BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL

TEMA 5
INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES

RESUMEN TEÓRICO

ÍNDICE

1. ESPACIO VECTORIAL EN $\mathbb{R}^n$

1.1. Concepto de vector en $\mathbb{R}^n$

DEFINICION 1. Todo ente matemático que quede representado por n números reales ordenados es un vector n-dimensional.

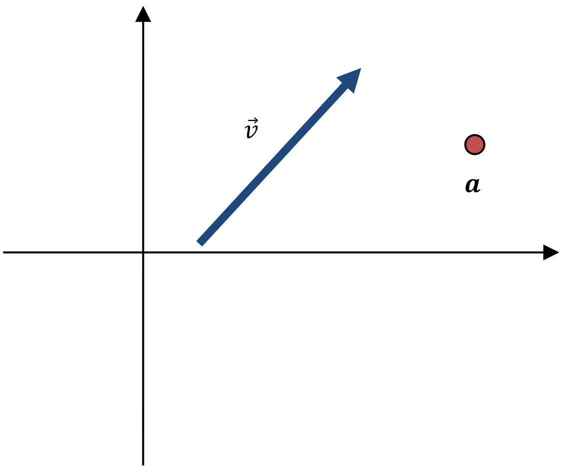
EJEMPLO 1.

a. Analíticamente, la representación es la misma para punto que para vector:

$\vec{v} = \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ Vector

$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ Punto

b. Geométricamente:



En general, se pueden identificar punto y vector tomando el punto como el vector que lo une con el origen de coordenadas.

$\mathbb{R}^n$ es por tanto un conjunto de vectores cuyas componentes son *n* números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n\}$$

1.2. Operaciones entre vectores

DEFINICION 2. Se definen las siguientes operaciones entre vectores:

- Igualdad de vectores:

  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

  $\vec{x} = \vec{y}$ si $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

- Producto por un escalar

  $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

- Suma de vectores.

  $$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

  $$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Propiedades

→ **Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$**

1.3. Espacio vectorial

DEFINICION 3. El conjunto *E* es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}^n$, pues verifica:

1. $(E,+)$ es un grupo conmutativo con la ley interna[1] "+" :

a) La suma de vectores es asociativa:

$$(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$$

b) Existe un único elemento neutro:

$$\exists \overline{0} \in E \,/\, \forall \overline{u} \in E : \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}$$

c) Todo vector de E tiene su opuesto:

$$\forall \overline{u} \in E \,/\, \exists -\overline{u} \in E \,/\, \overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$$

d) La suma de vectores es conmutativa:

$$\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$$

2. La ley externa[2] "producto por un número real (o escalar)" tiene las siguientes propiedades:

a) Distributiva respecto a la suma de escalares:

b) Distributiva respecto a la suma de vectores:

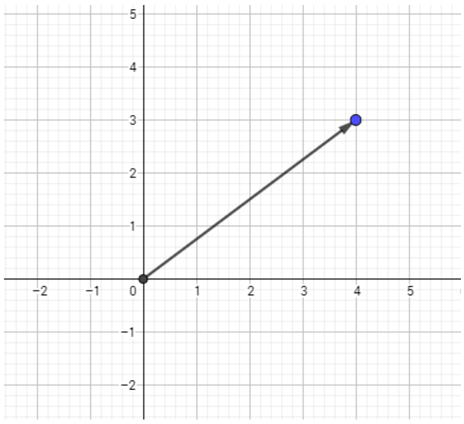
$$\lambda(\overline{u}+\overline{v})=\lambda\overline{u}+\lambda\overline{v}$$

c) Asociativa respecto a los escalares:

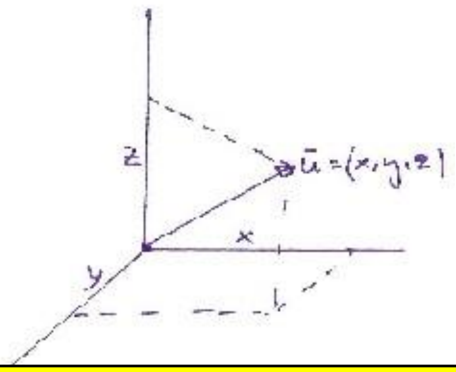
$$(\lambda\mu)\overline{u}=\lambda(\mu\overline{u})$$

d) El escalar (nº real) 1 es el elemento neutro de la operación. $1\overline{u}=\overline{u}$

EJEMPLO 2. El espacio $\mathbb{R}^2$ podemos representarlo como el plano cartesiano y un vector genérico (x,y) como un punto (vector desde el origen) de dicho plano, donde la x representa la "distancia horizontal" al origen y la coordenada y la distancia vertical al origen. Por ejemplo, el vector $\bar{u}=(4,3)$ se representa de la siguiente manera:



De forma análoga el espacio $\mathbb{R}^3$ podemos representarlo en el espacio cartesiano y para cualquier vector genérico las coordenadas representan el "largo", "ancho" y "alto" del punto (vector) desde el origen. Por ejemplo el vector $\bar{u}=(2,3,1)$

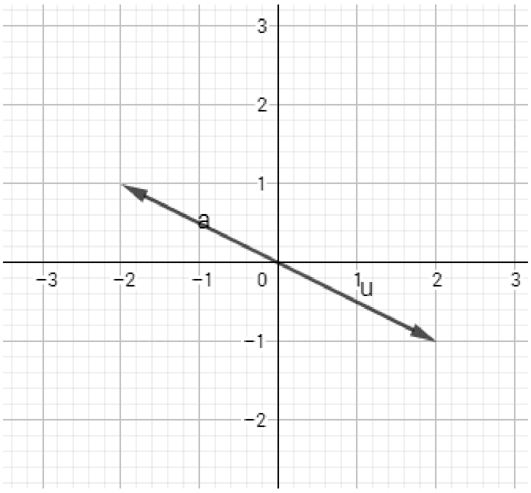


EJEMPLO 3. Consideremos los vectores siguientes de $\mathbb{R}^2$

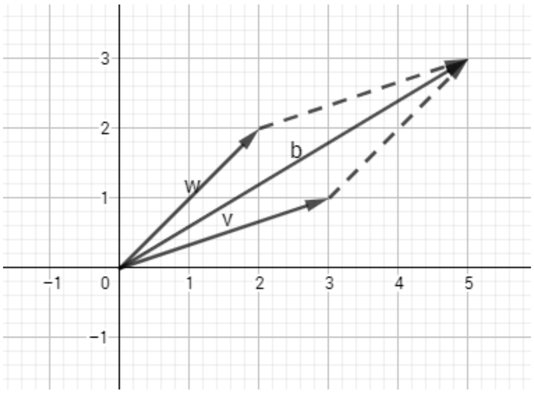
$$\overline{u} = (2,-1) \quad \overline{v} = (3,1) \quad \overline{w} = (2,2)$$

Se verifica que

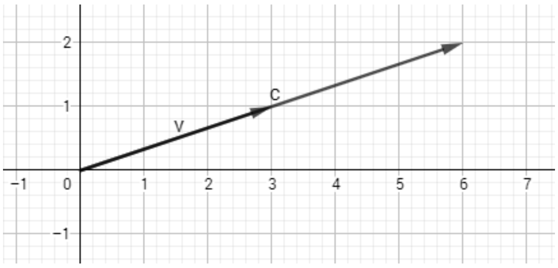
$\bar{a} = -\bar{u} = (-2,1)$



$\bar{b} = \bar{v} + \bar{w} = (3,1) + (2,2) = (5,3)$



$\bar{c} = 2\bar{v} = (6,2)$



2. CONCEPTOS ESPECÍFICOS DE ESPACIOS VECTORIALES

2.1. Combinación lineal de vectores

DEFINICION 4. Dado un conjunto de vectores $\overline{v_1}, \dots, \overline{v_m} \in \mathbb{R}^n$, decimos que otro vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ es **combinación lineal** de los vectores del conjunto si existen *m* números reales $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\bar{u} = \alpha_1\bar{v}_1 + \cdots + \alpha_m\bar{v}_m$$

DEFINICION 5. Diremos, además que los números reales, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son las **coordenadas del vector** $\bar{u}$ respecto a los vectores $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$

EJEMPLO 4. Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ $\bar{u} = (2,1,-1)$ $\bar{v} = (3,2,0)$

Podemos formar combinaciones lineales de estos vectores:

$$\lambda(2,1,-1) + \beta(3,2,0) = (2\lambda + 3\beta, \lambda + 2\beta, -\lambda)$$

Por ejemplo:

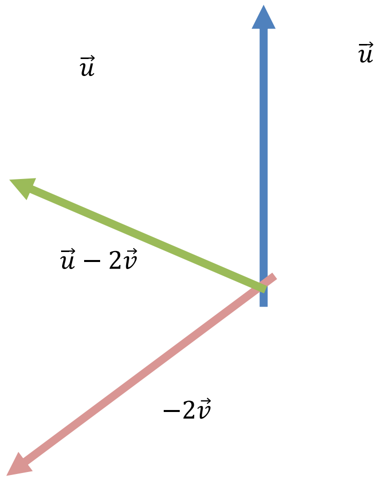
$$4(2,1,-1) - 2(3,2,0) = (2,0,-4)$$

Podemos asegurar que el vector de **componentes** $(2,0,-4)$ es "combinación lineal (C.L.)" de los vectores $\{\bar{u} = (2,1,-1) \quad \bar{v} = (3,2,0)\}$ y sus **coordenadas** respecto a estos vectores son 4 y -2

PROPIEDAD 1. El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores, tomando como coordenadas el escalar cero.

$$\bar{0} = 0\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + \ldots + 0\bar{u}_n$$

PROPIEDAD 2. Si analizamos la definición 3 desde el punto de vista geométrico en $\mathbb{R}^2$ **(plano)**



COMBINACIÓN LINEAL

2.2. Dependencia e independencia lineal de vectores

DEFINICION 6. Diremos que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ son **linealmente dependientes** (L.D.) si alguno de ellos es combinación lineal del resto

$$u_j = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + \lambda_{j+1} u_{j+1} + \cdots + \lambda_n u_n$$

EJEMPLO 5. Los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,2,-1),(1,1,2),(0,-1,3)\}$ son linealmente dependientes.

Se puede observar que el segundo vector es la suma de los otros dos[3]

$$(1,1,2) = (1,2,-1) + (0,-1,3)$$

DEFINICION 7. Diremos que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ son **linealmente independientes** (L.I.) si ninguno de ellos es combinación lineal del resto

EJEMPLO 6. Los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,2,-1),(0,2,1)\}$ son linealmente independientes.

Para que fuesen dependientes uno debería ser múltiplo del otro, es decir,

$$(1,2,-1) = \lambda(0,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} 1=0 \\ 2=2\lambda \\ -1=\lambda \end{array}\right\}$$

Claramente el sistema es incompatible (sin solución). Esto es, no existe λ que cumplas las condiciones anteriores.[4]

PROPIEDAD 3. (**Condición necesaria y suficiente de independencia lineal**) Los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ son linealmente independientes si y solo si la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de dichos vectores es multiplicar cada vector por el escalar cero.

$$\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \text{ son L.I. } \Leftrightarrow \left[\text{si } \overline{0} = \lambda_1\overline{u}_1 + \lambda_2\overline{u}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{u}_n\overline{x} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\right]$$

Observación: Por tanto, si podemos obtener el vector nulo como combinación lineal de los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ con coordenadas distintas de cero implica que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 7. Si consideremos los vectores siguientes $\{(1,2,-1),(1,1,2),(0,-1,3)\}$ podemos obtener el vector nulo como combinación lineal de ellos de la siguiente forma

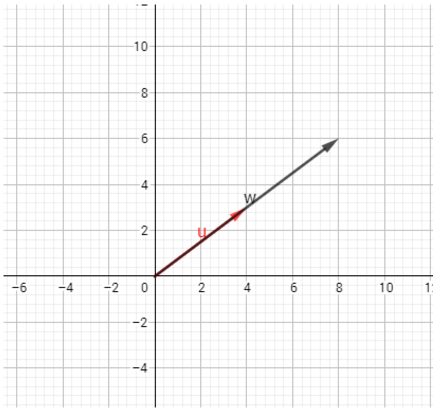
$$(0,0,0) = 2(1,2,-1) - 2(1,1,2) + 2(0,-1,3)$$

Hemos obtenido el vector nulo como C.L. de los vectores siendo las coordenadas distintas de cero, esto implica, según la propiedad anterior, que los vectores $(1,2,-1),(1,1,2),(0,-1,3)$ son linealmente dependientes.

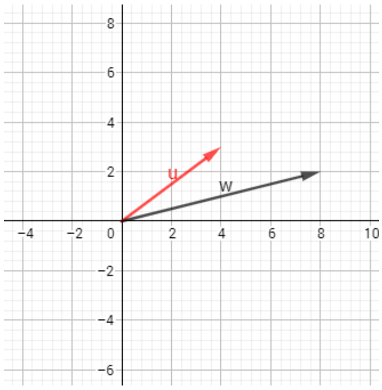
2.2.1. Interpretación geométrica en $\mathbb{R}^3$

<u>Dependencia e independencia de dos vectores</u>

Dos vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2$ si son múltiplos uno del otro, es decir, si pertenecen a la misma recta. En este caso $\overline{u}$ y $\overline{w}$ son linealmente dependientes, están en la misma recta:

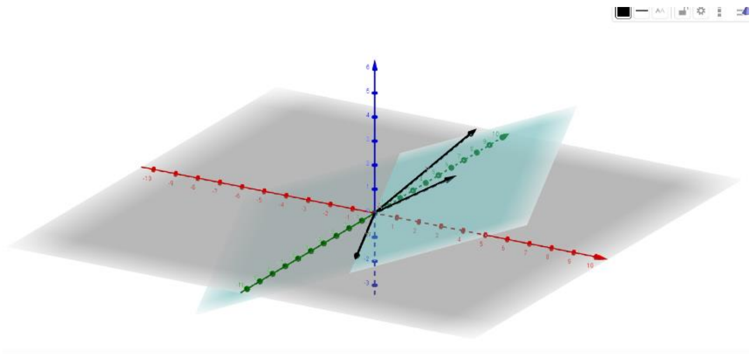


Dos vectores son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ si no son múltiplos uno del otro, es decir, no pertenecen a la misma recta.



Dependencia e independencia de tres vectores

Tres vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$ si pertenecen al mismo plano ya que uno de ellos se podrá obtener como combinación de los otros dos



Tres vectores son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ si no son coplanarios (no están en el mismo plano)

Se verifica que el rango de la matriz A coincide con el máximo número de vectores L.I. de entre los vectores dados.

Por tanto:

si $r(A)=m$=nº de vectores dados $\Rightarrow$ los vectores serán L.I.

si $r(A)<m$=nº de vectores dados $\Rightarrow$ los vectores serán L.D.

EJEMPLO 8. Comprobar que los vectores $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0),(1,-1,1,6)\}$ son L.D.

Formamos la matriz de los vectores dados y calculemos su rango.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Existe un menor de orden dos distinto de cero utilizando las dos primeras columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow r(A)\geq 2$$

Podemos asegurar que los dos primeros vectores (columnas) $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0)\}$ son L.I. entre si.

Añadiendo la tercera columna y orlando el menor distinto de cero comprobemos los menores de orden tres.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0$$

No existen menores de orden tres distintos de cero, por tanto $r(A)=2<3$. Lo que implica que los tres vectores $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0),(1,-1,1,6)\}$ son L.D. Además podemos asegurar que el tercero es combinación lineal de los dos primeros (ya que los dos primeros son L.I).

EJEMPLO 9. Comprobar que los vectores $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0),(2,1,-1,6)\}$ son L.I.

Formamos la matriz de los vectores dados y calculemos su rango.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos asegurar que los dos primeros vectores (columnas) $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0)\}$ son L.I. entre si.
Si añadimos la tercera columna y orlamos el menor distinto de cero comprobamos los menores de orden tres.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Hemos encontrado un menor de orden tres distinto de cero y al no existir más columnas entonces $r(A)=3$. Lo que implica que los tres vectores $\{(1,0,0,3),(1,1,-1,0),(2,1,-1,6)\}$ son L.I.

2.3. Sistema Generador de un espacio vectorial

DEFINICION 8. Sea E un espacio vectorial. Diremos que los n vectores $\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n$ son **sistema generador** de espacio vectorial si todos los vectores del espacio son combinación lineal de dichos vectores.

$\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n$ es un S.G. del esp. vectorial E si y solo si $\forall \bar{x} \in E \Rightarrow \bar{x} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + ... + \lambda_n\bar{u}_n$.

Es decir, es sistema generador ya que gracias a $\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n$ podemos generar cualquier vector $\bar{x}$ como combinación lineal de ellos.

Es importante destacar que no necesitamos que $\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n$ sean L.I., ahora bien, <u>debe haber tantos independientes como para generar cualquier dimensión del espacio considerado</u>.

Nota: De este modo, para que un conjunto de vectores sea un sistema generador de $\mathbb{R}^n$, el rango de la matriz que formen tiene que ser *n*.

Nota: Un sistema Generador de $\mathbb{R}^3$ puede estar formado por 5 vectores de tres componentes. Ahora bien, entre esos 5 vectores debe haber al menos 3 linealmente independientes, para poder general cualquier vector en las tres dimensiones de $\mathbb{R}^3$.

Nota: La importancia de que los vectores $\bar{u}_1,\bar{u}_2,...,\bar{u}_n$ sean sistema generador del espacio es precisamente que a partir de ellos podemos "generar" (haciendo combinaciones lineales) todos los vectores del espacio vectorial, es decir, que conocidos esos n vectores conocemos todos los garantizado por el hecho de que los vectores del sistema generador sean linealmente independientes entre sí. A ese número le llamaremos <u>dimensión</u> del especio vectorial.

DEFINICION 10. Denominaremos dimensión del espacio vectorial al número de vectores que forman cualquier base del espacio vectorial y se denota por $Dim(E)$.

La siguiente propiedad aclara aún más este concepto:

PROPIEDAD 5. $Dim(E) = n \Rightarrow$ n = número de componentes fijadas libremente para determinar a cualquier vector del espacio.

Por eso, podemos asegurar que:

- $Dim(\mathbb{R}^2) = 2$, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano) tienen 2 componentes, y sus bases, 2 vectores.
- $Dim(\mathbb{R}^3) = 3$, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ (espacio *tridimensional*) tienen 3 componentes, y sus bases, 3 vectores.
- $Dim(\mathbb{R}^4) = 4$, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ tienen 4 componentes, y sus bases, 4 vectores.
- $Dim(\mathbb{R}^n) = n$, de modo que todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ tienen n componentes, y sus bases, n vectores.

Nota: Al coincidir en $\mathbb{R}^n$ el número de componentes del vector y el número de vectores de una base, la matriz formada por los vectores de la base es cuadrada. Por ello:

PROPIEDAD 6. Considerando n vectores de $\mathbb{R}^n$ $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ y A la matriz cuadrada de orden n formada por dichos vectores, entonces se verifica que los vectores son base de $\mathbb{R}^n$ si y solo si $|A| \neq 0$.

EJEMPLO 10. Comprobar si los vectores $\{(2,1,0),(1,2,1)\}$ forman base de $\mathbb{R}^3$

Dado que la $Dim(\mathbb{R}^3) = 3$, todas las bases tienen 3 vectores. Por tanto, el conjunto de vectores $\{(2,1,0),(1,2,1)\}$ no pueden ser base de $\mathbb{R}^3$ ya que solamente son dos vectores.

Podemos comprobar que son L.I. estudiando el rango de la matriz de esos dos vectores

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 11. Comprobar si los vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1),(3,-1,0)\}$ forman base de de $\mathbb{R}^3$

Dado que la $Dim(\mathbb{R}^3) = 3$ todas las bases tienen 3 vectores. Por tanto el conjunto de vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1),(3,-1,0)\}$ no pueden ser base de $\mathbb{R}^3$ ya que son cuatro vectores. Al ser la dimensión tres el máximo número de vectores L.I., lo que implica que el conjunto de vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1),(3,-1,0)\}$ son L.D.

Los vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1),(3,-1,0)\}$ podrían formar S.G. Bastaría con que tres de ellos formasen base, es decir, fuesen L.I. Comprobémoslo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 .$$

Los tres primeros vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1)\}$ son L.I. Dado que son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ entonces son base de $\mathbb{R}^3$. Esto es, son también S.G.

Por lo tanto los vectores $\{(2,1,0),(1,2,1),(1,1,1),(3,-1,0)\}$, también, son S.G. de $\mathbb{R}^3$ (pero L.D.)

EJEMPLO 12. Comprobar si los vectores $\{(-1,2,0),(1,2,1),(0,1,1)\}$ forman base de $\mathbb{R}^3$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = 3$$

Los vectores $\{(-1,2,0),(1,2,1),(0,1,1)\}$ son L.I.

Dado que $Dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y según la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** basta q ue tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean L.I. para que formen base de dicho espacio.

3. SUBESPACIO VECTORIAL

Tenemos dos tipos de subespacios:

DEFINICION 12. Dado un conjunto de vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$ de un espacio vectorial E, denotaremos por $L\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ al subconjunto de E formado por todas las combinaciones lineales de los m vectores.

$$L\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\} = \{\bar{x} \in E \ / \ \bar{x} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_m\bar{u}_m\}$$

Al subconjunto $L\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ se le denomina **subespacio o variedad lineal generada por los vectores** $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$

EJEMPLO 13. Sea el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(1,2,1),(2,4,2)\}$

$$L\{(1,2,1),(2,4,2)\} = \{(3,6,3),(-1,-2,-1),...\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 / \ \bar{x} = \lambda(1,2,1) + \beta(2,4,2)\} =$$

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineal y homogéneo[5]

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{Bmatrix} \text{,o matricialmente, } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

La siguiente propiedad nos define el otro tipo de subespacios que vamos a tratar:

PROPIEDAD 7. El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y además su dimensión coincide con $n - R(A)$.

$$S = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{0}\} \text{ es un subespacio y } Dim(S) = n - r(A)$$

DEFINICION 13. El sistema de ecuaciones homogéneo (suprimiendo las ecuaciones redundantes) que define un subespacio vectorial se le denomina **ecuaciones cartesianas del subespacio.**

El número de ecuaciones mínimo para determinar el subespacio es igual a $n - Dim(S)$.

OBSERVACIÓN: Para determinar una base de un subespacio vectorial es suficiente con resolver el sistema con las ecuaciones cartesianas del subespacio, que normalmente será compatible indeterminado (infinitas soluciones).

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \begin{array}{c} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{array} \right\}$$

Calculemos en primer lugar la dimensión del subespacio:

La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontramos un menor de orden dos distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

Se comprueba que el único menor de orden tres es nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

De lo que se deduce que:

$$Dim(S) = n - r(A)$$
$$Dim(S) = 3 - 2 = 1$$

Al ser el rango de la matriz de coeficientes 2 una de las ecuaciones es redundante y puede ser suprimida. Esta ecuación puede ser la tercera ya el menor de orden dos distinto de cero estaba formado por las dos primeras ecuaciones:

Ecuaciones cartesianas del subespacio S:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \begin{array}{c} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$$

Una base del subespacio estará formada por un solo vector al ser la dimensión uno. Para encontrar dicha base tenemos que resolver el sistema. Dado que es un sistema con tres incógnitas y dos ecuaciones (L.I.) el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones=vectores del subespacio). Dichas soluciones dependerán de un parámetro libre:

$$2x - y = 0 \Big\} \quad \Big\{ y = 2x$$

Para determinar una base únicamente necesitamos un vector del subespacio ya que la dimensión era uno. Para ello, basta con dar un valor no nulo al parámetro. Por ejemplo $\lambda = 1$

Base de subespacio: $\{(1,2,1)\}$

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad \begin{array}{c} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} = L\{(1,2,1)\}$$

EJEMPLO 15. (Determinación de las ecuaciones cartesianas a partir de una base)

Sea el siguiente subespacio $S = L\left(\{(1,2,1,0),(-2,-4,0,1)\}\right)$

Como ya hemos visto que el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** b) se verifica que $Dim(S) = 2$. Lo que implica que el número de ecuaciones cartesianas que tienen que verificar los vectores de dicho subespacio son:

$$\text{nº de ecuaciones } = n - Dim(S) = 4 - 2 = 2$$

Consideramos un vector genérico de $\mathbb{R}^4, (x,y,z,t)$. Este vector pertenece al subespacio si es combinación lineal de los vectores de la base del subespacio $\{(1,2,1,0),(-2,-4,0,1)\}$. Esto implica que los tres vectores $\{(x,y,z,t),(1,2,1,0),(-2,-4,0,1)\}$ son L.D. De lo que ha de verificarse que el rango de la matriz formada por esos tres vectores debe ser dos.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ y & 2 & -4 \\ z & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz será dos si todos los menores de orden tres son nulos. Calculando dos menores de orden tres igualados a cero obtendremos las ecuaciones cartesianas del subespacio.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ y & 2 & -4 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4z - 2y + 4z + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ y & 2 & -4 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4t + 4t - y = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

3.1. Interpretación geométrica de los subespacio de $\mathbb{R}^3$

Gráficamente los subespacios de dimensión uno en $\mathbb{R}^3$ son rectas que pasan por el origen (el vector nulo siempre pertenece al subespacio).

Todos los vectores son combinación lineal (múltiplos) de un solo vector que forma la base del subespacio

$$S = L\{(2,1,2)\}$$

$$S = \{\lambda(2,1,2)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(2\lambda, \lambda, 2\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Gráficamente los subespacios de dimensión dos en $\mathbb{R}^3$ son planos que pasan por el origen.

Todos los vectores son combinación lineal (múltiplos) de los dos vectores que forman la base del subespacio

$$S = L\{(1,1,0), (2,1,1)\}$$

$$S = \{\lambda(1,1,0) + \beta(2,1,1)\ \forall\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(\lambda + 2\beta, \lambda + \beta, \beta)\ \forall\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

4. TRANFORMACIÓN LINEAL

Uno de los análisis económicos más común es el estudio de procesos secuenciales, es decir, estudiar como una situación evoluciona a lo largo de una secuencia de lugares o en un número de periodos de tiempo. Si esta evolución se realiza de modo lineal, conocido el estado inicial podemos averiguar el estado al cabo de n secuencias mediante el análisis de transformaciones lineales o aplicaciones lineales.

4.1. Aplicación lineal.

DEFINICION 14. (Aplicación Lineal): Dados dos espacios vectoriales, E y E', diremos que una aplicación, f, entre ambos espacios es una **aplicación lineal** si verifica los dos siguientes propiedades:

Nota: Las aplicaciones lineales reciben el nombre también de homomorfismos, y de endomorfismos cuando están definidas entre el mismo espacio vectorial.

PROPIEDAD 8. Toda aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E de dimensión n y E' de dimensión m es de la forma:

$$f : E \longrightarrow E'$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ... y_m)$$

donde:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

siendo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ las coordenadas de un vector genérico en función de una base de E e $(y_1, y_2, ... y_m)$ un vector genérico de E'

DEFINICION 15. (Expresión matricial). Según la propiedad anterior, cualquier aplicación lineal viene determinada por una matriz de orden mxn.

$$f: \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^m$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

siendo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 16. Calcular la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal

$$f: \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = (2x + y, -y, 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y})$$

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 17. Calcular la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal

$$g:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y,z)=(-y+2z, 6\text{x}-2\text{y}+\text{z})$$

El orden de la matriz asociada a la aplicación f es 2x3 y dicha matriz es:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 6 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto la expresión matricial de la aplicación es:

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 6 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

4.2. Autovalores y autovectores.

DEFINICION 16. Dado un endomorfismo, f, de un espacio vectorial se dice que un vector $\overline{u}$ es un autovector del endomorfismo si la imagen de dicho vector es un múltiplo de él. Esto es:

$$f(\overline{u})=\lambda\overline{u}$$

Si el endomorfismo viene determinado por una matriz cuadrada A, se dice que el vector $\overline{u}$ es un *autovector de la matriz*.

DEFINICION 17. Dado un endomorfismo, f, de un espacio vectorial se dice que un escalar λ es un autovalor del endomorfismo si existe un vector $\overline{u}\neq\overline{0}$ tal que:

$$f(\overline{u})=\lambda\overline{u}$$

Si el endomorfismo viene determinado por una matriz cuadrada A, se dice que el escalar λ es

EJEMPLO 18. Dado el siguiente endomorfismo

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$$

Comprobar que el vector $\bar{u} = (4,6)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 4$

$$f(4,6) = (4 + 2 \cdot 6, 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6) = (16,24) = 4 \cdot (4,6)$$

PROPIEDAD 9. El subconjunto formado por todos los autovectores asociados un determinado autovalor, λ , forman un subespacio vectorial. A dicho subespacio le denotaremos por S_λ

$$S_\lambda = \{\bar{u} \in E \ / \ f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}\}$$

PROPIEDAD 10. Dos autovectores asociados a distintos autovalores son linealmente independientes.

4.2.1. Calculo de los autovalores.

DEFINICION 18. (Polinomio característico): Dado un endomorfismo definido por una matriz A

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

Se denomina polinomio característico del endomorfismo o de la matriz A al determinante de la matriz $(A - \lambda I)$.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

PROPIEDAD 11. Las raíces del polinomio característico, si existen, son los autovalores del endomorfismo (o de la matriz), es decir, las soluciones de la ecuación:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=3\end{cases}$$

EJEMPLO 20. Calcular los autovalores del endomorfismo asociado a la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$

Polinomio característico:

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&-1\\2&5-\lambda&-2\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)-2-2+(5-\lambda)+2(4-\lambda)-2(2-\lambda)=$$

$$p(\lambda)=-\lambda^3+11\lambda^2-39\lambda+45$$

Calculemos los autovalores (raíces del polinomio característico)[6]:

$$-\lambda^3+11\lambda^2-39\lambda+45=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=3\ \text{(multiplicidad 2)}\\ \lambda=5\ \text{(multiplicidad 1)}\end{cases}$$

EJEMPLO 21. Calcular los autovalores del endomorfismo asociado a la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$

Polinomio característico:

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

Calculemos los autovalores (raíces del polinomio característico):

$$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$$

Esta matriz no posee autovalores reales y por tanto tampoco autovectores

4.2.2. Calculo de los autovectores:

Dado que el subconjunto de los autovectores asociados a un mismo autovalor forman un subespacio vectorial, podemos definir para cada uno una base del subespacio.

PROPIEDAD 12. El conjunto de autovectores asociados a un mismo autovalor son las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

endomorfismo asociado a la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Recordemos (ver ejemplo 20) que los autovalores de la matriz son $\lambda = 5$ (simple) y $\lambda = 3$ (doble).

Calculemos base del subespacio asociado al autovalor $\lambda = 5$:

$$S_{\lambda=5} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (A-5I)\bar{x} = \bar{0}\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \begin{pmatrix} 4-5 & 1 & -1 \\ 2 & 5-5 & -2 \\ 1 & 1 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=5} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{matrix} -x+y-z=0 \\ 2x-2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{matrix} \right\}$$

Calculemos el rango de la matriz de coeficientes

Existe un menor de orden dos no nulo: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$

Dado que el único menor de orden tres es nulo $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ entonces $r(A) = 2$

Por lo tanto la dimensión del subespacio $S_{\lambda=5}$ es 1:

$$Dim\left(S_{\lambda=5}\right) = 3 - r(A-5I) = 3 - 2 = 1$$

Las ecuaciones cartesianas del subespacio $S_{\lambda=5}$ son:

$$\left.\begin{matrix} -x+y-z=0 \\ 2x-2z=0 \end{matrix}\right\}$$

Las soluciones dependerán de un parámetro. Solucionando el sistema obtenemos:

$$\left.\begin{matrix} x=z \\ y=2z \end{matrix}\right\}$$

Dando un valor distinto de cero al parámetro, por ejemplo $z=1$, obtenemos una base del

$$S_{\lambda=5} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (A-3I)\bar{x} = \bar{0}\} = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \begin{pmatrix} 4-3 & 1 & -1 \\ 2 & 5-3 & -2 \\ 1 & 1 & 2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=5} = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \begin{matrix} x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{matrix}\right\}$$

El rango de la matriz de coeficientes es igual a 1 ya que la segunda y tercera fila (columna) son múltiplo de la primera (todos los menores de orden dos son nulos)

Por lo tanto la dimensión del subespacio $S_{\lambda=3}$ es 2:

$$Dim(S_{\lambda=3}) = 3 - r(A-3I) = 3-1 = 2$$

Las ecuaciones cartesianas (suprimiendo las redundantes) del subespacio $S_{\lambda=3}$ son:

$$x+y-z=0\}$$

Las soluciones dependerán de dos parámetros. Solucionando el sistema obtenemos:

$$x=-y+z\}$$

La base del subespacio estará formada por dos vectores linealmente independiente. Los obtendremos dando valores (no nulos) a los parámetros:

Si $y=1, z=0 \Rightarrow (-1,1,0)$

Si $y=0, z=1 \Rightarrow (1,0,1)$

Ambos vectores son L.I. por tanto forman base del subespacio

$$S_{\lambda=3} = L\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$$

5. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ CUADRADA

5.1. Matrices semejantes

DEFINICION 19. (Matrices semejantes). Diremos que dos matrices cuadradas, A y B son semejantes si existe un tercera matriz, P regular[7] tal que se verifica que:

$$A \cdot P = P \cdot B$$

Despejando una de las dos matrices esta condición se puede escribir[8]:

DEFINICION 20. (**Matriz diagonalizable**): Diremos que una matriz cuadrada A (o el endomorfismo asociado a dicha matriz) es diagonalizable si existe una matriz diagonal[9] semejante a ella, es decir,

A es diagonalizable si existe una matriz diagonal Λ y otra matriz P regular tal que:

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$$

Enunciemos algunas propiedades que nos permitirán demostrar cuando una matriz es diagonalizable y calcular la matriz diagonal semejante y la matriz P.

PROPIEDAD 13. Si una matriz A es diagonalizable entonces la matriz diagonal semejante esta formada por los autovalores de la matriz A.

Observaciones: Esto implica que:

- las raíces del polinomio característico tienen que ser todas reales para que la matriz sea diagonalizable, es decir, si alguna de ellas no es real entonces la matriz no es diagonalizablePROPIEDAD 9
- Si la matriz es diagonalizable y alguna raíz del polinomio característico es múltiple en la matriz diagonal el autovalor se repetirá tantas veces como la multiplicidad de dicha raíz.
- Que todas las raíces del polinomio sean reales no implica que la matriz sea diagonalizable.

PROPIEDAD 14. (Condición necesaria y suficiente de diagonalización) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A (o el endomorfismo asociado) sea diagonalizable es que exista una base del espacio vectorial formada por autovectores.

PROPIEDAD 15. Si la matriz cuadrada A es diagonalizable, es decir, $A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ la matriz P esta formada (sus columnas) por una base de autovectores.

Observaciones: Teniendo en cuenta la PROPIEDAD 10, en la práctica podemos afirmar que:

- Si todos los autovectores, las raíces del polinomio característicos son distintos y reales entonces la matriz será diagonalizable. Cada uno de ellos aparecerá una sola vez en la matriz diagonal y la base de autovectores estará formada por un autovector por cada autovalor.
- La matriz será diagonalizable si la suma de las dimensiones de los subespacios de autovectores es igual la dimensión del espacio vectorial

- De lo anterior se demuestra que para que la matriz sea diagonalizable la dimensión cada subespacio de autovectores de un mismo autovalor tiene que coincidir con la multiplicidad de dicho autovalor (raíz del polinomio característico).

EJEMPLO 23. Comprobar que la matriz siguiente no es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

<u>Cálculo de los autovalores:</u>

$$p(\lambda) = 0 = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \ \ \text{(doble)} \\ \lambda = 2 \ \ \text{(simple)} \end{cases}$$

Calculo de la dimensión de los subespacios de autovectores:

<u>Dimensión del subespacio</u> $S_{\lambda=2}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz $A-2I$ es dos ya que existe un menor de orden distinto de cero y el único menor de orden tres es cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto se verifica que:

$$Dim(S_{\lambda=2}) = 3 - r(A-2I) = 3 - 2 = 1$$

<u>dimensión del subespacio</u> $S_{\lambda=1}$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto se verifica que:

$$Dim(S_{\lambda=1}) = 3 - r(A-I) = 3 - 2 = 1$$

Para que la matriz fuese diagonalizable la suma de las dimensiones de los subespacios de autovectores tendría que ser igual al orden de la matriz. Es fácil comprobar que esta condición no se cumple:

$$3 \neq Dim(S_{\lambda=2}) + Dim(S_{\lambda=1})$$
$$3 \neq 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto la matriz A no es diagonalizable

EJEMPLO 24. Comprobar que la matriz del ejemplo 22 es diagonalizable:

La autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ son $\lambda = 5$ (simple) y $\lambda = 3$ (doble)

Las dimensiones de los subespacios de autovectores son, respectivamente:

$$Dim\left(S_{\lambda=5}\right) = 1$$
$$Dim\left(S_{\lambda=3}\right) = 2$$

Por tanto la matriz es diagonalizable ya que la suma de las dimensiones de los subespacios de autovectores coincide con el orden de la matriz:

$$Dim(\mathbb{R}^3) = Dim\left(S_{\lambda=5}\right) + Dim\left(S_{\lambda=3}\right)$$
$$3 = 1 + 2$$

La matriz diagonal semejante a la matriz dada es;

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz P es la matriz formada por la base de autovectores[10]:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

EJEMPLO 25. Comprobar que la matriz siguiente es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 6 + (1-\lambda) - 8(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda$$

Calculo de los autovalores

$$p(\lambda) = 0 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Por lo tanto al ser los tres autovalores reales y distintos podemos asegurar que la matriz es diagonalizable (la dimensión de cada uno de los subespacios de autovectores es uno)
La matriz diagonal semejante es:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 26. Calcular la matriz A diagonalizable tal que los autovalores son

$\lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = -2$ y una base de autovectores asociados (en el mismo orden) son

$\{(1,0-1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

Dado que la matriz es diagonalizable se verificara que:

Por lo tanto se puede calcular la matriz como sigue[11]:

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$