Tema 9: Series de números reales

Asignatura: Cálculo

Prof.: I. V. Toranzo **GII**

6.1. Series de números reales

Este tema constituye una continuación del tema sobre sucesiones de números reales, centrándose en el estudio del comportamiento de la suma de los infinitos términos de una sucesión dada, i.e.,

$$s_\infty = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

Dado que la suma de infinitos términos no está definida, se hace necesario introducir el concepto de *sumas parciales*, denotadas s_n, definidas como la suma de n términos de la sucesión dada,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{6.2}$$

que constituyen por sí mismas una sucesión, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, cuyos términos son sumas con número de sumandos finito, i.e.,

$$s_1 = a_1\,, \quad s_2 = a_1 + a_2\,, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3\,, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\,, \ldots$$

De forma que la suma infinita de una sucesión quedará definida en términos de sus sumas parciales. Así, si la suma infinita, s_∞, de una sucesión podrá calcularse siempre y cuando las sumas parciales, s_n, de la misma se aproximen a un mismo valor, i.e., exista $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

Nota 1:
Por supuesto, existirán sucesiones cuya suma infinita no esté definida en caso de que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

La suma infinita, $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, recibe el nombre común de **serie infinita** o **serie**.

En este sentido, conviene establecer qué se entiende por una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos términos se pueden sumar o **sucesión sumable**.

6.1.1. Definición

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se dice que es **sumable** si la sucesión de sus sumas parciales, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, **converge**, i.e.,

1. $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = S$
2. $S < \infty$

Se dice entonces que

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = S \tag{6.3}$$

siendo S la **suma** de dicha sucesión.
Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no será sumable cuando la sucesión de las sumas parciales, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, **diverja**, i.e., en el caso de que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad \text{o} \quad \nexists \lim_{n\to\infty} s_n \tag{6.4}$$

Ejemplo 1:
Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la que el término general de la sucesión de sumas parciales viene dado por

$$s_n = \frac{3n}{7n+9}$$

Calcular su suma, i.e., s_∞

Dado que la sucesión de las sumas parciales es convergente,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+9} = \frac{3}{7} < \infty$$

se tiene que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, i.e.,

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+9} = \frac{3}{7}$$

Luego la suma de la sucesión es $S = \frac{3}{7}$

En general, no suele sencillo calcular el término general de la sucesión de sumas parciales de una sucesión, salvo en ciertos casos particulares. Uno de ellos son las *progresiones geométricas*, cuya serie asociada recibe el nombre de **serie geométrica**.

Ejemplo 2: Suma de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{c\,r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con c y r constantes reales y donde r se denomina *razón* de la progresión. Entonces, si $r \neq 1$ el término n-ésimo de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dado por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} c\, r^k = c\, \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \tag{6.5}$$

y la suma resulta

$$s_\infty = c + c\,r + c\,r^2 + \ldots + c\,r^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c\,r^n = \frac{c}{1-r} \tag{6.6}$$

<u>**Demostración de** (6.5)</u>

Si $r \neq 1$,

$$s_n = c + c\,r + c\,r^2 + \ldots + c\,r^n \quad \text{y} \quad r\cdot s_n = c\,r + c\,r^2 + c\,r^3 + \ldots + c\,r^{n+1}$$

Restando ambas ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} s_n - r\cdot s_n = s_n(1-r) &= (c + c\,r + c\,r^2 + \ldots + c\,r^n) - (c\,r + c\,r^2 + c\,r^3 + \ldots + c\,r^{n+1}) \\ &= c - c\,r^{n+1} = c(1-r^{n+1}) \\ \Longrightarrow \quad s_n &= c\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

<u>**Demostración de** (6.6)</u>

Si $|r| < 1$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ y la suma de la sucesión resulta

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} c\,r^n = \lim_{n\to\infty} c\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = c\,\frac{1-0}{1-r} = \frac{c}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$ la progresión geométrica <u>no es sumable</u> dado que la sucesión de sumas parciales es **divergente**. Específicamente:

- $r = 1 \implies s_n = c + c + \ldots + c = n\,c$. Entonces,

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n\,c = \pm\infty$$

  y

  $$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} c = \lim_{n\to\infty} n\,c = \pm\infty$$

- $r = -1 \implies s_n = c - c + c - c + \ldots + (-1)^n c$. Entonces,

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n c \implies \nexists$$

  y

  $$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c = \lim_{n\to\infty} (-1)^n c \implies \nexists$$

- $|r| > 1$ ($r < -1$ o $r > 1$) $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} c\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \pm\infty$, luego

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} c\,r^n = \lim_{n\to\infty} c\,\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \pm\infty$$

Ejemplo 3: Calcular la suma de la progresión geométrica

$$7, \frac{28}{5}, \frac{112}{25}, \frac{448}{125}, \frac{1792}{625}, \ldots$$

donde $a_0 = c = 7$ y la razón es $r = \frac{4}{5}$. Dado que $r = \frac{4}{5} < 1$ la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{7\,\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, siendo por tanto la suma de la progresión

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 7\,\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{7}{1-\frac{4}{5}} = 35$$

Ejemplo 4: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{3n}7^{1-n}$$

En primer lugar determinamos el escribimos el término general de la progresión geométrica bajo la forma $c\,r^n$,

$$3^{3n}7^{1-n} = 3^3\cdot 3^n\cdot 7\cdot 7^{-n} = 3^3\cdot 7\left(\frac{3}{7}\right)^n = 189\left(\frac{3}{7}\right)^n$$

de forma que $c = 189$ y $r = \frac{3}{7}$. Como $r < 1$ la sucesión de sumas parciales es convergente y la suma de la sucesión resulta

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} 189\left(\frac{3}{7}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 189\,\frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{7}} = \frac{189}{1-\frac{3}{7}} = \frac{1323}{4} = 330.75$$

Ejemplo 5: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}6^{1+n}$$

En primer lugar determinamos el escribimos el término general de la progresión geométrica bajo la forma $c\,r^n$,

$$5^{-n}6^{1+n} = 6 \cdot 6^n \cdot 5^{-n} = 6\left(\frac{6}{5}\right)^n$$

de forma que $c = 6$ y $r = \frac{6}{5}$. Como $r > 1$ la sucesión de sumas parciales es divergente y la suma de la sucesión resulta

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{6}{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 6\,\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{6}{5}} = \infty$$

Nota 2:
Las series geométricas constituyen un prototipo de serie infinita de los que se derivarán importantes resultados de sumabilidad de series infinitas arbitrarias.

Las **series telescópicas** constituyen otro caso particular de serie para el que resulta relativamente sencillo calcular el término n-ésimo de la sucesión de las sumas parciales, pues los términos de la suma se cancelan entre sí permaneciendo sólo el primero y el último, i.e.,

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) &= (\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+(\cancel{a_4}-\cancel{a_3})+\ldots+(\cancel{a_n}-\cancel{a_{n-1}})+(a_{n+1}-\cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1}-a_1 \end{aligned} \tag{6.7}$$

de forma que la serie infinita resulta

$$\begin{aligned} s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k) &= \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1) \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_1 \end{aligned} \tag{6.8}$$

que será convergente si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ y es finito.

Ejemplo 6: Estudiar la sumabilidad de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)!}$$

Para determinar si la serie infinita es sumable calculamos en primer lugar el término general de la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{(k+1)!}$$

Dado que $\frac{4k}{(k+1)!} = 4\frac{k}{(k+1)k!} = 4\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)k!}\right) = 4\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$ el término general s_n queda

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} 4\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

Luego se trata de una serie telescópica y por tanto

$$\begin{aligned} s_n &= 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \\ &= 4\left(\left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \frac{1}{4!}\right) + \dots \right. \\ &\left. + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \cancel{\frac{1}{n!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right)\right) = 4\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) \end{aligned}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 4\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 4 < \infty$, la sucesión de las sumas parciales es convergente y la serie infinita es sumable, i.e.,

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} 4\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 4$$

Ejemplo 7: Estudiar la sumabilidad de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} -2\sin\left(\frac{2n+1}{2(n^2+n)^2}\right)\sin\left(\frac{2n^2+2n+1}{2(n^2+n)^2}\right)$$

Vamos a reescribir la sucesión cuya sumabilidad se quiere estudiar. Para ello haremos uso de la siguiente relación trigonométrica

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

de forma que

$$\begin{aligned} -2\sin\left(\frac{2n+1}{2(n^2+n)^2}\right)\sin\left(\frac{2n^2+2n+1}{2(n^2+n)^2}\right) &= \frac{-2}{2}\left[\cos(-\frac{1}{(n+1)^2}) - \cos(\frac{1}{n^2})\right] \\ &= \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -2\sin\left(\frac{2n+1}{2(n^2+n)^2}\right)\sin\left(\frac{2n^2+2n+1}{2(n^2+n)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]$$

esto es, se trata de una serie telescópica. Para estudiar si es sumable o no vamos a calcular el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$
\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{1}{k^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right)\right] &= \left[\cos(1) - \cancel{\cos\left(\frac{1}{2^2}\right)}\right] \\
&+ \left[\cancel{\cos\left(\frac{1}{2^2}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{1}{3^2}\right)}\right] + \left[\cancel{\cos\left(\frac{1}{3^2}\right)} - \cancel{\cos\left(\frac{1}{4^2}\right)}\right] + \dots \\
&+ \left[\cancel{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] = \cos(1) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos(1) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] = \cos(1) - \cos(0) = \cos(1) - 1 < \infty$, la sucesión de sumas parciales es convergente y la serie infinita resulta

$$
\begin{aligned}
s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} -2\sin\left(\frac{2n+1}{2(n^2+n)^2}\right)\sin\left(\frac{2n^2+2n+1}{2(n^2+n)^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[\cos(1) - \cos\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] \\
&= \cos(1) - 1
\end{aligned}
$$

La **serie armónica**

$$
s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}
$$

constituye un caso concreto de serie infinita no sumable, dado que la sucesión de las sumas parciales resulta divergente. Una forma de demostrarlo consiste en considerar la subsucesión de las sumas parciales $\{s_{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{s_2, s_4, s_8, s_{16}, \dots\}_{n\in\mathbb{N}}$ y acotar inferiormente cada uno de sus términos del siguiente modo,

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
&= 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Bajo el mismo patrón, se tiene que $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} = 1 + \frac{6}{2}$ y, en general,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

por lo que $s_{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y la sucesión de las sumas parciales es divergente. Por lo tanto la serie armónica no es sumable, i.e.,

$$s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

La serie armónica pertenece a la familia de series infinitas denominada como *serie* p, dado que su estructura general es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p \in \mathbb{R} \tag{6.9}$$

Se demostrará que una *serie* p es sumable si $p > 1$ y no lo será cuando $p \leq 1$.

6.2. Propiedades de las series infinitas

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series sumables. Entonces,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad c \in \mathbb{R}$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ejemplo 8: Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n(n+1)} - \frac{1}{3^n} \right)$$

Aplicando la propiedad iii) tenemos que

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n(n+1)} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = s_\infty^{(1)} + s_\infty^{(2)}$$

Calculamos la suma de ambas series por separado.

1. $s_\infty^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$

Calculamos el término general de la sucesión de sumas parciales, $\left\{s_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ y comprobamos si esta es convergente o no,

$$s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k(k+1)} \underset{i)}{=} 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 5\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \quad \Longleftarrow \text{ serie telescópica}$$

$$= 5\left(\underbrace{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{k=2} + \ldots + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)}_{k=n-1}\right.$$

$$\left. + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)}_{k=n}\right) = 5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} 5\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 5(1-0) = 5$$

Luego la sucesión de sumas parciales es convergente y la serie $s_\infty^{(1)}$ es sumable, siendo su valor

$$s_\infty^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 5\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 5$$

2. $s_\infty^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (¡OJO! La serie comienza en 1 y no en 0)

Se trata de una serie geométrica con $c = \frac{1}{3}$ y razón $r = \frac{1}{3} < 1$, luego la sucesión de sumas parciales es convergente y término general viene dado por

$$s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

Así, la serie geométrica es sumable y su valor es

$$s_\infty^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1-0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dado que cada una de las series, $s_\infty^{(1)}$ y $s_\infty^{(2)}$, es sumable, la serie $s_\infty = s_\infty^{(1)} - s_\infty^{(2)}$ también y su valor es

$$s_\infty = s_\infty^{(1)} - s_\infty^{(2)} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

De los resultados anteriores, se extrae una **condición necesaria y suficiente** de sumabilidad de una serie infinita, $s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, expresada en términos de la sucesión original $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 1: Criterio de Cauchy
La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable si y sólo si la sucesión de las sumas parciales es una sucesión de Cauchy, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{tq}\ \forall n, m > N \implies |s_n - s_m| < \epsilon$$

Nota 3:
No se pierde generalidad en la aplicación del criterio de Cauchy si se considera $n > m$

Nota 4:
Por cuestiones de notación y conveniencia, a veces el criterio de Cauchy se enuncia considerando $m-1$ en lugar de m, de forma que $m \leq n$ y este quedaría de la forma

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{tq}\ \forall n \geq m > N \implies |s_n - s_{m-1}| < \epsilon$$

Por otro lado, dado que $s_n - s_{m-1} = \sum_{k=m}^{n} a_k$, el criterio de Cauchy puede reescribirse como

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{tq}\ \forall n \geq m > N \implies \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \epsilon$$

o equivalentemente

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ \text{tq}\ \forall n \geq m > N \implies \lim_{n,m\to\infty} (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = 0$$

Aunque este criterio tiene importancia teórica, tiene escasa aplicación práctica para determinar su una sucesión arbitraria es sumable. De todas formas, del mismo se deriva un resultado que constituye una **condición necesaria** (pero no suficiente) para que una sucesión sea sumable.

Teorema 2: Criterio del resto
Si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{6.10}$$

Demostración:
Tomando $m = n$, si $\lim \lim_{n\to\infty} s_n = l$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = l - l = 0$$

$\square$

Nota 5:
El recíproco del Teorema 2 no es cierto, y un ejemplo de ello es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{sin embargo} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

De hecho, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \text{o} \quad \nexists \lim_{n\to\infty} a_n$$

puede utilizarse como **criterio** para demostrar que la serie asociada, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, no es convergente, esto es, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es sumable.

Ejemplo 9: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3}{-4n^3+2n-1}$$

En este caso, $a_n = \frac{7n^3}{-4n^3+2n-1}$ y procedemos al cálculo de su límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{7n^3}{-4n^3+2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7\frac{n^3}{n^3}}{-4\frac{n^3}{n^3}+2\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{-4+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = -\frac{7}{4} \neq 0\end{aligned}$$

Luego se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3}{-4n^3+2n-1}$$

es divergente

Como punto de partida, se mostrarán resultados asociados a la sumabilidad de sucesiones, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denominadas de **términos positivos** o **no negativas**, i.e., $a_n \geq 0$. Para este tipo de sucesiones ocurre que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona no decreciente, con lo que puede ocurrir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s < +\infty \quad \text{o} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$$

6.2.1. **Criterios de sumabilidad de sucesiones no negativas**

Teorema 3:
Una sucesión de términos positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s < +\infty$$

si y sólo si la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente.

Aunque no es muy útil en la práctica dado que se carece de herramientas para determinar si $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada o no, el Teorema 3 constituye la base de los demás criterios de sumabilidad de sucesiones no negativas.

Teorema 4: Criterio de comparación
Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos series de términos postivos tq

$$0 \leq a_n \leq b_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces,

i) si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ <u>converge</u> $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge</u>

ii) si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

<u>**Demostración de i)**</u>
Sean s_n y t_n los términos generales de la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, i.e.,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{y} \quad t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Entonces, si $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$0 \leq s_n \leq t_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, se tiene que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y por tanto está acotada. Por lo tanto, de la desiguald anterior se deduce que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. $\square$

<u>**Demostración de ii)**</u>
Sean $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de las sumas parciales de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente.
Si $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$s_n \leq t_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, luego se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

$\square$

Nota 6:
El objetivo al aplicar el criterio de comparación, es comparar una serie dada con otra serie que ya se conoce si es divergente o convergente. Generalmente, las sucesiones que se utilizan para aplicar el criterio de comparación son:

- Serie geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} c\, r^n$
  - Convergente si $|r| < 1$
  - Divergente si $|r| \geq 1$
- Serie p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
  - Convergente si $p > 1$
  - Divergente si $p < 1$

Ejemplo 10: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos^5(2n+1)}{3^n + n^3}$$

Primero, conviene observar que la sucesión $\left\{\frac{3+\cos^5(2n+1)}{3^n+n^3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de términos positivos, siendo algunos de ellos

$$a_1 = 0.512261, \quad a_2 = 0.176579, \quad a_3 = 0.0600656, \quad a_4 = 0.0163592,$$
$$a_5 = 0.00815217, \quad a_6 = 0.00382574, \quad a_7 = 0.00108576$$

Luego podemos aplicar el criterio de comparación. En este caso como $3^n > n^3$ cuando $n >> 1$ la serie que escogemos para comparar es la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$. Así,

$$0 \leq \frac{3 + \cos^5(2n+1)}{3^n + n^3} \leq \frac{4}{3^n}$$

y como la serie geométrica es convergente, $r = \frac{1}{3} < 1$, se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos^5(2n+1)}{3^n + n^3}$$

es convergente, o en otras palabras, sumable.

Ejemplo 11: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3}$$

La sucesión $\left\{\frac{2n-1}{n^2+3}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es, efectivamente, de términos positivos,

$$a_1 = 0.25, \quad a_2 = 0.428571, \quad a_3 = 0.416667, \quad a_4 = 0.368421,$$
$$a_5 = 0.321429, \quad a_6 = 0.282051, \quad a_7 = 0.25$$

Cuando $n >> 1$ se tiene que $n^2 > 2n$ lo que nos lleva a escoger la serie armónica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$, para aplicar el criterio de comparación. Así,

$$0 \leq \frac{2n-1}{n^2+3} \leq \frac{2}{n}$$

Dado que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3}$$

es divergente, esto es, no es sumable.

Nota 7:
Cabe mencionar que aunque en el criterio de comparación se establece

$$a_n \leq b_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en la práctica sólo es necesario que dicha desigualdad se verifique para todo $n \geq N$, para algún $N \in \mathbb{N}$, puesto que la convergencia de una serie no se ve afectada por un número finito de términos.

Ejemplo 12: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2)}{2n}$$

Ocurre que $\log(n^2) > 1$ para $n \geq 2$ de forma que

$$\frac{\log(n^2)}{2n} > \frac{1}{n}\,, \quad n \geq 3$$

Como la serie armónica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es divergente se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^2)}{2n}$$

es divergente.

El criterio de comparación sientas las bases de otras criterios importantes para determinar la convergencia de series de términos positivos. De entre ellos, el más importantes es el *criterio del cociente*. Sin embargo, como preludio resulta necesario se muestra el siguiente resultado

Teorema 5: Criterio de comparación por el límite
Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de términos positivos. Suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Entonces,

i) Si $0 < l < +\infty \Longrightarrow$ si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge/diverge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge/diverge

ii) Si $l = 0$

   (a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
   (b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

iii) Si $l = +\infty$

   (a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge
   (b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Ejemplo 13: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$$

Siendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{3^n+1}\right\}$, para aplicar el criterio de comparación por el límite escogemos la progresión geométrica $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}$. Entones,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n+1}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$$
$$= \frac{1}{1+0} = 1 > 0$$

Como el límite existe y es distinto de 0, y la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es convergente, se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$$

es convergente.

Teorema 6: Criterio del cociente

Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de términos positivos, i.e., $a_n \geq 0$. Suponiendo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Entonces,

i) Si $r < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ($a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

ii) Si $r > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge ($a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$)

iii) Si $r = 1$ no puede decirse nada sobre la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplo 14: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$$

Para aplicar el criterio del cociente consideramos $a_n = \frac{1}{(3n)!}$, siendo $a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1))!} = \frac{1}{(3n+3)!}$, de forma que el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ resulta

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(3n+3)!}}{\frac{1}{(3n)!}} = \frac{(3n)!}{(3n+3)!} = \frac{(3n)!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \\ &= \frac{1}{3(n+1)(3n+2)(3n+1)}\end{aligned}$$

El límite queda entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3(n+1)(3n+2)(3n+1)} = 0$$

con lo que se concluye, según este criterio, que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$$

converge.

Ejemplo 15: Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!}, \quad r > 0$$

es convergente Aplicamos el criterio del cociente, de forma que $a_n = \frac{r^{2n}}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{r^{2(n+1)}}{(n+1)!}$ cuyo cociente viene dado por

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{r^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{r^{2n}}{n!}} = \frac{n!}{r^{2n}} \frac{r^{2n+2}}{(n+1)!} = \frac{r^{2n}r^2}{r^{2n}} \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{r^2}{n+1}$$

siendo el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{n+1} = 0$$

Luego se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n!}, \quad r > 0$$

es convergente.

A pesar de todo, el criterio del cociente presenta sus inconvenientes:

- El cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ puede llegar a ser bastante complicado
- Aún peor, se da la posibilidad de que ocurra el caso iii), esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. En tal situación, no se puede decir nada concluyente acerca de la sumabilidad de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, bien puede serlo o no.

Otro criterio de convergencia de series infinitas de sucesiones, similar al criterio del cociente, es el llamado *criterio de la raíz* que se enuncia a continuación.

Teorema 7: Criterio de la raíz
Sea la sucesión de términos positivos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Suponemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces,

i) Si $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

ii) Si $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

iii) Si $l = 1$ no puede decirse nada sobre la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ejemplo 16: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n-5}\right)^n$$

La forma del término general de la sucesión $a_n = \left(\frac{4}{(-1)^n-5}\right)^n$ sugiere que se utilice el criterio de la raíz para estudiar si esta es sumable o no. Para ello, calculamos en primer lugar la raíz n-ésima de a_n, i.e.,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{n-5}\right)^n} = \left[\left(\frac{4}{n-5}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{n-5}$$

Si calculamos el límite resulta,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n-5} = 0 < 1$$

Luego se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n-5}\right)^n$$

converge

Ejemplo 17: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{(-1)^n-2n}$$

Aplicando el criterio de la raíz tenemos,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3^{(-1)^n-2n}} = \left(3^{(-1)^n-2n}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2n}{n}} = 3^{\frac{(-1)^n}{n}-2}$$

siendo el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{(-1)^n}{n}-2} = 3^{0-2} = \frac{1}{9} < 1$$

Luego se concluye que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{(-1)^n-2n}$$

es convergente.

Nota 8:

Los criterios de comparación, del cociente y de la raíz se aplican a sucesiones de términos no negativos, sin embargo, estos mismos criterios pueden aplicarse para estudiar la sumabilidad de las sucesiones de términos (todos) negativos, teniendo en cuenta que

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{sucesión de términos negativos}} = -\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} -a_n}_{\text{sucesión de términos positivos}}\right)$$

Las sucesiones con términos tanto positivos como negativos requieren de un tratamiento aparte, como veremos a continuación.

6.2.2. Criterios de sumabilidad de sucesiones arbitrarias

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos y negativos. Para estudiar si es sumable o no, puede considerarse en su lugar la sucesión $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos términos son <u>todos</u> no negativos.
Entonces se tiene que,

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** o, en otras palabras, si la sucesión $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **sumable**, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **absolutamente sumable**

- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pero **no** es absolutamente convergente, se dice que es **condicionalmente convergente**

Basándose en la definición anterior, el teorema siguiente establece un criterio de sumabilidad para sucesiones de términos positivos y negativos.

Teorema 8:
Toda serie infinita absolutamente convergente es convergente.

<u>**Demostración**</u>
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces, por el criterio de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} (|a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n|) = 0$$

como

$$|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \underbrace{\leq}_{\text{desigualdad triangular}} |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n|$$

se cumple a su vez que

$$\lim_{n\to\infty} (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) = 0$$

por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisface también el criterio de Cauchy, luego es convergente

Nota 9:
Una serie infinita se dice que es <u>absolutamente convergente si y sólo si</u> la serie formada con sus términos positivos es convergente así como la serie formada por sus términos negativos.

Ejemplo 18: Determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{n^4}$$

es absolutamente convergente

Si la serie del enunciado es absolutamente convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-3}}{n^4} \right|$ ha de ser convergente. Vamos a comprobarlo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-3}}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

como se trata de una serie p con $p = 4$, es convergente. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{n^4}$ es absolutamente convergente

Ejemplo 19: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n^3}$$

Algunos términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \frac{\sin(n^3)}{n^3} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ son

$$a_1 = 0.841471, \quad a_2 = 0.12367, \quad a_3 = 0.0354213, \quad a_4 = 0.0143754$$
$$a_5 = -0.00492832, \quad a_6 = 0.00322249, \quad a_7 = -0.00156443$$

Luego se trata de una serie de términos positivos y negativos. Así, para determinar si converge o no vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^3)}{n^3} \right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^3)}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin(n^3)\right|}{n^3}$$

como $|\sin(n^3)| \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, aplicando el criterio de comparación se tiene que

$$\frac{\left|\sin(n^3)\right|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es una serie p con $p = 3$, es convergente y, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n^3)}{n^3} \right|$, según este criterio, también lo es. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n^3}$$

es absolutamente convergente y, por ende, convergente

Para determinar si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, pueden emplearse tanto el criterio del cociente como el criterio de la raíz a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Así,

a) **Prueba del cociente**: suponiendo que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$

  i) Si $l > 1$ o $l = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

  ii) Si $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (de hecho, absolutamente convergente)

  iii) Si $l = 1$ no puede decirse nada acerca de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) **Prueba de la raíz**: suponiendo que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

  i) Si $l > 1$ o $l = +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

  ii) Si $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (de hecho, absolutamente convergente)

  iii) Si $l = 1$ no puede decirse nada acerca de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Nota 10:
Si al estudiar la convergencia de una serie se obtiene $l = 1$ aplicando el criterio del cociente, no resulta conveniente aplicar el criterio de la raíz, dado que de nuevo se obtendría $l = 1$ y no podría decirse nada concluyente acerca de la convergencia de la serie.
Lo mismo se aplica si, aplicando en primer lugar el criterio de la raíz, se obtuviera $l = 1$. En tal caso, se obtendría el mismo resultado aplicando el criterio del cociente.

Un tipo particular de serie de términos positivos y negativos son las **series alternantes**, que se definen como aquellas series cuyos términos son positivos y negativos de forma alternada, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \qquad a_n > 0$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots, \qquad a_n > 0$$

Para este tipo de series existe el siguiente criterio de convergencia.

Teorema 9: Teorema de Leibniz
Sea la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \qquad a_n > 0$$

si se cumple que

i) $a_1 \geq a_2 \geq \dots a_n \geq \dots \geq 0$, i.e., $a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

converge

Ejemplo 20: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Dado que se trata de una serie alternante, comprobamos si se cumplen las condiciones del Teorema de Leibniz para determinar si es convergente o no,

i) $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Luego, por el Teorema de Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ es convergente

Ejemplo 21: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{e^n} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3} + \ldots$$

Dado que se trata de una serie alternante, comprobamos si se cumplen las condiciones del Teorema de Leibniz para determinar si es convergente o no,

i) $\frac{1}{e^n} > \frac{1}{e^{n+1}} \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Luego, por el Teorema de Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{e^n}$ es convergente

6.2.3. Reordenamiento de los términos de una serie infinita

El último concepto a tratar es el denominado **reordenamiento** de los términos de una serie, cuya relevancia se pone de manifiesto a la hora de determinar si una serie dada es condicional o absolutamente convergente, lo que a su vez está en relación con la cuestión de si las sumas infinitas tienen el mismo comportamiento que las sumas finitas.

El <u>reordenamiento</u> de una serie infinita, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se entiende como una nueva serie, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, obtenida al cambiar el orden de los términos.
Por ejemplo, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n + \ldots$$

un reordenamiento posible sería

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= a_3 + a_4 + a_1 + a_2 + a_7 + \ldots \\ &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + \ldots\end{aligned}$$

En principio, no hay motivos para pensar que $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\ldots+b_n)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)}$ puesto que el orden específico de los términos podría importar. Este hecho queda recogido en el siguiente teorema.

Teorema 10:
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge condicionalmente</u>, entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ existe una reordenación, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Sin embargo, no ocurre así con las series **absolutamente convergentes** y este comportamiento diferente, con respecto a las series condicionalmente convergentes, queda reflejado del siguiente modo.

Teorema 11:
Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge absolutamente</u> y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una reordenación arbitraria de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ <u>converge absolutamente</u>

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Ejemplo 22: Reordenamiento de una serie condicionalmente convergente

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$$

es condicionalmente convergente dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{\log 2}{2} < \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{serie armónica}} = +\infty$$

Así,

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{14} + \frac{1}{16} - \frac{1}{18} + \frac{1}{20} - \ldots = -\frac{\log 2}{2} \tag{6.11}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} + \ldots = -\frac{1}{2}\frac{\log 2}{3} \tag{6.12}$$

que puede reescribirse como

$$0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{16} + 0 - \frac{1}{20} + \ldots = -\frac{1}{2}\frac{\log 2}{3} \tag{6.13}$$

dado que la (6.12) no se ve modificada al incluir 0 entre los sumandos.
Si ahora se suman las series (6.11) y (6.13) se tiene

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{8} - \frac{1}{18} - \ldots = -2\frac{\log 2}{3} \tag{6.14}$$

Esta nueva serie no es más que un reordenamiento de la serie (6.11) en la que hay un término positivo cada dos términos negativos. Como se puede ver, la suma de ambas series es diferente.

La importancia de las series absolutamente convergentes también queda de manifiesto cuando se trata de la **multiplicación** de dos series infinitas, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dado que, en general, no existe un análogo sencillo para

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + a_2 + \ldots) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j$$

(siendo este un arreglo bidimensional), como, por ejemplo, ocurre para la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Sin embargo, los elementos del producto de dos series pueden reordenarse de manera que formen una sucesión (que contiene sólo una vez cada término $a_i b_j$)y es aquí donde entra en juego el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sean absolutamente convergentes.

Teorema 12:
Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series absolutamente convergentes y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria cuyos términos son de la forma $a_i b_j$ para cada par (i, j). Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$