TEMA 1. MAGNITUDES Y UNIDADES

1. Unidades y dimensiones

La medición de los distintos fenómenos físicos se puede cuantificar y expresar con un número y una unidad. Estas reciben el nombre de **magnitud**. Ejemplos de magnitudes conocidas son la potencia, la masa o la velocidad de un objeto.
Por ejemplo, la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es:

$$g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}.$$

Importante, la cuantificación o medida de toda magnitud física siempre se realiza en términos de cierta **unidad**. En nuestro ejemplo es metros por segundo cuadrado.

1.1 El Sistema Internacional (SI)

En física es fundamental el uso de un sistema consistente de unidades. En 1960 se estableció un conjunto estándar de unidades, llamado Sistema Internacional (SI), para unificar el conocimiento y la transmisión de resultados independientemente del lugar donde se realiza el estudio.

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Temperatura	kelvin	K
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Además, existen otras unidades que están más extendidas en el mundo anglosajón. Como unidad de longitud se mide en "millas" o "pies", mientras que la masa se mide en "libras".

En muchos casos, las magnitudes en el SI se expresan con números muy grandes o muy pequeños. Para facilitar la manipulación de estos números se emplean los prefijos. Estos no son sino múltiplos o submúltiplos de las unidades SI estándar.

MÚLTIPLOS		
FACTOR	**PREFIJO**	**SÍMBOLO**
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da

SUBMÚLTIPLOS		
FACTOR	**PREFIJO**	**SÍMBOLO**
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d

Finalmente, también podemos estar interesados en realizar una conversión de unidades, por ejemplo:

$$72\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3{,}6\cdot10^3\ \text{s}}=20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.2 Análisis dimensional y conversión de unidades

La mayoría de las magnitudes físicas se pueden expresar en términos de las tres magnitudes básicas: tiempo, longitud y masa. Se representan por las letras mayúsculas L, T y M, respectivamente. Por ejemplo:

Magnitud	Dimensión	Unidad
Superficie	L^2	m^2
Frecuencia	1/T	s^{-1}
Velocidad	L/T	m/s
Densidad	M/L^3	kg/m^3

Aquellas magnitudes físicas que se pueden expresar en términos de longitud, tiempo o masa permiten realizar un análisis dimensional de sus unidades. Esto se suele expresar poniendo la magnitud física entre corchetes, por ejemplo:

$$[v] = \frac{\text{Longitud}}{\text{Tiempo}} = \frac{L}{T}$$

$$[\rho] = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{M}{L^3}$$

En algunos casos puede ocurrir que no sepamos la dimensión de alguna magnitud física. En ese caso podemos utilizar el análisis dimensional. Podemos verlo con el siguiente ejemplo:

La unidad SI de fuerza es el newton (kilogramo-metro por segundo cuadrado). Hallar las dimensiones y las unidades SI de la constante G en la ley de Newton de la gravitación:

$$F = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

<u>Solución</u>

Despejando G, resulta

$\mathrm{G} = \mathrm{F}\,\dfrac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{m}_1 \cdot \mathrm{m}_2}$; Por tanto, las unidades SI son $\dfrac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$.

Por otro lado, dimensionalmente:

$[F] = \dfrac{M \cdot L}{T^2}$

$[m_1] = [m_2] = M$

$[r] = L$

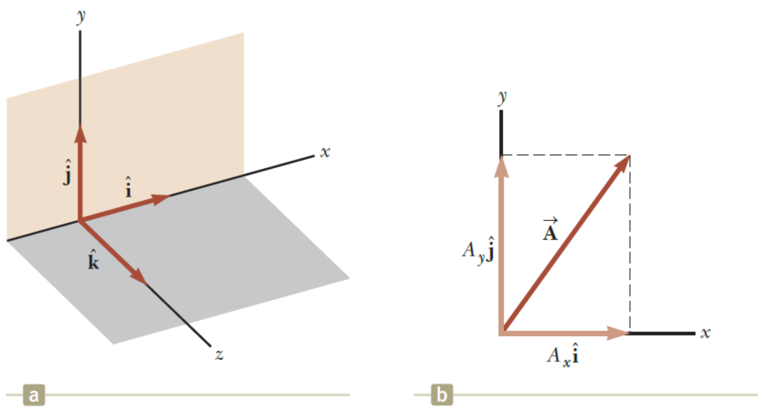
Luego entonces, tenemos:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{G}]\ \frac{[m_1]\cdot[m_2]}{[r]^2} \Longrightarrow [\mathrm{G}] = [\mathrm{F}]\ \frac{[\mathrm{r}]^2}{[\mathrm{m}_1]\cdot[\mathrm{m}_2]} = \frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}\cdot\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{M}^2} = \frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{T}^2\cdot\mathrm{M}}$$

2. Magnitudes escalares y vectoriales.

Podemos hablar de dos tipos de magnitudes físicas: escalares y vectoriales. El primer grupo contiene todas las magnitudes físicas que se cuantifican mediante un valor numérico (por ejemplo, la temperatura o el tiempo), mientras que la segunda requiere un valor numérico, una dirección y un sentido (pensemos en ejemplos como la velocidad o la fuerza).

Debido a que las magnitudes vectoriales tienen una dirección y un sentido asociados, es conveniente introducir un sistema de coordenadas. La siguiente figura ilustra los sistemas de coordenadas cartesianos en tres dimensiones (3D) y en dos dimensiones (2D).



Por ejemplo, para un objeto en 2D que se desplace con una velocidad de 3 m/s en la dirección del eje X y con una velocidad de 4 m/s en la dirección del eje Y, su velocidad se expresa como:

$$\vec{v} = (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})\ \mathrm{m/s}$$

donde $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes X e Y. En el caso 3D, haremos uso del vector $\hat{k}$ en la dirección del eje Z.

Hay tres sistemas de coordenadas 3D que se emplean en muchos casos prácticos: coordenadas cartesianas, cilíndricas (polares en 2D) y esféricas, pero nos centraremos en las coordenadas cartesianas.

3. Álgebra vectorial

El elemento básico del análisis vectorial es el vector, que podemos simbolizar con una letra a la cual se le pone una flecha encima ($\vec{v}$) o también con letra negrita (**v**). Como ya hemos mencionado, los vectores tienen asociados una dirección, un sentido y un valor numérico (módulo) o magnitud. Cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de una base de vectores $\{\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}\}$:

$$\vec{v} = v_1\widehat{e_1} + v_2\widehat{e_2} + v_3\widehat{e_3} = (v_1, v_2, v_3)$$

Cada uno de los vectores $\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}$, simboliza un vector unitario, esto es, un vector cuyo módulo es igual a 1 ($|\widehat{e_i}| = 1$ para i = 1, 2, 3). En el caso del propio vector $\vec{v}$, su módulo se calcula mediante la siguiente fórmula:

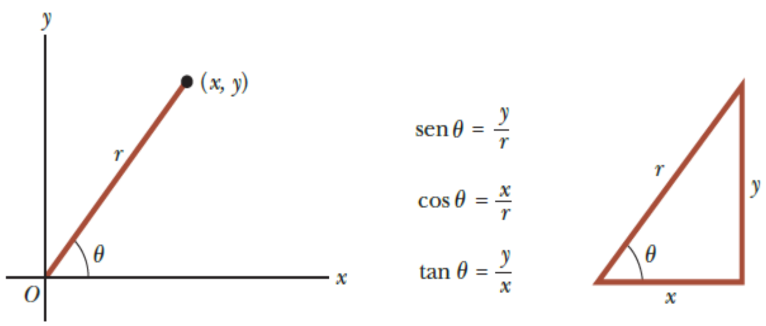
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

3.1. Componentes y representación en un sistema de coordenadas.

Sea un vector $\vec{v}$. En las coordenadas cartesianas en dos dimensiones, podemos expresarlo como:

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (v_x, v_y)$$

donde identificamos las componentes v_x y v_y en cada eje del sistema de coordenadas.



En la figura, a la izquierda podemos ver un sistema de coordenadas en dos dimensiones donde se señala un punto arbitrario (x,y) con una longitud r = $\sqrt{x^2 + y^2}$. A la derecha, las relaciones trigonométricas entre las componentes del vector.

Usando trigonometría básica, expresando en términos del **módulo** y el **ángulo** con el eje X:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan \gamma_x = \frac{v_y}{v_x}$$

Por tanto, las componentes del vector quedan determinadas de forma unívoca:

$$v_x = |\vec{v}| \cos \gamma_x =$$
$$v_y = |\vec{v}| \sin \gamma_x$$

Podemos describir los vectores en 3 dimensiones de igual manera:

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Y los ángulos con los ejes:

$$\cos \gamma_x = \frac{v_x}{|\vec{v}|}$$
$$\cos \gamma_y = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$
$$\cos \gamma_z = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

3.2. Propiedades generales de los vectores

Las siguientes propiedades son válidas para cualquier vector o conjunto de vectores, independientemente del sistema de coordenadas que elijamos. Sean 3 vectores arbitrarios:

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$$
$$\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$$
$$\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$$

Entonces, las operaciones lineales de los vectores incluyen:

1. Igualdad de vectores $\vec{A} = \vec{B}$:

$$A_1 = B_1,\ A_2 = B_2,\ A_3 = B_3$$

2. Podemos asociar un vector unitario $\hat{u}_A$ a cualquier vector $\vec{A}$ que posee la misma dirección y sentido:

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

3. Multiplicación por un escalar $\vec{A} = \alpha\vec{B}$

$$\vec{A} = (\alpha B_1, \alpha B_2, \alpha B_3)$$

4. Adición y sustracción de vectores:

$$\text{Adición: } \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$
$$\text{Sustracción: } \vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2, A_3 - B_3)$$

5. Producto escalar de dos vectores $c = \vec{A} \cdot \vec{B}$:

$$c = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + A_3 \cdot B_3$$

O en términos del ángulo θ que forman los vectores:

$$c = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

Es importante reseñar que el producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a cero, puesto que si θ vale 90º (ó 270º), el coseno vale cero.

6. Propiedades conmutativa y distributiva para el producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

7. Producto vectorial de dos vectores $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$:

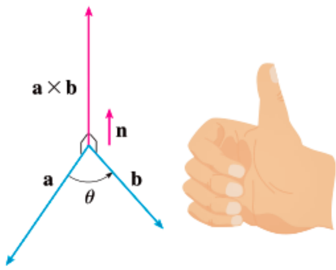
$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

O en términos del ángulo θ y el vector normal $\hat{n}$ a la superficie generada por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{C} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \; \hat{n}$$

Es importante reseñar que el sentido de $\hat{n}$ queda determinado por la regla de la mano derecha: los dedos del puño derecho apuntan en la dirección de rotación que va desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$, mientras que el pulgar indica el sentido de $\hat{n}$. Como consecuencia de ello, el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo. Por ejemplo: $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$.

Esto significa que el producto vectorial nos permite comprobar rápidamente si dos vectores son o no paralelos.



8. Propiedades anticonmutativa y distributiva para el producto vectorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

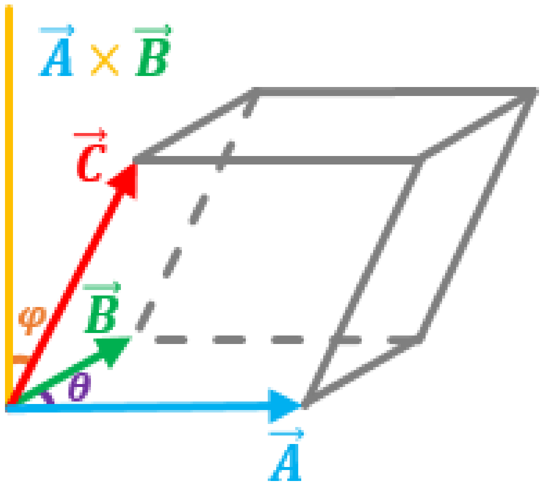
9. Triple producto escalar (producto mixto) y vectorial

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\overrightarrow{A \cdot C}) - \vec{C}(\overrightarrow{A \cdot B})$$

Debemos darnos cuenta de que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\overrightarrow{A \times B}) \times \vec{C}$

Uno de los usos geométricos del triple producto escalar o producto mixto es el cálculo del volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores (en el caso de la figura los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman la base, y la altura es el vector $\vec{C}$, con lo que estaríamos calculando en realidad el producto $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.


$\vec{A} \times \vec{B}$
$\vec{C}$
φ
$\vec{B}$
θ
$\vec{A}$