LECTURAS MFIA

LIBRO 1

Cálculo y Álgebra Lineal

Julio Angulo, MFIA

4

En este capítulo se desarrollan algunos conceptos matemáticos básicos necesarios para una comprensión suficiente de los actuales métodos y módelos que se utilizan en finanzas.

Repasaremos los principales conceptos del cálculo: variable, función, continuidad, derivabilidad, integrabilidad,…, no con un carácter general ni exhaustivo, sino más bien enfocado a su aplicabilidad directa en finanzas.

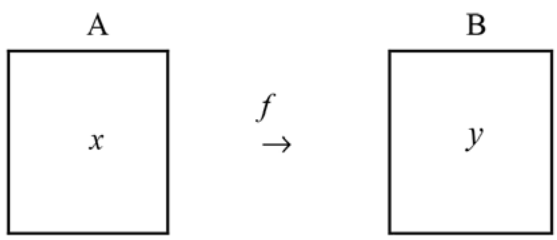
Asimismo, se desarrollarán algunos ejemplos que permitirán vislumbrar dicha aplicabilidad.

Al finalizar este capítulo se habrá adquirido un conjunto de conocimientos necesario para abordar adecuadamente otros módulos del curso.

1. FUNCIÓN

Sean dos conjuntos A y B. Designaremos genéricamente como x a los elementos de A y como y a los elementos de B.

Una función f es una relación entre A y B:



Se suele escribir

$$y = f(x)$$

La relación f es una función si se cumple que a cada elemento x le corresponde un único ele-

Ejemplos:

Función *exponencial:*

$$y = e^x \qquad x \in R$$

La función exponencial es *multiplicativa*, ya que

$$e^x e^z = e^{x+z}$$

Función *logarítmica:*

$$y = \ln x \quad x \in R^+ - \{0\}$$

La función logarítmica es *aditiva*, ya que

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

2. CONVERGENCIA Y LÍMITE

Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ converge a un número $x^* < \infty$ si dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $N < \infty$ tal que

$$\left| x_n - x^* \right| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N$$

o sea, que el término n-ésimo de la sucesión, siendo n finito aunque suficientemente grande, es muy próximo a x^*.

Ejemplo:

Sea la sucesión $x_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,3,.....)$

Elijamos $\varepsilon = 0{,}000001$. Entonces

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0{,}000001$ se cumple para n > 1.000.000

En general

$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ se cumple para $n > 1/\varepsilon$

luego el límite de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es 0.

3. CONTINUIDAD

Se dice que la función $y = f(x)$ de la variable x es una función continua en a si se cumple

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

o sea, los límites por la izquierda y por la derecha existen y coinciden.

Si f es continua en todo $a \in A$ entonces f es continua en el conjunto A.

Ejemplos:

4. DERIVABILIDAD

- DERIVADA

Sea $y = f(x)$ una función continua de la variable x

Se define la derivada de f con respecto a x como

$$f_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La derivada mide la tasa de cambio de una función en respuesta al cambio de una variable de la cual depende.

Se dice que la función f es derivable en x si existen las derivadas por la izquierda y por la derecha y ambas coinciden.

Ejemplo:

Sea la Función Exponencial $y = e^x$. La derivada de esta función es

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x . e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

Ejemplo:

Sea la Función Potencial $y = f(x) = x^n$

- DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea la función $y = f(x)$

La función inversa es $x = f^{-1}(y) = g(y)$

$$g_y = \frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

luego

$$f_x . g_y = 1 \quad g_y = \frac{1}{f_x}$$

Ejemplo:

Sea la Función Logaritmo $y = f(x) = \ln x$

La función inversa es $x = g(y) = e^y$. La derivada de esta función es

$$f_x = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

- USO DE LA DERIVADA PARA APROXIMAR UNA FUNCIÓN

Sea la función $y = f(x)$. Su derivada cumple

Ejemplo:

Consideremos la función cuadrática $y = x^2$

$$f(1) = 1$$
$$f(1{,}1) = 1{,}21$$

Podemos obtener $f(1{,}1)$ como aproximación:

$$f(1{,}1) \cong f(1) + f_x(1).0{,}1$$

$$f_x = 2x$$
$$f_x(1) = 2$$

$$f(1{,}1) \cong 1 + 2.0{,}1 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$$

Se ha obtenido así un valor aproximado.

- DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada segunda de una función es la derivada de la derivada (primera):

$$f_x^{(2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x(x + \Delta x) - f_x(x)}{\Delta x}$$

En general, la derivada n-ésima es la derivada de la derivada (n-1)-ésima:

$$f_x^{(n)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_x^{(n-1)}(x + \Delta x) - f_x^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

- DESARROLLO DE TAYLOR

Si se incluye en el desarrollo un número finito de términos se obtiene una aproximación, tanto mejor cuanto mayor sea el número de términos.

- REGLA DE LA CADENA

Sea y una función de x y x una función de t, o sea

$$y = y(x)$$
$$x = x(t)$$

Entonces

$$y_t = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y_x x_t$$

Ejemplo:

Sean las funciones:

$$y = y_0 e^x$$
$$x = x_0 + \mu t$$

Las derivadas de estas funciones son

$$y_x = y_0 e^x = y$$
$$x_t = \mu$$

luego

$$y_t = y_x x_t = \mu y = y_0 \mu e^x = y_0 \mu e^{x_0 + \mu t}$$

Se define la integral de una función dada $f(x)$ entre los límites 0 y T como el siguiente límite:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\, x = \int_0^T f(x)\,dx$$

siendo $N\,\Delta x = T$.

Hemos procedido del modo siguiente: dividimos el intervalo de 0 a T en N subintervalos iguales de longitud pequeña Δx.

El j-ésimo intervalo tiene como límites inferior y superior los valores x_{j-1} y x_j, respectivamente, siendo $\Delta x = x_j - x_{j-1}$. El valor medio del intervalo $\bar{x}_j$ viene dado por

$$\bar{x}_j = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}$$

Llamando S_N a la suma de N sumandos

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} f(\bar{x}_j)\Delta x = \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$$

el límite de S_N cuando N tiende a infinito y Δx tiende a cero es la integral anteriormente definida:

$$\int_0^T f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\Delta x$$

Cuando el límite existe se dice que $f(x)$ es integrable (más precisamente *riemann-integrable*, ya que esta no es la única definición de integrabilidad).

- REGLA DE INTEGRACIÓN

$$\int_0^T f_x dx = [f(x)]_0^T = f(T) - f(0)$$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^3$, su integral entre los límites 0 y 2 es

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

- INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int_0^T f_x g(x) dx = [f(T)g(T) - f(0)g(0)] - \int_0^T g_x f(x) dx$$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = xe^x$, su integral entre los límites 0 y 1, utilizando el método de integración por partes, es

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

6. FUNCIÓN DE DOS O MÁS VARIABLES

Sea inicialmente una función de dos variables

$$z = F(x, y)$$

A

El precio de una opción $c = F(S,t)$ constituye un ejemplo: S es el precio del subyacente y t es la variable tiempo (de hecho se podrían considerar variables explicativas adicionales, como el tipo sin riesgo y la volatilidad).

- DERIVADA PARCIAL

Se definen las derivadas parciales F_x , respecto a la variable x , y F_y, respecto a la variable y, como

$$F_x = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

$$F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

Ejemplo: Sea la función de dos variables $z = F(x,y) = 2x^2 y$. Las derivadas parciales son:

$$F_x = 4xy$$
$$F_y = 2x^2$$

- DIFERENCIAL TOTAL

Se define como

$$dF = F_x dx + F_y dy$$

Permite expresar la aproximación de la variación de una función, dadas las derivadas parciales Fx y Fy :

Ejemplo:

$$F(x,y) = 3x + y^2$$

$$F_x = 3 \quad F_y = 2y$$

$$F(1{,}1;2{,}1) = 3 \times 1{,}1 + 4{,}41 = 7{,}71$$

Luego la variación real es

$$\Delta F = 0{,}71$$

Aproximación:

$$F(1{,}1;2{,}1) \cong F(1;2) + F_x(1;2) \times 0{,}1 + F_y(1;2) \times 0{,}1 = 7 + 3 \times 0{,}1 + 4 \times 0{,}1 = 7{,}7$$

Por tanto, la variación aproximada es

$$\Delta F \cong 0{,}7$$

7. MATRICES

- CONCEPTO DE MATRIZ

Una *matriz* es un conjunto de elementos distribuidos en filas y columnas. Se suele representar como $A = (a_{ij})_{m \times n}$ a una matriz de m x n elementos (m filas y n columnas). El subíndice m x n se denomina orden de la matriz.

Y el vector columna a, formado por n elementos, como:

$$b = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$

Una matriz A se dice que es una matriz cuadradade orden n cuando tiene n filas y n columnas, o sea, el número de filas y el de columnas coinciden.La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos cuyas posiciones de fila y columna coinciden, o sea, por los elementos a_{ii}.

- OPERACIONES CON MATRICES

SUMA

Dadas dos matrices del mismo orden $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ se define la suma como la matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

y se expresa

$$A + B = C$$

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz suma C es

$$C = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-1 & 4+0 \\ 0-3 & 4+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz suma F es

$$F = \begin{pmatrix} 1-1 & 0+1 \\ 0+0 & 2+4 \\ 3-1 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y un número escalar λ se define la multiplicación escalar como

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación escalar por el escalar -4 viene dada por

$$-4A = \begin{pmatrix} -4\times(-3) & -4\times 5 \\ -4\times(-1) & -4\times 0 \\ -4\times 2 & -4\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -20 \\ 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{jk})_{n\times h}$ tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, se define la multiplicación o producto de A por B como la matriz $C = (c_{ik})_{m\times h}$, tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

y se expresa

$$AB = C$$

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz A por la matriz B es

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 4\times 3 & 1\times 0 + 2\times 2 + 4\times 5 \\ 0\times 1 + 4\times 0 + 3\times 3 & 0\times 0 + 4\times 2 + 3\times 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 24 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$$

El producto BA estaría en este caso definido. Su resultado es

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 2 + 0\times 4 & 1\times 4 + 0\times 3 \\ 0\times 1 + 2\times 0 & 0\times 2 + 2\times 4 & 0\times 4 + 2\times 3 \\ 3\times 1 + 5\times 0 & 3\times 2 + 5\times 4 & 3\times 4 + 5\times 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz A por la matriz B no está definido. Sin embargo, el producto de la matriz B por la matriz A sí lo está, siendo el resultado

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1\times 3 + 3\times(-3) & -1\times(-1) + 3\times 2 & -1\times 0 + 3\times 1 \\ 1\times 3 + 2\times(-3) & 1\times(-1) + 2\times 2 & 1\times 0 + 2\times 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 7 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- MATRIZ UNIDAD

Una matriz *unidad* I_n es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son 1's y el resto de elementos son 0's, o sea,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ \end{pmatrix}$$

- MATRIZ DIAGONAL

Una matriz *diagonal* A es una matriz cuadrada en la que los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son 0's, o sea,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- MATRIZ TRANSPUESTA

Una matriz A' es la matriz transpuesta de una matriz A cuando se verifica:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$
$$A' = (a_{ji})_{n\times m}$$

Se 'intercambian' filas y columnas.

Si A es cuadrada y se cumple $A = A'$ se dice que A es una matriz simétrica.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz transpuesta C' es

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $C = C'$ la matriz C es simetrica.

- TRAZA DE UNA MATRIZ

La traza de una matriz cuadrada se define como la suma de los elementos de la diagonal principal. Dada una matriz A cuadrada de orden n:

$$Traza(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Las matrices AA' y $A'A$ son simétricas y sus trazas son iguales.

Ejemplo:

la traza de esta matriz es

$$Traza(A) = 1 + 5 + 1 = 7$$

- PROPIEDADES DE LAS MATRICES TRANSPUESTAS

1. $(A')' = A$
2. $(A + B)' = A' + B'$
3. $(AB)' = B'A'$ (En general: $(ABC)' = C'B'A'$)

- DETERMINANTE

El determinante de una matriz cuadrada es un número dado por la expresión

$$|A| = \sum_{ij\ldots r} \pm a_{1i} a_{2j} \ldots a_{nr}$$

La suma se extiende a todas las permutaciones de los subíndices.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1. $|A'| = |A|$
2. Un intercambio de columnas o filas contiguas cambia el signo del determinante.

- MENOR

Un menor de una matriz es el determinante de la matriz que resulta de suprimir una fila y una columna:

$|A_{ij}|$ es el menor de A que se obtiene suprimiendo la fila $i-ésima$ y la columna $j-ésima$.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

el menor $|A_{1,3}|$ es

$$|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 3\times(-1) = 2+3 = 5$$

- COFACTOR

Se demuestra que el determinante de la matriz A se puede obtenerse como

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

luego el determinante $|A|$ puede desarrollarse a partir de los elementos de una fila (o columna) y sus cofactores.

Ejemplo:

Dada la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos obtener el determinante desarrollando, por ejemplo, a partir de la 1ª fila

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 - 0 + (-10) = -6$$

- **RANGO DE UNA MATRIZ**

Es el *orden* del menor (de mayor orden) cuyo determinante es no-nulo.

Proceso de obtención de una matriz inversa:

Se calcula la denominada *matriz adjunta* (transpuesta de cofactores)

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} c_{11} & . & . & c_{n1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & . & . & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Y dado que

$$A.Adj(A)=Adj(A)A=\begin{pmatrix} |A| & 0 & . & . & 0 \\ 0 & |A| & . & . & 0 \\ . & . & . & . & .. \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & |A| \end{pmatrix}=|A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & .. \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}=|A|I$$

se verifica

$$\frac{Adj(A)}{|A|}.A=I$$

y, por tanto, finalmente

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|}$$

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz inversa la obtenemos como sigue:

$$|A| = -3$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 3.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ \end{pmatrix}$$

- PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSAS

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
4. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

- MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada A que cumple

$$A' = A^{-1}$$

Por tanto,

$$A'A = AA' = 1$$

Ejemplo:

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es ortogonal porque se cumple:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En este capítulo se han revisado las herramientas matemáticas básicas utilizadas en la elaboración de los modelos financieros de valoración de las operaciones y sus riesgos.

Constituyen el punto de partida para la construcción de los modelos estocásticos que describen el comportamiento de las variables aleatorias fundamentales, los precios.

Dichas variables son continuas, ya que en el ámbito financiero el tiempo transcurre de modo continuo y los modelos, en general, se basan en este hecho.

El análisis del riesgo de las posiciones se basa en los cambios de valor cuando se producen variaciones pequeñas, de aquí la utilidad de revisar los conceptos de continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las funciones.

Finalmente, el cálculo matricial, que en este módulo se ha revisado de forma muy abreviada, constituye la base de representación de los riesgos de una cartera con un número significativo de activos, y en él se basan los modelos de utilizados para el control y la gestión dinámica de dichos riesgos.

8. BIBLIOGRAFÍA

- NEFTCI, S. N. (1996): *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press.
- WILMOTT, P. et al (1995): *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.
- JORION P. and GARP (Global Association of Risk Professionals) (2009): *Financial Risk Manager Handbook*. Wiley Finance.