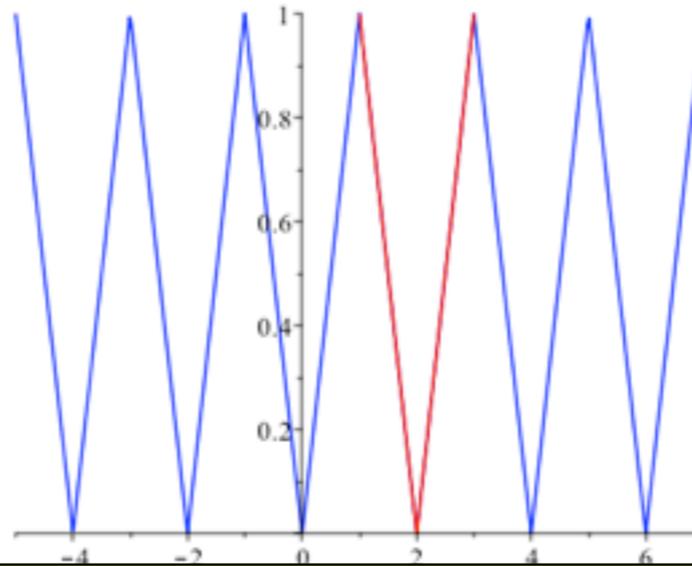
Cartagena99

## EXTENSIÓN PERIÓDICA

Dada función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $f(a) = f(b)$ , definimos su **extensión periódica** de período  $T = b - a$ , a la función

$$\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{K} \text{ que } \forall x \in \mathbf{R}, \tilde{f}(x) = f\left(x - \left\lfloor \frac{x - a}{T} \right\rfloor T\right)$$

que es periódica de período  $T = b - a$  y verifica  $\forall x \in [a, b], \tilde{f}(x) = f(x)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

En espacios reales en  $[-\pi, \pi]$ , el sistema trigonométrico  $\{1, \sin nx, \cos nx\}_{n \in \mathbf{N}}$  es ortogonal

Para comprobarlo, emplearemos las siguientes relaciones trigonométricas

$$\left. \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \right\} \implies \sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \right\} \implies \begin{cases} \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{cases}$$

$$\text{Y que } \forall k \in \mathbf{Z} - \{0\}, \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$$

Consideraremos los productos escalares entre todos los pares de vectores

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad \langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$\langle \sin nx, \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) dx = 0$$

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle wave-like pattern. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Las normas son:

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}$$

$$\langle \sin nx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi$$

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$$

$$\langle \cos nx, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi$$

$$\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$$

Por tanto el sistema  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortonormal

En espacios reales de funciones definidas en el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], [0, T]$  (o en general  $[\alpha, \alpha + T]$ )

y llamando  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , el sistema  $\{1, \sin n\omega t, \cos n\omega t\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortogonal



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Las normas son:

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = T$$

$$\|1\| = \sqrt{T}$$

$$\langle \sin n\omega t, \sin n\omega t \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 n\omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos 2n\omega t}{2} dt = \frac{T}{2}$$

$$\|\sin n\omega t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\langle \cos n\omega t, \cos n\omega t \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 n\omega t dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos 2n\omega t}{2} dt = \frac{T}{2}$$

$$\|\cos n\omega t\| = \sqrt{\frac{T}{2}}$$

## SERIE DE FOURIER TRIGONÓMETRICA

Dado  $f \in \mathbb{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbf{R})$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Siendo:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin nx \rangle}{\langle \sin nx, \sin nx \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

La identidad de Parseval queda:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Ya que  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_i \rangle|^2}{\langle e_i, e_i \rangle} = \|v\|^2 \iff (2\pi \frac{a_0}{2})^2 \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi a_n)^2}{\pi} + \frac{(\pi b_n)^2}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

Dado  $f \in \mathbb{L}^2([\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R})$

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \quad (\text{identidad de Parseval})$$

## SISTEMA DE EXPONENCIALES COMPLEJAS

En espacios complejos en  $[-\pi, \pi]$ , el sistema de exponenciales complejas  $\{e^{jkx}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  es ortogonal

Consideraremos los productos hermíticos entre todos los pares de vectores

$$\langle e^{jkx}, e^{jl x} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} \overline{e^{jl x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} e^{-jl x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-l)x} dx = \left[ \frac{1}{j(k-l)} e^{j(k-l)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (k \neq l)$$

Las normas son:

$$\langle e^{jkx}, e^{jkx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} \overline{e^{jkx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} e^{-jkx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \|e^{jkx}\| = \sqrt{2\pi}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

En espacios complejos de funciones definidas en el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], [0, T]$  (o en general  $[\alpha, \alpha + T]$ )

y llamando  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , el sistema  $\{e^{jk\omega t}\}_{k \in \mathbf{Z}}$  es ortogonal

$$\langle e^{jk\omega t}, e^{jl\omega t} \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t} \overline{e^{jl\omega t}} dt = \frac{1}{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkx} \overline{e^{jlx}} dx = 0 \quad (k \neq l)$$

(realizando el cambio  $x = \omega t, dx = \omega dt$ )

Puede comprobarse que en los demás productos escalares el resultado es similar

Las normas son

$$\langle e^{jk\omega t}, e^{jk\omega t} \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t} \overline{e^{jk\omega t}} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{jk\omega t} e^{-jk\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = T \quad \forall k \in \mathbf{Z}, \|e^{j\omega t}\| = \sqrt{T}$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white, cloud-like shape behind it. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$\text{(en } f \in \mathbb{L}^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R}), f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t)$$

$$f \text{ es impar} \implies \begin{cases} a_n = 0 & \forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx & \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\text{(en } f \in \mathbb{L}^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]; \mathbf{R}), f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Análisis espectral: autovalores, autovectores

-  **Autovalores y autovectores de un endomorfismo**
-  **Subespacios propios**
-  **Diagonalización de endomorfismos y matrices**

**Cartagena99**

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Autovalores y autovectores de un endomorfismo

Sean  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. y  $f$  la aplicación lineal (endomorfismo)  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

El subespacio vectorial  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$  se dice **invariante** respecto de  $f$  si  $f(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$  (es decir,  $v \in \mathcal{W} \implies f(v) \in \mathcal{W}$ )

## Ejemplos:

$\{0\}$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $\ker(f)$  e  $\text{img}(f)$  son subespacios invariantes de cualquier endomorfismo  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

Si  $r : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  representa una rotación de ángulo  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2\pi$ ) en  $\mathbf{R}^3$  con respecto al eje  $Z$ , son invariantes el plano  $XY$  y el eje  $Z$

Si  $p : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  representa la proyección ortogonal de  $\mathbf{R}^3$  sobre el plano  $XY$ , son invariantes, el plano  $XY$ , el eje  $Z$ , cualquier plano que contenga al eje  $Z$  y cualquier recta contenida en el plano  $XY$  que pase por el origen

## Propiedades:

I.  $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$  invariantes  $\implies \mathcal{U} + \mathcal{W}$  invariante y  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$  invariante

$$u \in \mathcal{U} \wedge w \in \mathcal{W} \implies u + w \in \mathcal{U} + \mathcal{W} \implies f(u + w) = f(u) + f(w) \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Definiciones:

Sean  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. y  $f$  la aplicación lineal (endomorfismo)  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

$v \in \mathcal{V}, v \neq 0$  es un **vector propio, vector característico o autovector** de  $f$  si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $f(v) = \lambda v$ ,

llamándose a  $\lambda \in \mathbb{K}$  **valor propio, valor característico o autovalor** de  $f$  correspondiente al vector  $v$

## Propiedades:

I.  $v \in \mathcal{V}, v \neq 0$  es autovector de  $f$  con autovalor  $\lambda \in \mathbb{K} \implies \forall w \in L(\{v\}), w \neq 0, f(w) = \lambda w$  y  $L(\{v\})$  es invariante

II.  $\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor de  $f \implies S_\lambda = \{v \in \mathcal{V}, f(v) = \lambda v\}^\dagger$  es un subespacio vectorial invariante de  $\mathcal{V}$

$$0 \in S_\lambda \implies S_\lambda \neq \emptyset$$

$$v, w \in S_\lambda \implies f(v + w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w) \implies v + w \in S_\lambda$$

$$v \in S_\lambda \implies f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \implies \alpha v \in S_\lambda$$

$$v \in S_\lambda \implies f(v) = \lambda v \in S_\lambda$$

Se denomina **subespacio propio, o autoespacio**, correspondiente al autovalor  $\lambda$  a  $S_\lambda = \{v \in \mathcal{V}, f(v) = \lambda v\}$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sean  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. y  $f$  la aplicación lineal (endomorfismo)  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$

Si  $\dim \mathcal{V} = n$  y  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base formada por autovectores  $(f(v_i) = \lambda_i v_i)$ ,

la matriz de  $f$  respecto a  $B$  es diagonal

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Definición:

$f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  es **diagonalizable**  $\iff$  Existe una base de  $\mathcal{V}$  respecto de la cual la matriz de  $f$  es diagonal

$F \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es **diagonalizable**  $\iff$  La aplicación lineal  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  que tiene a  $F$  como matriz es diagonalizable

### Proposición:

$f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  es diagonalizable  $\iff$  Existe una base de  $\mathcal{V}$  formada por autovectores

### Proposición:

$F \in \mathbf{M}_{n \times n}$  es diagonalizable  $\iff \exists P \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), P^{-1} \cdot F \cdot P$  es diagonal (llamándose a  $P$  **matriz de paso**)

Considera  $P$  la matriz del cambio de base a la base formada por autovectores



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

## Proposición:

Vectores propios del endomorfismo  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes

Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  autovalores distintos de  $f$  y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  autovectores asociados ( $f(v_i) = \lambda_i v_i$ ). Inductivamente:

$\{v_1\}$  es libre

$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  libre y  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \implies \lambda_{k+1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = 0$

$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) = 0 \implies \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \implies$

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \implies \alpha_{k+1} = 0$

$\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}\}$  libre

## Corolario:

$\dim(\mathcal{V}) = n$  y  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  tiene  $n$  autovalores distintos  $\implies f$  es diagonalizable

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Cálculo de los autovalores y autovectores:

Sean  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. y  $f$  la aplicación lineal (endomorfismo)  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ . Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un autovalor y  $v \in \mathcal{V}$  un autovector asociado

$$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0 \iff (f - \lambda i_{\mathcal{V}})(v) = 0 \iff \begin{cases} r(f - \lambda i_{\mathcal{V}}) < n \\ v \in \ker(f - \lambda i_{\mathcal{V}}) \end{cases}$$

Si  $\dim(\mathcal{V}) = n$  y la matriz de  $f$  respecto a cierta base  $B$  es  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ , y siendo  $V \in \mathbb{K}^n$  las coordenadas de un autovector  $v \in \mathcal{V}$

$$F \cdot V = \lambda V \iff F \cdot V - \lambda V = 0 \iff F \cdot V - \lambda I_n \cdot V = 0 \iff (F - \lambda I_n) \cdot V = 0 \iff \begin{cases} r(F - \lambda I_n) < n \\ (F - \lambda I_n) \cdot V = 0 \end{cases} \iff |F - \lambda I_n| = 0$$

Nótese que el subespacio propio asociado al autovalor  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $S_\lambda = \{v \in \mathcal{V}, f(v) = \lambda v\}$  es  $S_\lambda = \ker(f - \lambda i_{\mathcal{V}})$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Definiciones:

**Polinomio característico** de una matriz  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $p(\lambda) = |F - \lambda I_n| = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

**Ecuación característica** de una matriz  $F \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ,  $p(\lambda) = |F - \lambda I_n| = 0 \iff (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

## Proposición:

Dos matrices  $F, F' \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  del endomorfismo  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  respecto de dos bases  $B, B'$  tienen el mismo polinomio característico (y por tanto, los mismos autovalores)

$$\exists P \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{K}), F' = P^{-1} \cdot F \cdot P \implies |F' - \lambda I_n| = |P^{-1} \cdot F \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot I_n \cdot P| = |P^{-1} \cdot (F - \lambda I_n) \cdot P| = |P^{-1}| \cdot |F - \lambda I_n| \cdot |P| = |F - \lambda I_n|$$

**Polinomio característico y ecuación característica** de un endomorfismo. los de una cualquiera de sus matrices

## Proposición:

$\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor del endomorfismo  $f \iff \lambda$  es raíz del polinomio característico de  $f$  (o solución de su ecuación característica)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Si  $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ , el polinomio característico tiene como mucho  $n$  raíces

**Si  $\mathbb{K} = \mathbf{C}$** , el polinomio característico tiene exactamente  $n$  raíces (pudiendo ser múltiples)

Sea  $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ . Supongamos que sus raíces son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

Podemos escribir  $p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} i(\lambda)^\dagger$ , con  $m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n$

### Definiciones:

$m_j$  es la **multiplicidad algebraica** del autovalor  $\lambda_j$

$r_j = \dim(S_{\lambda_j})$  es la **multiplicidad geométrica** del **autovalor**  $\lambda_j$  (representa el máximo número de autovectores l.i. asociados a  $\lambda_j$ )

### Propiedades (sin demostración):

- I.  $1 \leq r_j \leq m_j$
- II.  $k \leq r_1 + r_2 + \dots + r_k \leq m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq n$
- III. El número máximo de autovectores de  $f$  linealmente independientes es  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70