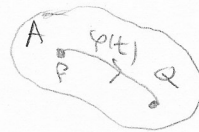


I-6 Propiedades topológicas de las funciones continuas:

- Existen algunos teoremas topológicos sobre funciones continuas que son especialmente útiles para el Cálculo. El primero que enunciaremos hace referencia al concepto de conexión.

Def [Conjunto conexo]

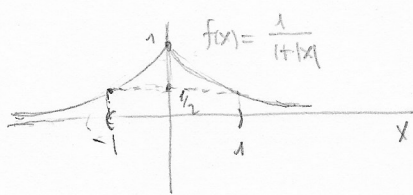
- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice conexo (por arcos) si y sólo si $\forall P, Q \in A$ existe un arco continuo $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, $\varphi(a) = P$, $\varphi(b) = Q$ y $\varphi(t) \in A \quad \forall t \in [a, b]$.



Teorema 1: [de los valores intermedios].

- Dada una función continua $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, consideremos un abierto conexo $A \subset \mathcal{D}(f)$, y un par de puntos $P, Q \in A$, tales que $f(P) = \alpha < \beta = f(Q)$. Entonces f toma todos los valores intermedios entre α y β , es decir $\forall \gamma \in (\alpha, \beta), \exists C \in A$ tal que $f(C) = \gamma$.

- Notemos que este teorema nos dice que la imagen de un abierto conexo $A \subset \mathbb{R}^n$ por una función continua $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un intervalo. Este intervalo imagen no tiene porque ser abierto. Por ejemplo



para la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, la imagen del intervalo abierto $(-1, 1)$ (que es un abierto conexo), es el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

Teorema 2:

Cartagena99

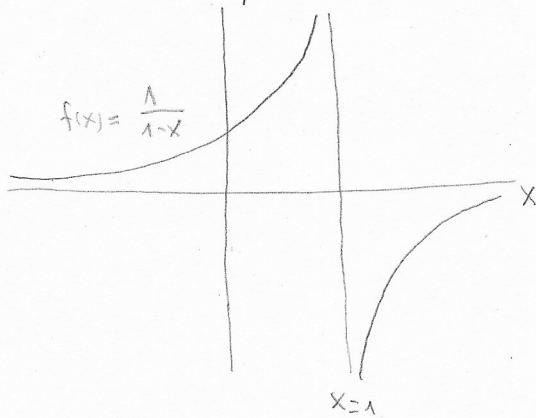
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Teorema 3:

- Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $S \subset \mathcal{D}(f) \Rightarrow$
 f es acotada en S , y f alcanza en puntos de S , los valores
 $M = \sup(f(S))$ y $m = \inf(f(S))$, es decir $\exists k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \quad \forall x \in S$,
y además $\exists P, Q \in S$ tales que $f(P) = M$ y $f(Q) = m$, y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in S$.

- Notemos que si S no es compacto, el resultado del teorema no tiene porque cumplirse. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{1-x}$ definida en el abierto

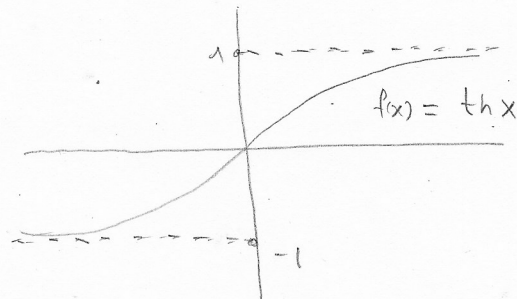


$(-\infty, 1)$ no es acotada superiormente en dicho dominio, ni alcanza en ningún punto de dicho dominio el valor $\inf(f(-\infty, 1)) = 0$.

- Como otro ejemplo

$f(x) = \tanh x$ definido en todo \mathbb{R} (que no es compacto)

está acotada en \mathbb{R} , pero no alcanza en ningún punto los valores $\sup(f(\mathbb{R})) = +1$ e $\inf(f(\mathbb{R})) = -1$



- Como corolario de los teoremas anteriores, también es cierto el siguiente

Teorema 4:

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

Cartagena99

Teorema 5:

• Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y biyectiva $f: S \rightarrow f(S)$, y $S \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto $\Rightarrow f^{-1}$ es continua en $T = f(S)$.

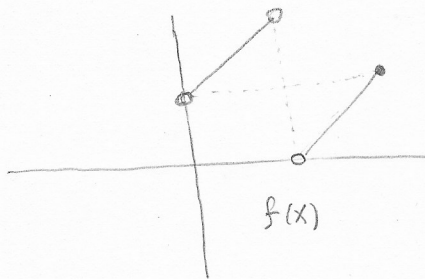
• Es teorema nos dice que si el dominio de definición de f es compacto, no le presenta el caso patológico de una función f que sea continua y biyectiva, pero tal que su inversa no sea continua.

Veamos un ejemplo de este comportamiento patológico

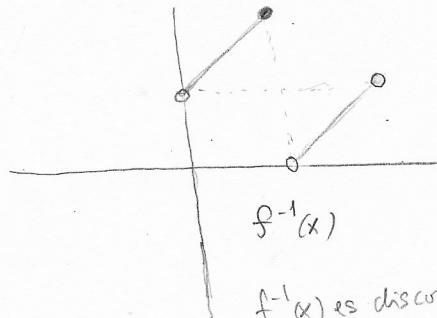
Ejemplo: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$A = (0,1) \cup (1,2] \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1+x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(A) = B = (0,2) \quad \text{y} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -1+x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$



$f(x)$ es continua $\forall x \in A$



$f^{-1}(x)$ es discontinua en $x=1 \in f(A)$

Homeomorfismos:

• Se llaman homeomorfismos a las funciones $f: S \rightarrow T$, $S, T \subset \mathbb{R}^n$ tales que f es continua, f es biyectiva, y $f^{-1}: T \rightarrow S$ es continua.

• Los homeomorfismos son las transformaciones que preservan las propiedades.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

las distancias y ángulos de la geometría euclídea.