LECTURAS MFIA

LIBRO 1

Probabilidad

Antonio Garre, MFIA

3

1. PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

La probabilidad trata de aproximar, mediante determinados parámetros, los posibles resultados al efectuar un experimento: así como hablamos de frecuencias en una muestra, hablaremos de probabilidad en una población.

Definición: Llamaremos **espacio muestral** de un experimento (*y lo representaremos como* Ω) al conjunto de resultados que se pueden obtener.

Definición: Llamaremos **suceso *A*** a un subconjunto del espacio muestral ($A \subset \Omega$).

Ejemplo

Obtener el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a) La suma al lanzar dos dados.
b) El sexo de los hijos de una pareja.
c) Las longitudes de las alas del escarabajo de la patata.

a) $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
b) $\Omega = \{H, M\}$
c) $\Omega = \{R^+\}$

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Definición: Llamaremos **modelo de probabilidad** a una función P: $\Omega \rightarrow [0,1]$ (*esto es, a cada suceso A le hace corresponder un valor P(A) entre* 0 *y* 1) tal que:

a) $P(\Omega) = 1$
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son disjuntos (*esto es, si* $A \cap B = \varnothing$)

PROBABILIDAD EN ESPACIOS MUESTRALES DISCRETOS

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Definición: Diremos que un espacio muestral es discreto si es finito ó numerable, es decir admite una representación de la forma:

a) $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ es el caso de ser finito.
b) $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ es el caso de ser infinito.

- Cuando el espacio muestral es discreto, la teoría de la probabilidad que se utiliza es la llamada **probabilidad elemental o probabilidad clásica**.

Las propiedades de la probabilidad, en el caso discreto, se resumen en:

a) $0 \leq P(A_j) \leq 1 \ \forall A_j$.
b) $\sum P(A_j) = 1$ (ya sea el sumatorio finito o infinito)
c) Si $B = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$, donde todos los sucesos son distintos, entonces $P(B) = \sum P(A_j)$.

Regla de Laplace: En el caso de que todos los sucesos sean ***igualmente probables***, la probabilidad de un suceso B vendrá dado por: $P(B) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Ejemplo

Hallar la probabilidad de que al tirar un dado no obtengamos ni un 3 ni un 4.

$$P(1 \cup 2 \cup 5 \cup 6) = \frac{4}{6} = 0{,}666667$$

Proposición:

$$P(A\mid B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado:

a) Sin poseer ninguna información adicional.
b) Sabiendo que ha salido un número par.

a) $P(6) = \frac{1}{6} = 0{,}1666667$

b) $P(6/n^{o}\ par) = \frac{P(6 \cap n^{o}\ par)}{P(n^{o}\ par)} = \frac{P(6) * P(n^{o}\ par/6)}{P(n^{o}\ par)} = \frac{1/6 * 1}{3/6} = 0{,}33333$

Ejemplo

Se sabe que ante una determinada enfermedad, la probabilidad de caer enfermo es 1/7. Doce de cada 31 enfermos han dado positivo en una prueba, y 7 de cada 8 que dan positivo en la prueba son enfermos. ¿Cuánto es la probabilidad de dar positivo en la prueba?

P(A) = probabilidad de enfermar = 1 / 7
P(B) = probabilidad de dar positivo

P(B /A) = P(dar positivo / enfermo) = 12/31
P(A/B) = P(enfermo/ dando positivo) = 7 / 8

$$P(A\mid B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Ejemplo

Se tira un dado. ¿Son independientes los sucesos
A = *"sacar un número par"*
B = *"sacar un número mayor o igual a cuatro"* ?

P(A) = P(sacar un número par) = 1 / 6
P(B) = P(sacar un número mayor o igual a cuatro) = 3 / 6

P(A | B) = P(sacar un número par | el número es mayor o igual a cuatro) = 2 / 3 ≠ P(A)
P(B | A) = P(sacar un número mayor o igual a cuatro | el número es par) = 2 / 3 ≠ P(B)

Los sucesos no son independientes

REGLAS PARA EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1. Regla de la multiplicación

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{N} A_j\right) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P\left(A_N\left|\bigcap_{j=1}^{N-1} A_j\right.\right)$$

Ejemplo

Al sacar 3 cartas de la baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 sean oros?

$P(A_1)$ = sacar oro = 10 / 40
*P(3 cartas sean oros) = $P(A_1) * P(A_2/A_1) * P(A_3/A_1\cap A_2)$ = 10/40 * 9/39 * 8/38 = 0,0121*

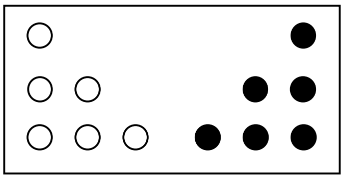
2. Regla de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_N$ sucesos tales que:

Se suele utilizar cuando hay dos etapas en un experimento.

Ejemplo

Se lanza un dado de números {1, 2, 3} y el número que resulta es el número de bolas blancas que ponemos en una urna; se vuelve a lanzar poniendo tantas bolas negras como indique el resultado del lanzamiento. De la urna así formada se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?



P(B) = P(sacar bola blanca)

A_j = una de las 9 posibles combinaciones del espacio muestral. Todas las combinaciones son equiprobables por lo que la probabilidad será de 1/9.

Las probabilidades de B varían en función del espacio muestral obtenido:

1/2 1/3 1/4   2/3 2/4 2/5   3/4 3/5 3/6

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(A_j) \cdot P(B|A_j)$$

$$P(B) = \tfrac{1}{9} \sum_{j=1}^{N} P(B|A_j) = 0{,}5$$

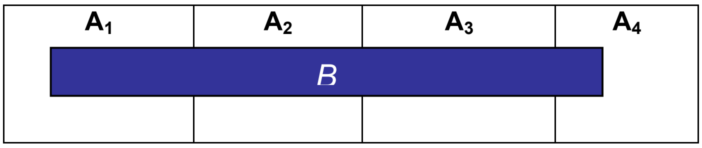
3. Regla de Bayes

Sean A_1 , A_2 , …, A_N sucesos tales que:

Entonces se verifica que

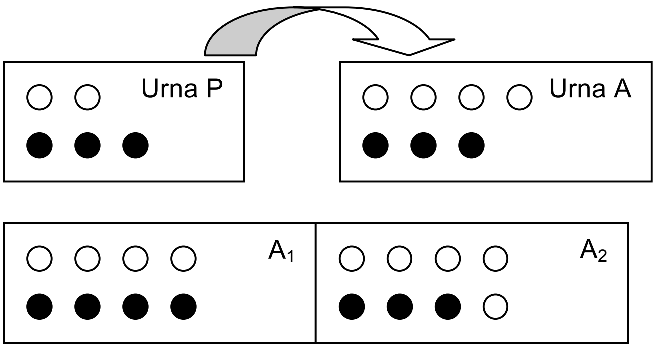
$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{P(B)}=\frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{\sum_{j=1}^{N} P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$$

(Obsérvese que la fórmula anterior es una aplicación de la probabilidad condicionada y la probabilidad total)



Ejemplo

Una urna P contiene 2 bolas blancas y 3 negras; otra urna A está compuesta de 4 blancas y tres negras. Se saca una bola al azar de la urna P y sin verla se echa a A. Seguidamente se saca una bola de A y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de P a A fuese blanca?



P(B) = P (salir bola negra)

$P(A_1)$ = P (estar en A_1) = 3/5

$P(A_2)$ = P (estar en A_2) = 2/5

2. VARIABLES ALEATORIAS

CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

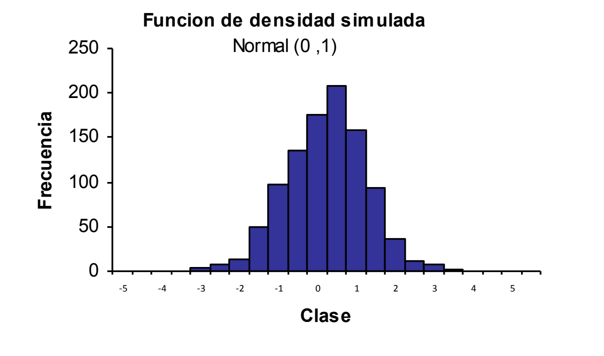
Definición: Llamaremos **variable aleatoria** a una función **X**: $\Omega \rightarrow$ **R** que a cada elemento del espacio muestral (*correspondiente al experimento aleatorio que estamos estudiando*) le hace corresponder un número real.

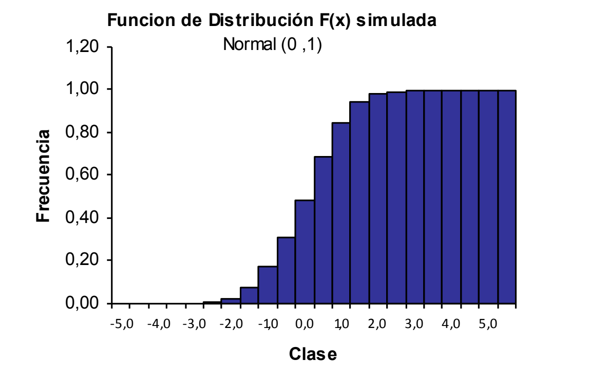
Ejemplo

Describir el dominio y la imagen de la variable aleatoria "*la suma de dos dados en una tirada*".

Definición: Si A es un subconjunto de **R** (*es decir, un subconjunto de la imagen de la variable X*) entonces llamaremos **probabilidad de A** a $P(A) = P(X \in A) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

Clase	*Frecuencia*	*% acum.*
-5,0	0	0,00
-4,5	0	0,00
-4,0	0	0,00
-3,5	0	0,00
-3,0	3	0,00
-2,5	8	0,01
-2,0	13	0,02
-1,5	50	0,07
-1,0	98	0,17
-0,5	135	0,31
0,0	175	0,48
0,5	208	0,69
1,0	159	0,85
1,5	93	0,94
2,0	36	0,98
2,5	12	0,99
3,0	8	1,00
3,5	2	1,00
4,0	0	1,00
4,5	0	1,00
5,0	0	1,00
y mayor...	0	1,00





Propiedades de las funciones de distribución:

① $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
② $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
③ Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$ (Monótona no decreciente)
④ F es continua por la derecha, esto es, $\lim_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x)$ (*o bien* $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$)

- La función de distribución asigna a cada número real x la probabilidad acumulada hasta ese valor x.

- Dada una función de distribución, se puede calcular la probabilidad de cualquier suceso mediante las fórmulas: P(−∞, x] = F(x) P(−∞, x) = F(x−)

- Dada una probabilidad, se puede definir una función de distribución y dada una función de distribución se puede determinar de forma única una probabilidad

Ejemplo

Dada la función de distribución calcule $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x \end{cases}$

a) P{0}
b) P{2}
c) P(4,5]

a) P{0} = 0

b) P{2} = $P[2,2] = F(2) - \lim_{x\to 2^-} F(x) = 1 - 1/3 = 2/3$

c) P(4,5] = P(5)-P(4) = 1-1=0

- La función de distribución de una variable aleatoria discreta queda caracterizada por su **función de masa**, (*y la representaremos como f(x)*) la cual está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_1) \\ P(X = x_2) \\ \vdots \\ P(X = x_n) \end{cases} \quad \textit{(en el caso de que sean finitas)}$$

- **La función de distribución** estará definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ P(X = x_1), & x_1 \le x < x_2 \\ P(X = x_1) + P(X = x_2), & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1, & x_n \le x \end{cases} \quad \textit{(en el caso de que sean finitas)}$$

Ejemplo

Hallar la función de masa y la función de distribución de la variable aleatoria X = *"número de hijos varones en familias de tres hijos".*

$$\text{f. masa} \quad f(x) = \begin{cases} 1/8 = P(H)P(H)P(H) & x = 0 \\ 3/8 = P(V)P(H)P(H) + P(H)P(V)P(H) + P(H)P(H)P(V) & x = 1 \\ 3/8 = P(V)P(V)P(H) + P(H)P(V)P(V) + P(V)P(H)P(V) & x = 2 \\ 1/8 = P(V)P(V)P(V) & x = 3 \end{cases}$$

$$\text{F.distribución} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 1/2 & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

Ejemplo

Dada la siguientes función de masa, hallar:

a) Su función de distribución
b) f(5)
c) $P(X \leq 2)$
d) $P(X < 2)$
e) $P(X > 2)$
f) $P(X = 3)$

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.01	0.1	0.3	0.4	0.1	???

Ejemplo

Por cada hora de máquina en marcha se sabe que el número de roturas X producidas en la trama de un telar tiene la probabilidad $P(X=x)=\frac{k\cdot 10^x}{x!}$, x = 0,1, …. Hallar el valor de k y la probabilidad de que se produzca alguna rotura.

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k\cdot 10^x}{x!}=1 \qquad \Rightarrow k\cdot\sum_{x=0}^{\infty}\frac{10^x}{x!}=1 \qquad \Rightarrow k=\frac{1}{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{10^x}{x!}}=\frac{1}{e^{10}}=e^{-10}$$

$$P(a\lg una\cdot rotura)=1-P(0)=1-e^{-10}$$

Medidas de centralización para una variable aleatoria discreta

Definición: Llamaremos **media** o **esperanza** de una variable aleatoria discreta X a:

$$\mu = E[X] = \sum_j x_j P(x_j)$$

Ejemplo

Un boleto de una rifa ofrece dos premios, uno de 5000 euros y otro de 2000 euros, con la probabilidad 0,001 y 0,003. ¿Cuál sería el precio justo a pagar por él?

Definición: Llamaremos **mediana** al valor o valores M tales que dejan a la izquierda y a la derecha la misma cantidad de probabilidad.

Ejemplo

Las notas de un estudiante en seis exámenes han sido 84, 91, 72, 68, 87, 78. Hallar la mediana de esas notas.

La mediana será el valor que deje el mismo número de datos a la derecha y a la izquierda

Medidas de dispersión para una variable aleatoria discreta

Definición: Llamaremos **varianza** de una variable aleatoria discreta al valor

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_j (x_j - \mu)^2 P(x_j)$$

Proposición: La varianza viene dada por $\sigma^2 = \sum_j x_j^2 P(x_j) - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

Definición: Llamaremos **desviación típica** σ de una variable aleatoria a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Definición: El **momento no centrado de orden n** de X se define como $\alpha_n = E\left[X^n\right]$

Definición: El **momento centrado de orden n** de X se define como $\mu_n = E\left[(X-\mu)^n\right]$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

Definición: Diremos que una **variable aleatoria es continua** cuando toma valores en un intervalo (finito o infinito) de **R**.

La función de distribución de una variable aleatoria discreta queda caracterizada por su **función de densidad**, (*y la representaremos como f(x)*) la cual verifica

① $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$.
② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Ejemplo

¿Es una función de densidad la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$?

Si es función de densidad

$$\int_0^{\infty} e^{-x} = (-e^{-\infty}) - (-e^0) = 0 - (-1) = +1$$

La función de distribución estará definida por $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

A raíz del resultado anterior, se deduce que F'(x) = f(x).

Ejemplo

Dada la función de densidad f(x) = $\frac{1}{2}$ – ax, donde x toma valores en el intervalo [0,4]:

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución.

c) Calcular P(1 < X < 2)

a) $\int_0^4 \frac{1}{2} - ax = \left[\frac{1}{2}x - \frac{a}{2}x^2\right]_0^4 = \left[\frac{1}{2}(4) - \frac{a}{2}(4)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{a}{2}(0)^2\right] = 2 - 8a - 0 + 0 = 1$

b) $F(X) = \int f(x) = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x = \frac{1}{2}x - x^2/16$

c) $\int_1^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2\right]_1^2 = \left[\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{16}(2)^2\right] - \left[\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{16}(1)^2\right] = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

Medidas de centralización para una variable aleatoria continua

Definición: Llamaremos **media** o **esperanza** de una variable aleatoria continua X a:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Ejemplo

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x) Calcular la media de la variable X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(1+x^2) & x \in [0,3] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} ..$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^3 x\left(\frac{1}{12}\left(1+x^2\right)\right) = \left[\frac{\frac{1}{12}x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

Ejemplo

Dada la función de densidad $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+a, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$, calcular el valor de a y la mediana de f(x).

$$mediana=\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = 0{,}5$$

Medidas de dispersión para una variable aleatoria continua

Definición: Llamaremos **varianza** de una variable aleatoria continua al valor

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

Proposición: La varianza viene dada por $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

Definición: Llamaremos **desviación típica** σ de una variable aleatoria a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo

Dada la función de densidad f(x) = $f(x)=\begin{cases} k\dfrac{x^2}{36} & \text{si } 0\le x\le 6\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

Calcular:

El valor de k.

La media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

La función de distribución.

P(|X| ≤ 2).

Propiedades de la varianza:

1. Si X e Y son dos variable aleatorias ***independientes***, entonces Var(X + Y) = Var(X)+ Var(Y)
2. Si k es un escalar y X es una variable aleatoria, entonces Var(kX) = k^2 Var(X)
3. Si k es un escalar, entonces Var(k) = 0

3. DISTRIBUCIONES DISCRETAS

DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Definición: Llamaremos **prueba de Bernoulli** a un experimento aleatorio cuyos posibles resultados son ***éxito*** (*con probabilidad p*) o ***fracaso*** (con probabilidad 1 – p).

La **distribución de Bernoulli** vendrá dada por la distribución de la variable aleatoria discreta

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si obtenemos é xito} \\ 0 & \text{si obtenemos fracaso} \end{cases}$$

cuya función de masa es

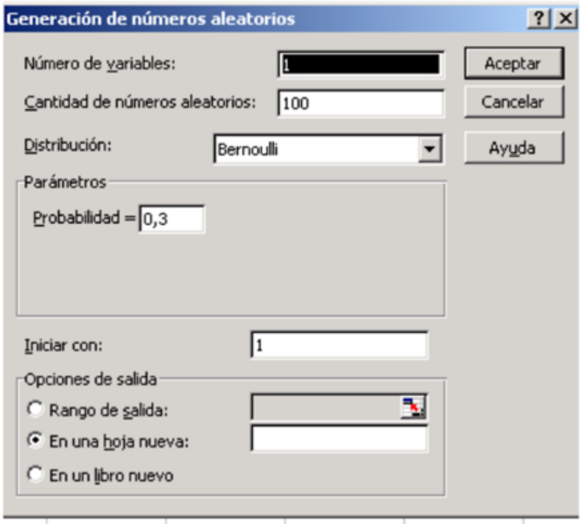
$$\begin{cases} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{cases}, \text{ o bien, } P[X=k] = p^k(1-p)^{1-k}, \; k = 0, 1$$

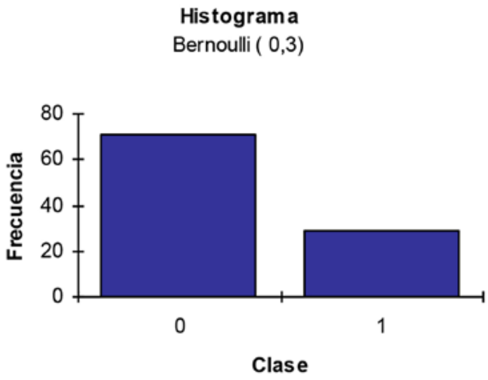
Ejemplo

Una persona coge al azar una bola de una caja donde hay tres bolas blancas y dos negras. Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca y la de que sea negra.

Estamos ante una distribución Bernoulli donde p = probabilidad de éxito

P(x=1) = p= 3/5





DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Definición: Llamaremos **distribución binomial** B (n; p) a la distribución de la variable X = "*número de éxitos obtenidos al realizar n pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p*"

Su función de masa vendrá dada por

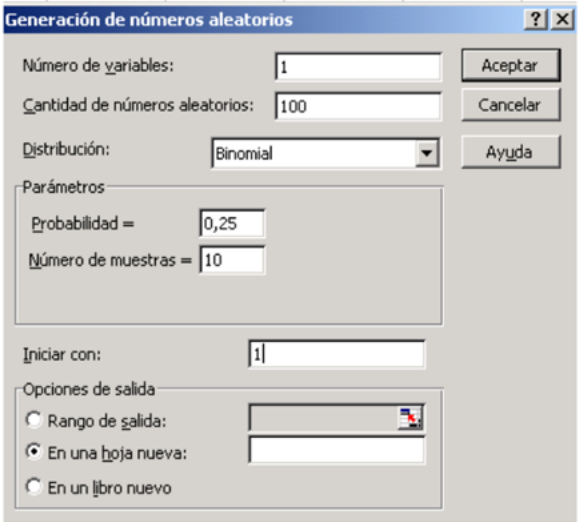
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

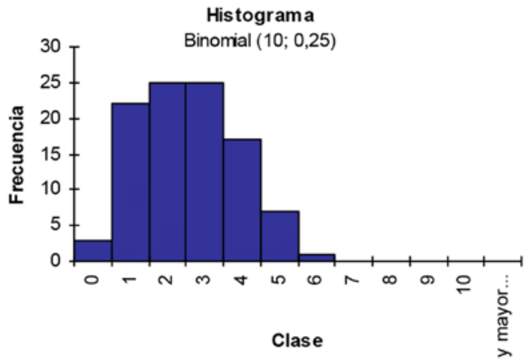
Recuerda: $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$

Ejemplo

Un estudiante responde al azar un examen de diez preguntas tipo test con cuatro respuestas en cada pregunta. Calcular la probabilidad de que acierte cinco preguntas y sólo 5 respuestas.

Nos está pidiendo el valor de probabilidad dado por una Binomial con





Proposición: La esperanza de la distribución binomial viene dada por $E[X] = np$.
La varianza de la distribución binomial viene dada por $V(X) = np(1 - p)$.

Ejemplo

Calcular la probabilidad de obtener al menos cinco caras al lanzar seis veces una moneda.

$p=1/2$
$n=6$

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 1/2^{5}(1 - ½)^{6-5} + \binom{6}{6} 1/2^{6}(1 - 1/2)^{6-6}$$

Ejemplo

De entre 2.000 familias con 4 hijos, ¿cuántas cabe esperar que tengan:

$P(\textit{al menos un niño}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \, 1/2^{\,0}(1 - ½)^4$

$P(\textit{ninguna niña}) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \, 1/2^{\,4}(1 - ½)^0$

La distribución Binomial posee la **propiedad aditiva:** si $X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$, …, $X_k \sim B(n_k, p)$, y X_1, X_2, …, X_k son independientes, entonces $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n_1 + n_2 + \ldots + n_k, p)$.

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

Definición: Llamaremos **distribución geométrica** a la distribución de la variable X = "*número de fracasos hasta la aparición del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p*".

Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = (1 - p)xp \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que al sacar una carta en una baraja española con reemplazamiento, se obtenga el dos de oros por primera vez en la diecisieteava vez

Proposición: La esperanza de la distribución geométrica viene dada por $E[X] = \dfrac{1-p}{p}$

Ejemplo

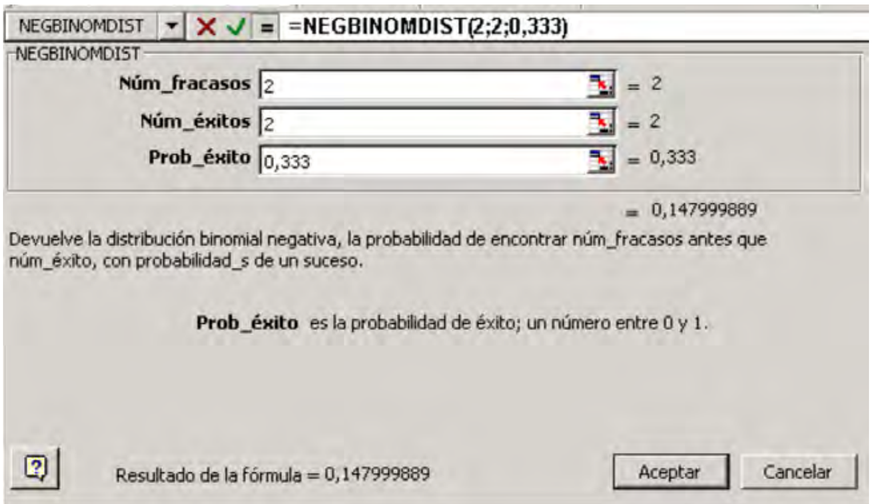
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

Definición: Llamaremos **distribución binomial negativa** a la distribución de la variable X = *"número de fracasos hasta la aparición del r-ésimo éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p".*

Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = \binom{x + r - 1}{x}(1 - p)^x p^r \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado de caras 1, 2 y 3, obtengamos 3 resultados distintos al tres antes de sacar 2 treses.



Proposición: La esperanza de la distribución geométrica viene dada por E[X] = $\dfrac{r(1-p)}{p}$

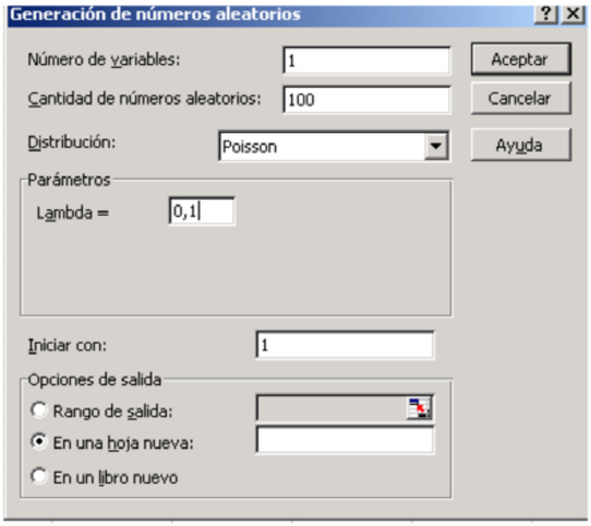
Ejemplo

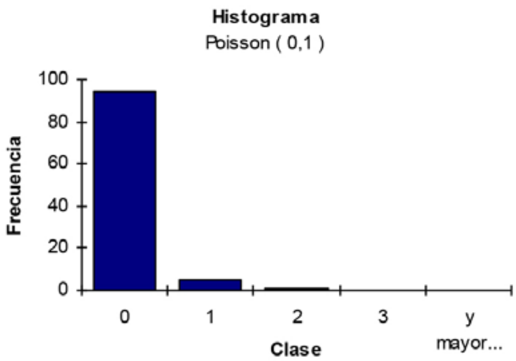
DISTRIBUCIÓN DE POISSON

En determinadas ocasiones, cuando la *n* es demasiado grande, los cálculos necesarios para la variable aleatoria *X* de distribución binomial son demasiados. Por tanto, definimos una variable X denominada de Poisson, la cual viene dada por el límite cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$ en una distribución $B(n; p)$, y $np \to \lambda$. (Por lo general cambiaremos de una distribución binomial a una de Poisson cuando $n \geq 30$ y $p \leq 0.1$)

Definición: Llamaremos **distribución de Poisson de parámetro λ** a aquella variable que tiene como función de masa

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$





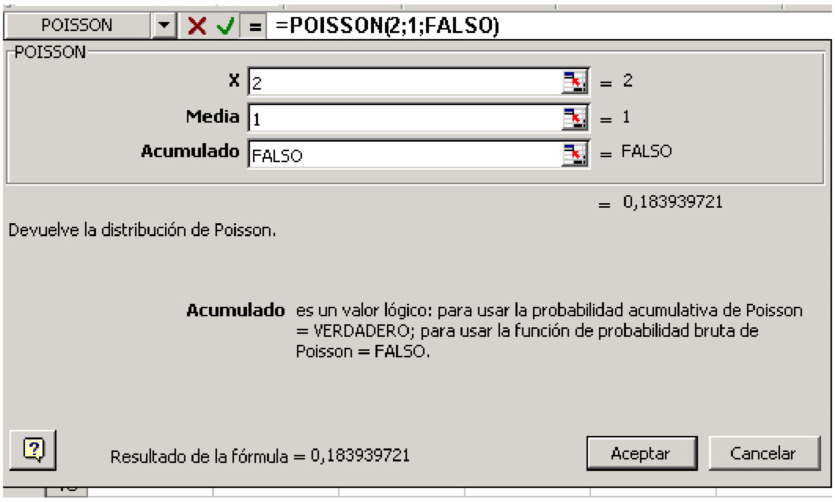
Proposición: La esperanza de una variable de Poisson viene dada por $E[X] = np = \lambda$

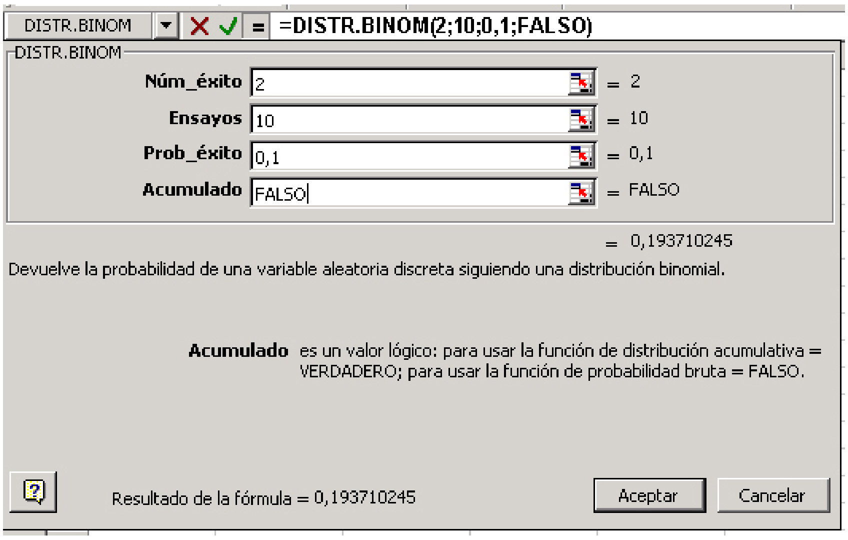
La varianza de una variable de Poisson viene dada por $V(X) = (np)(1 - p) = \lambda$

- La distribución de Poisson posee la **propiedad aditiva**, esto es, si $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$,

Ejemplo

Un 10% de las herramientas producidas en una fábrica son defectuosas. Hallar la probabilidad de que en una muestra de 10 herramientas tomadas al azar exactamente 2 sean defectuosas mediante la distribución binomial y mediante la aproximación de Poisson.





Ejemplo

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Definición: Sea una población con N elementos, de los cuales D son éxitos y N – D son fracasos. La **distribución hipergeométrica** es la distribución de la variable aleatoria X = "*número de éxitos obtenidos en n observaciones al azar de la población, sin reemplazamiento*".

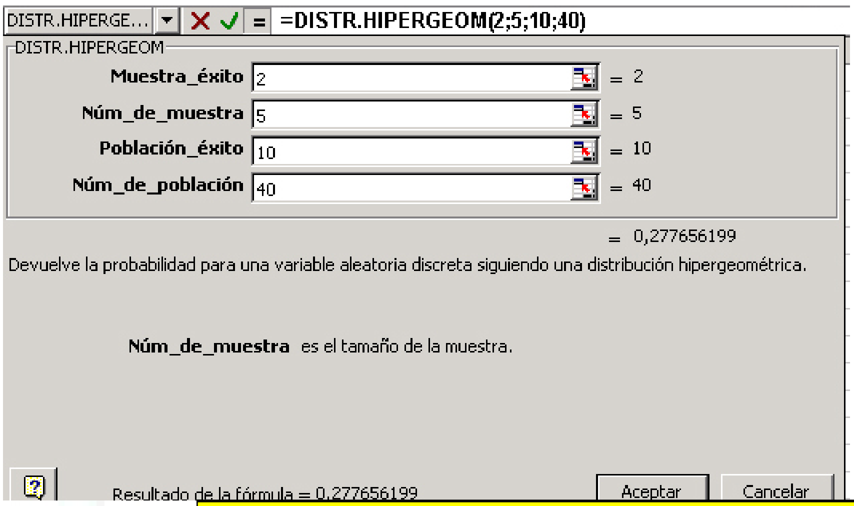
Su función de masa vendrá dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{para } \max\{0, n-(N-D)\} \le x \le \min\{n, D\}$$

Proposición: La esperanza de una variable hipergeométrica viene dada por $E[X] = \frac{nD}{N}$

Ejemplo

En una baraja española se sacan cinco cartas. Calcular la probabilidad de que dos de ellas sean oros.

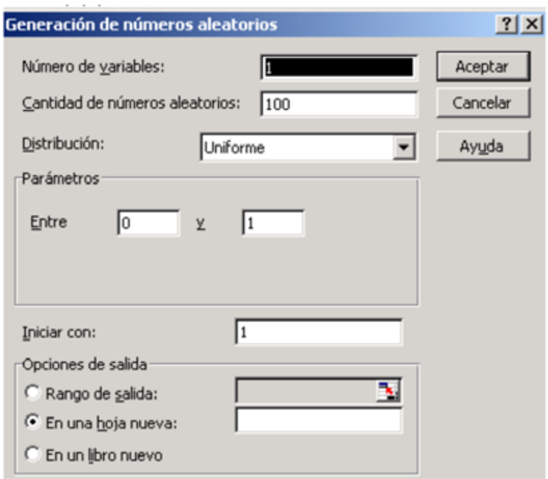


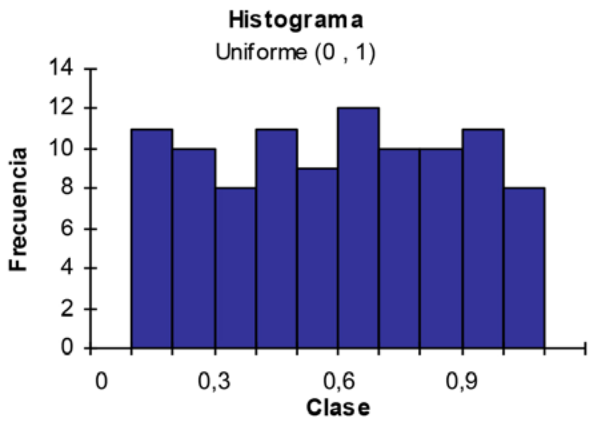
4. DISTRIBUCIONES CONTINUAS

DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Definición: Llamaremos **distribución uniforme en el intervalo (a, b),** y lo representaremos como X ~ U(a, b), a una variable cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \;\; x \in [a,b] \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$





Proposición: Si X sigue una distribución uniforme en (a, b), entonces:

a) $E[X] = \dfrac{a+b}{2}$ **b)** $V[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Ejemplo

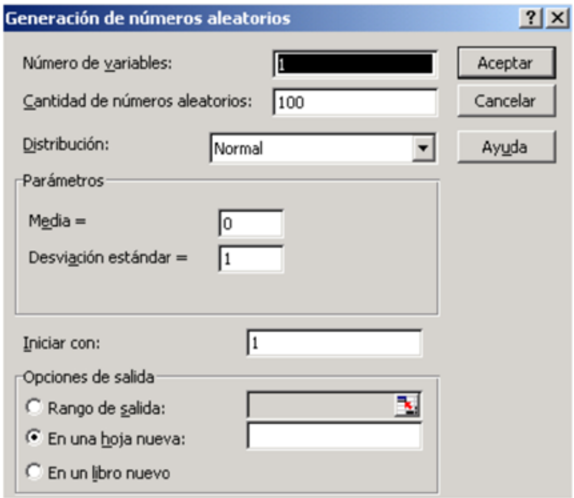
El volumen de ventas de un almacén se distribuye uniformemente entre 380 y 1200 miles de pese-

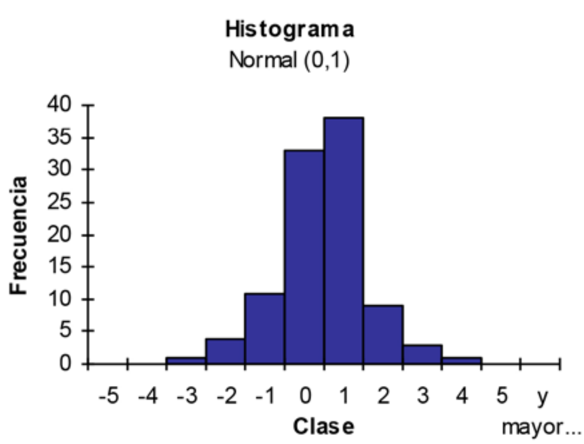
... = 0.25. Hallar Var(X).

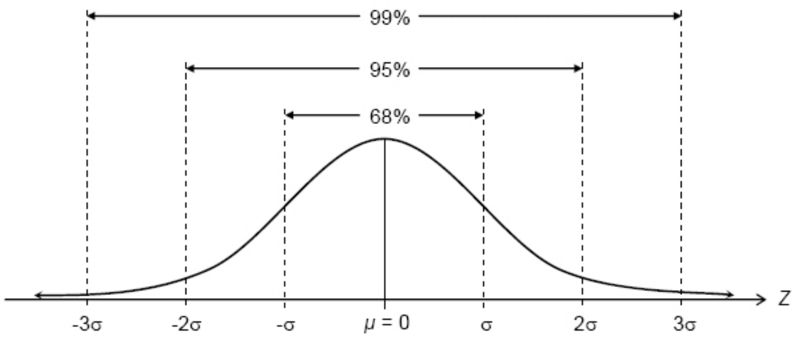
DISTRIBUCIÓN NORMAL

Definición: Llamaremos **distribución normal de parámetros** μ y σ ($-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$), y lo representaremos como N(μ; σ) al modelo continuo de probabilidad que tiene como función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$







PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

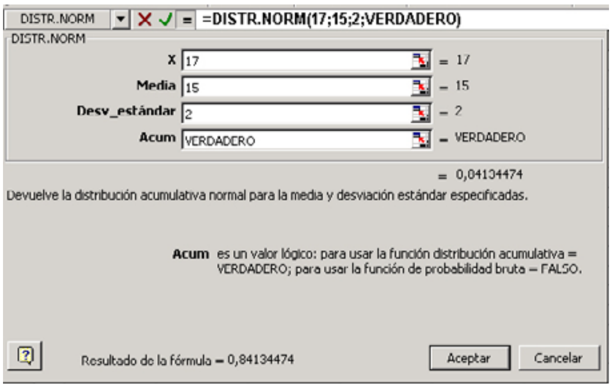
Ejemplo

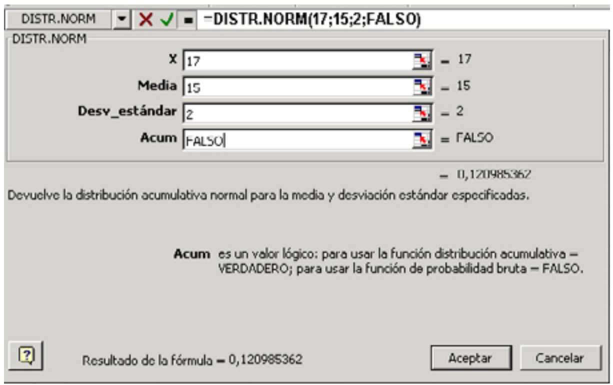
El precio medio de una palmera de chocolate entre 500 confiterías consultadas ha sido de 15 € con desviación típica de 2 € Además, los precios están normalmente distribuidos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que en una confitería una palmera cueste más de 17 €.

b) Hallar la probabilidad de que en una confitería una palmera cueste entre 11 € y 17 €.

c) Hallar el número esperado de confiterías en las que las palmeras cuestan entre 11 € y 17 €.





5. La distribución binomial B(n; p) tiende a la distribución normal cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, cuando n es suficientemente grande, podemos trabajar con un modelo normal donde $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ (por lo general cuando $n \geq 30$ y $0.1 < p < 0,9$)

Ejemplo

Se tira un dado 100 veces. Hallar la probabilidad de obtener entre 20 y 30 caras.

6. Si las variable X_1, X_2, …, X_n son independientes y poseen distribuciones $N(\mu_1; \sigma_1)$, $N¨(\mu_2; \sigma_2)$,

DISTRIBUCION GAMMA

Definición: Llamaremos **integral gamma** al la función $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$

Teorema: Se verifica que la integral gamma es convergente para p > 0.

Propiedades de la función gamma:

1. $\Gamma(1) = 1$ (Mediante integración directa)
2. $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ (Mediante integración por partes)
3. Si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n - 1)!$ (Mediante recurrencia con la propiedad 2)
4. $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Definición: La función de distribución Gamma $\Gamma(\alpha,\beta)$ viene definida mediante la función de densidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad x > 0$$

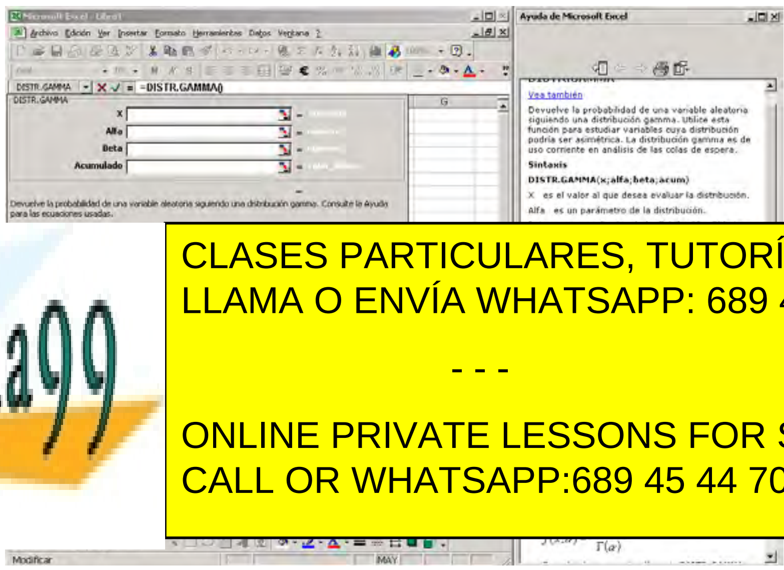
Propiedades

① $E\left[x^k\right] = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\beta^k$

② Si k=1 $E\left[x\right] = \alpha\beta$ $V\left[x\right] = \alpha\beta^2$

③ Sea $X \to \Gamma(\alpha,\beta)$ entonces $Y = aX \to \Gamma(\alpha,a\beta) \quad a > 0$

④ Sean $X_1 \to \Gamma(\alpha_1,\beta)$ y $X_2 \to \Gamma(\alpha_2,\beta)$ independientes entonces $X_1 + X_2 \to \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2,\beta)$



DISTRIBUCIÓN BETA

Definición: Llamaremos integral beta a la integral β(p, q) = $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

Teorema: Se verifica que la integral beta es convergente para p > 0 y q > 0.

Propiedades de la integral beta:

1. β(p, q) = β(q, p). (Haciendo el cambio t = 1 – x)
2. β(1, q) = $\frac{1}{q}$, para q > 0. (A raíz de la definición)
3. β(p, q) = $\frac{q-1}{p}$ β(p + 1, q – 1) para p > 0, q > 1. (Integrando por partes)
4. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Definición: $X \rightarrow \beta(p,q)$ con p,q>0 si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\beta(p,q)} & si\ x \in (0,1) \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$

$$E[X] = \frac{p}{p+q}$$

$$V[X] = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Definición: Es una distribución Gamma con p = 1, Es decir con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & si\ \ x > 0 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$