I-5. Existencia y cálculo de límites.

- Para analizar la no existencia de límite es muy útil el concepto de límite a lo largo de una curva.

Def [Límite a lo largo de una curva].

- Sea $f(x)$ una función escalar de n variables reales, y sea "a" un punto de acumulación de $\mathcal{D}(f)$. Sea $\phi(t)$ una curva continua en $\mathbb{R}^n$ ($\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$), tal que $\phi(0) = a$ y $\exists r>0$ tal que la imagen de $B'_r(0) = (-r,0) \cup (0,r)$ está contenida en $\mathcal{D}(f)$, es decir $\phi(B'_r(0)) \subset \mathcal{D}(f)$. Entonces llamamos

límite de la función $f(x)$ en el punto "a" a lo largo de la curva $\phi(t)$, al límite

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \phi(t)}} f(x) = \lim_{t \to 0} f(\phi(t))$$

es decir al límite de la función de una variable $g(t) = f(\phi(t))$ que obtenemos considerando los valores que la función f toma sobre la curva $\phi(t)$.

- En caso de que solamente $\phi((0,r))$ $\left(\phi((-r,0))\right)$ esté contenido en el dominio de $f(x)$, podemos definir el límite de $f(x)$ a lo largo de la curva $\phi(t)$ como $\lim_{t \to 0^+} f(\phi(t))$ $\left(\lim_{t \to 0^-} f(\phi(t))\right)$.

- De la definición de límite de una función a lo largo de una curva, se sigue que si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = b$, entonces también existe el límite de $f(x)$ en el punto "a", a lo largo de cualquier curva continua $\phi(t)$ que pase por el punto "a" y $\lim_{t \to 0} f(\phi(t)) = b$. Este resultado es muy importante porque nos dice que cuando existe el límite de una función de varias variables en un cierto punto "a", y dicho límite toma el valor b, no importa por qué camino continuo nos acerquemos al punto "a", pues siempre obtendremos como límite el mismo valor b. Utilizando este resultado, se puede demostrar la no existencia del límite de una función dada $f(x)$ en un punto "a". Basta mostrar dos curvas continuas $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ a lo largo de las cuales el límite de la función $f(x)$ en el punto "a", da dos valores distintos b_1 y b_2, para probar que el límite no existe.

Ejemplo 1:

- Consideremos la función $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ y estudiemos la existencia del límite en el punto $(0,0)$. Tomando límite a lo largo de las rectas $y = mx$ resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x+mx}{x-mx} = \frac{1+m}{1-m}$$

Entonces como el resultado depende de m, es decir de la recta por la que nos acercamos al punto $(0,0)$, podemos concluir que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Ejemplo 2:

- Consideremos la función $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

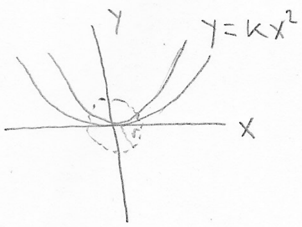
Los límites de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ a lo largo de todas las rectas $y = mx$, coinciden ya que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m x^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{x^2+m^2}\, x = 0$$

Los límites a lo largo de los ejes coordenados $y=0$, y $x=0$, también se anulan, ya que la función se anula sobre dichos ejes. Sin embargo, el límite a lo largo de las parábolas $y = kx^2$ da

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

que no se anula y depende de k. Por tanto $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.



Es clarificador observar que las parábolas $y = kx^2$ son curvas de nivel de la función f, sobre las cuales la función toma el valor constante $c = \frac{k}{1+k^2}$. Todas ellas pasan por el origen de coordenadas $(0,0)$, y esto implica que en cualquier bola abierta $B_r((0,0))$ centrada en $(0,0)$, la función puede tomar una infinidad de valores, y esta es la razón por la que no existe el límite en $(0,0)$.

- Este último ejemplo nos muestra que aunque los límites de una función $f(x)$ a lo largo de todas las rectas que pasan por el punto "a" existen y coincidan, puede no existir el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, porque pueden existir otras curvas que pasan por "a", a lo largo de las cuales el límite no existe o es diferente del obtenido a lo largo de rectas.

Esto nos enseña que calculando el límite a lo largo de curvas podremos comprobar que el límite de una cierta función no existe, pero nunca podremos asegurar por este procedimiento la existencia de un límite. Aquí radica una de las diferencias cruciales entre el cálculo en una y en varias variables. Para los límites en una variable solo hay dos maneras de acercarse al punto donde se toma límite: por la derecha y por la izquierda; y si de ambas maneras se obtiene la misma respuesta, entonces el límite existe.

Por contra, para los límites simultáneos en varias variables (límite doble, triple, etc...) hay infinitas maneras de acercarse al punto donde se toma límite, y cuando el límite múltiple existe, todas deben dar el mismo resultado.

Cálculo de límites para las funciones de varias variables

- Por lo que acabamos de ver, el cálculo de límites múltiples puede resultar difícil, sobre todo por lo que respecta a determinar con certeza que el límite múltiple existe. Ahora, las funciones de varias variables que intervienen se expresan como combinaciones de funciones de una variable, y esto nos permite utilizar los resultados del cálculo en una variable. Recordemos en primer lugar el concepto de infinitésimo

Def [Infinitésimo]

- Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de una variable real $(f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, con $g(x)\geq 0$, se dice que f es un infinitésimo de g en $x=a$, y se escribe en la forma $f=o(g)$ si y solo si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

- Es fácil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades

i) $f_1=o(g_1)$ y $f_2=o(g_2)\Rightarrow f_1+f_2=o(g_1+g_2)$

ii) $f_1=o(g_1)$ y $f_2=o(g_2)\Rightarrow f_1\cdot f_2=o(g_1\cdot g_2)$

- Es importante entender lo que significa la notación $f=o(g)$. Cuando escribimos $f=o(g)$ queremos decir que f es una función, que puede ser desconocida, pero que si la dividimos por g el cociente tiene límite cero, es decir la función f es comparativamente mucho mas pequeña que g en la vecindad de a

- Además el teorema de Taylor para funciones de una variable nos dice:

Teorema [Taylor en una variable]

- Si la función de una variable real $f(x)$ admite p derivadas continuas en un intervalo abierto (x_0-r, x_0+r) alrededor del punto x_0, $\forall h \in (-r,r)$ se cumple la fórmula de Taylor

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2!}f''(x_0)\,h^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p-1)}(x_0)\,h^{p-1} + R_p(f;x_0,h)$$

donde
$$R_p(f;x_0,h) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0+\tau h)\,h^p \qquad (0<\tau<1).$$

es el resto de Lagrange de orden "p", para la función f, en el punto x_0 y para un incremento h de la variable. Debido a que la derivada de orden "p" es continua por hipótesis, se tiene

$$R_p(f;x_0,h) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)\,h^p + o(|h|^p)$$

y por tanto para una función de clase C^p, es decir con p derivadas continuas, podemos escribir

$$f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot h + \dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)\,h^p + o(|h|^p)$$

y este es el resultado que utilizaremos para el cálculo de límites.

Ejemplo 3:

Consideremos la función de dos variables

$$g(x,y) = \frac{e^{xy} - \alpha - \beta xy}{\gamma + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

donde α, β y γ son parámetros. Estudiamos en qué casos la función $g(x,y)$ puede ser continua en $(0,0)$. En primer lugar si $\gamma \neq 0$, el denominador no se anula. Entonces

- Para $\gamma \neq 0 \rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-\alpha-\beta xy}{\gamma+\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y} = \dfrac{1-\alpha}{\gamma}$,

y la función $g(x,y)$ es continua si definimos $g(0,0)=\dfrac{1-\alpha}{\gamma}$.

- Ahora si $\gamma=0$, para que pueda existir el límite doble ha de ser $\alpha=1$, en cuyo caso tenemos una indeterminación en la forma $0/0$. Para resolverla utilizamos la fórmula de Taylor

$$e^u = 1+u+o(|u|) \quad y \quad \operatorname{sen}u = u+o(|u|),$$

y substituyendo en el límite, obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-\alpha-\beta xy}{\operatorname{sen}x \operatorname{sen}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(1-\beta)+o(|xy|)}{xy+x\,o(|y|)+y\,o(|x|)+o(|x|)\,o(|y|)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\beta+\overset{\to 0}{\dfrac{o(|xy|)}{xy}}}{1+\overset{\to 0}{\dfrac{o(|y|)}{y}}+\overset{\to 0}{\dfrac{o(|x|)}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{o(|x|)\,o(|y|)}{xy}}} = 1-\beta.$$

Entonces, cuando $\gamma=0$ y $\alpha=1$, la función es continua si definimos $g(0,0)=1-\beta$.

- Notemos que $\lim_{x\to 0} \dfrac{o(|x|)}{x} = 0$, ya que

$$\frac{o(|x|)}{x} = \frac{|x|}{x}\cdot\frac{o(|x|)}{|x|} \quad y \quad \left|\frac{|x|}{x}\right| \leq 1$$

y $\lim_{x\to 0}\dfrac{o(|x|)}{|x|}=0$ por definición de infinitésimo. Por tanto en virtud del lema 3 $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{o(|x|)}{x}=0$.

Ejemplo 4:

Estudiamos la existencia y el valor del límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^{\operatorname{sen} y}-1}{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})}$$

en función de los parámetros a y b. Utilizando de nuevo $e^u = 1+u+o(|u|)$. resulta

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^{\operatorname{sen} y}-1}{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})} = \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{e^{\operatorname{sen} y \ln x}-1}{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{\operatorname{sen} y \ln x + o(|\operatorname{sen} y \ln x|)}{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})} = \lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{1+\frac{o(|\operatorname{sen} y \ln x|)}{\operatorname{sen} y \ln x}}{\frac{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen} y \ln x}}$$

Ahora, en la última fracción el límite del numerador es 1. Y para el denominador, tomando límite a lo largo de las rectas $y-\frac{\pi}{2} = m(x-1)$, resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2}) \\ y-\frac{\pi}{2}=m(x-1)}} \frac{\operatorname{sen} y \ln x}{a(x-1)+b(y-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+m(x-1)\right) \ln(1+x-1)}{(a+bm)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1+o(|x-1|))(x-1+o(|x-1|))}{(a+bm)(x-1)} = \frac{1}{a+bm}$$

que depende de la dirección si $b\neq 0$. Entonces si $b\neq 0$, el límite propuesto no existe. Ahora si $b=0$

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{\operatorname{sen} y \ln x}{a(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{a(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)+o(|x-1|)}{a(x-1)} = \frac{1}{a}$$

De modo que para $b=0$, el límite existe y tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,\frac{\pi}{2})} \frac{x^{\operatorname{sen} y}-1}{a(x-1)} = \frac{1}{a}.$$

- Cuando se analizan los límites para funciones de dos variables, a veces se utilizan coordenadas polares, sobre todo cuando la función $f(x,y)$ factoriza en la forma $f(x,y) = g(r)\,h(\theta)$. Pero hay que tener cuidado: si $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, y $h(\theta)$ es una función acotada, en virtud del lema 3 se puede asegurar que $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, pero si $h(\theta)$ no es una función acotada, no se puede asegurar la existencia del límite doble. Vemos un par de ejemplos:

Ejemplo 5:

Para $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = r\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta$

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{porque } |\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\theta| \le 1$$

Nota: no hace falta pasar a polares para verlo.

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}\,\underbrace{y}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

$(x,y)\to(0,0)$

Ejemplo 6:

Para $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} = r\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, aunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r = 0$,

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y}$, como puede verse tomando límite a lo largo de las parábolas $y = ax^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a}.$$

Notemos que en este caso, aunque la función $f(x,y)$ factoriza en la forma $g(r)\,h(\theta)$, $h(\theta) = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ no es acotada y por tanto no se puede aplicar el lema 3.