Tema 8: Sucesiones de números reales

Asignatura: Cálculo

Prof.: I. V. Toranzo ***GII***

5.1. Sucesiones de números reales

5.1.1. Definición

Una **sucesión** de números reales es una colección ordenada e infinita de números reales. Se denota de la forma

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \tag{5.1}$$

siendo a_n el término n-ésimo de la sucesión.

Nota 1
Hay sucesiones cuyos subíndices empiezan en 0 o en otro entero n_0

Nota 2
Una sucesión establece una **correspondencia** entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, por tanto, puede definirse como una **función** cuyo dominio es $\mathbb{N}$

Ejemplo 1: términos generales de sucesiones

- La sucesión $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$
- La sucesión $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
- La sucesión $\sqrt{2}-1, \sqrt{6}-2, \sqrt{12}-3, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$, $n \in \mathbb{N}$
- La sucesión $1, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$
- La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$
- La sucesión $1, 2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \ldots$ tiene como término n-ésimo $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$(*), $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$
- Los términos $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}$ se corresponden con la sucesión definida por inducción $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$

- Sea $a \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n^a\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene como términos $1^a, 2^a, 3^a, \ldots$

(*) $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ es el **factorial** del número natural n

El concepto crucial asociado a una sucesión,$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es el de **convergencia**, esto es, si existe algún número real hacia el que esta tienda cuando $n \to \infty$. Su definición formal es la siguiente.

5.1.2. Convergencia de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $l \in \mathbb{R}$ y se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \tag{5.2}$$

si $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > N$ entonces

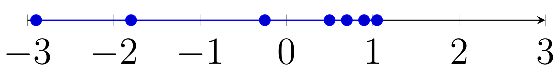
$$|a_n - l| < \epsilon \tag{5.3}$$

Nota 3
También se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende hacia l o que tiene el límite l

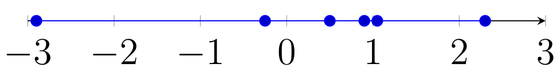
Nota 4
La condición (5.3) significa que para cada $\epsilon > 0$ existe un correspondiente número N cuya propiedad es que para todo $n > N$ se cumple que $|a_n - l| < \epsilon$. Dicho valor de N **depende** de ϵ y generalmente $N >> 1$ si $\epsilon << 1$

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** si no converge, i.e., no se aproxima a ningún punto finito.

Nota 5
La definición de convergencia significa que todos los valores a_n, a partir de un subíndice N, se encuentran muy próximos a l a una distancia menor que ϵ.



Sucesión convergente



Sucesión divergente

Nota 6

En general, a la hora de demostrar la existencia del límite de una sucesión, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nuestro objetivo será el siguiente: considerando $\epsilon > 0$ arbitrario, demostrar que existe un número natural N, que depende de ϵ, tq para todo $n > N$ se cumple que $|a_n - l| < \epsilon$. Así, a modo de pauta general se debería empezar la demostración con *"Sea $\epsilon > 0$..."* y finalizar con una expresión similar a *"Por lo tanto, para todo $n > N$ se tiene que $|a_n - l| < \epsilon$"*

Ejemplo 2: Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

En este caso queremos que se cumpla la desigualdad $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$ y determinar cuánto de grande ha de ser n para que esta se cumpla. Para ello, operamos sobre la desigualdad y tratamos de despejar n de ella. De forma que si $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$, entonces $\frac{1}{n^2} < \epsilon$ y despejando n se llega a $n^2 > \frac{1}{\epsilon}$ o lo que es igual $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. De forma que para todo $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ se cumple $|\frac{1}{n^2} - 0| < \epsilon$. Esto nos lleva a escoger $N = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$

Ejemplo 3: probar que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es 0

La sucesión converge a 0 sii

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

si para todo $\epsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ (dependiente de ϵ) tq si $n > N$ entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$.
Operando sobre la desigualdad tenemos que,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon}$$

i.e., para todo $n > \frac{1}{\epsilon}$ se cumple la desigualdad $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Así, basta con escoger $N = \frac{1}{\epsilon}$

Ejemplo 4: Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3+1} = 0$

Siguiendo un procedimiento similar a los ejemplos anteriores, dado $\epsilon > 0$ buscamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$ se cumpla que $\left|\frac{3n}{n^3+1} - 0\right| < \epsilon$. Con este objetivo en mente, trabajamos sobre la desigualdad anterior con la idea de determinar por encima de qué valor debe de situarse un n arbitrario tal que la desigualdad se cumpla, y escogeremos N como tal valor. De forma que,

$$\left|\frac{3n}{n^3+1} - 0\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{3n}{n^3+1} < \epsilon$$

Como puede observarse no es nada sencillo despejar n de la desigualdad. Lo más práctico en este caso es acotar $\frac{3n}{n^3+1}$ por una función del tipo "constante $\times \frac{n}{n^3}$ = constante $\times \frac{1}{n^2}$", dado que esta última expresión es más simple que la de partida y nos va a permitir estimar un valor para N. Este proceso supone acotar superiormente el numerador y acotar inferiormente el denominador.

En nuestro caso, dada la forma del numerador no es necesario acotarlo, así que buscamos una cota inferior para el denominador. En este caso, y dado el tipo de cota que buscamos para toda expresión, una posibilidad sería la siguiente:

$$\text{como} \quad n^3+1 \geq \frac{n^3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1}{\frac{n^3}{2}}$$

La cota inferior obtenida nos permite determinar para que valor de n comienza esta a cumplirse, i.e.,

$$n^3+1 \geq \frac{n^3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{n^3}{2} \geq -1 \quad \Longrightarrow \quad n^3 \geq -2 \quad \Longrightarrow \quad n = \sqrt[3]{-2}$$

que, dado que $n \geq 1$, se cumple siempre.
Continuando con la búsqueda de N, retomamos la desigualdad inicial de forma que con la acotación realizada esta queda

$$\frac{3n}{n^3+1} \leq \frac{3n}{\frac{n^3}{2}} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{n^2} < \epsilon$$

de donde podemos despejar fácilmente n,

$$\frac{6}{n^2} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{\epsilon} < n^2 \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{6}{\epsilon}}$$

De forma que, como $\forall n > \sqrt{\frac{6}{\epsilon}}$ se cumple que $\left|\frac{3n}{n^3+1} - 0\right| < \epsilon$, podemos escoger $N = \sqrt{\frac{6}{\epsilon}}$

Ejemplo 5: demostrar que la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente Se trata de una sucesión oscilante

$$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

con lo que a simple vista no converge a ningún número $l < \infty$. Formalmente probamos que no existe

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

por reducción al absurdo, i.e., partimos de la hipótesis de que existe $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = L$. Entonces $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ entonces $|(-1)^n - L| < \epsilon$. En particular, escogemos $\epsilon = 1$ y por tanto debe $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \Rightarrow |(-1)^n - L| < 1$, es decir,

1. $|1 - L| < 1$ si n par o $-1 < 1 - L < 1$ o $1 > L - 1 > -1$ o $2 > L > 0$
2. $|-1 - L| < 1$ si n impar o $-1 < -1 - L < 1$ o $1 > L + 1 > -1$ o $0 > L > -2$

de forma que se llega a la contradicción $0 < L < 0$.
Por lo tanto, se concluye que $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ y por tanto la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

De forma que una sucesión divergente es aquella tal que o bien $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ o bien $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. En este último caso, se dice que

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}^+$ (número positivo suficientemente grande) $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\mathbf{a_n > M}$ si $n > N$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si para todo $M \in \mathbb{R}^-$ (número negativo suficientemente grande) $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\mathbf{a_n < M}$ si $n > N$

Nota 7
Se dice que existe el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, i.e.,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l < \infty$$
2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ o $-\infty$, i.e.,
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Los siguientes dos teoremas establecen resultados de interés práctico a la hora de trabajar con sucesiones que divergen a $+\infty$.

Teorema 1
Sean dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = l \leq +\infty$

Entonces,
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$$
Demostración
Sea $M \in \mathbb{R}^+$. Consideramos $m \in \mathbb{R}^+$ tq $0 < m < \lim_{n\to\infty} b_n$. Esto es factible dado que independientemente de que $\lim_{n\to\infty} b_n$ sea finito o no, va a existir N_1 tq $\forall n > N_1$ se tiene que $t_n > m$.
Como $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, existe N_2 tq $\forall n > N_2$ se cumple que $s_n > \frac{M}{m}$.
Escogiendo $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que $\forall n > N$ se cumple que $a_n \cdot b_n > \frac{M}{m} \cdot m = M$

Teorema 2
Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$$

Una propiedad fundamental de los límites de sucesiones viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 3
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2$, entonces

$$l_1 = l_2,$$

i.e., el límite de una sucesión, si existe, es **único**.
Demostración.
Suponemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2$. Sea $\epsilon > 0$, aplicando la definición de límite se tiene que

- $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq
$$\forall n > N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$$
- $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq
$$\forall n > N_2 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Estudiamos que ocurre con la diferencia entre ambos límites para $n > \max\{N_1, N_2\}$,

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_n) + (a_n - l_2)| \\ &\leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Dado que $|l_1 - l_2| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se tiene que

$$|l_1 - l_2| = 0 \quad \Longrightarrow \quad l_1 = l_2 \qquad \square$$

5.1.3. Propiedades de los límites de sucesiones

Suponemos que existen $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ y son finitos. Entonces,

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(k\cdot a_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \quad k\in\mathbb{R}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to\infty} b_n}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, si $a_n \geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

vii) $\lim\limits_{n\to\infty}\log(a_n) = \log\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, si $a_n > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

viii) *Lema del Sandwich*: si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l\ (\leq\infty)$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l$$

Nota 8

Estas propiedades no sólo establecen **cómo** calcular dichos límites sino que, cumpliéndose las hipótesis de partida, aseguran que estos **existen**.

Nota 9

Las propiedades anteriores también son válidas cuando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y/o $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ son **infinitos**, siempre y cuando los límites resultantes tengan sentido. En este caso, las indeterminaciones que puedan aparecer ya han sido presentadas previamente y concretamente son

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad \infty\cdot 0, \quad 0^0$$

La importancia del siguiente teorema radica en que establece otra conexión entre el límite de una función y el límite de una sucesión.

Teorema 4

Sea f una función definida en un abierto $I\subseteq \text{dom}(f)\subseteq\mathbb{R}$ tq $c\in I$ (aunque en principio $c\notin\text{dom}(f)$) y

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

finito o infinito. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tq

i) $a_i \in \text{dom}(f), \quad i = 1, \ldots, n, \ldots$

ii) $a_i \neq c, \quad i = 1, \ldots, n, \ldots$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$

Entonces, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$$

Recíprocamente, si se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$, $\forall \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpliendo i), ii), iii), entonces

$$\lim_{x\to c} f(x) = l$$

Demostración

$\Rightarrow$ Suponemos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$. Entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq

$$\text{si} \quad |x - c| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

Por otro lado, si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n > N \quad \text{se tiene que} \quad |a_n - c| < \delta$$

Esta elección de δ no es cualquiera dado que esto implica que

$$|f(a_n) - l| < \epsilon$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$

$\Leftarrow$ Suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$ $\forall$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ (*). Aplicando la técnica de reducción al absurdo, suponemos que bajo estas condiciones $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq l$. En tal caso, $\exists \epsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0$ existiría un x donde

$$|x - c| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - l| > \epsilon$$

En particular, $\forall n$ $\exists x_n$ tq

$$|x_n - c| < \delta \quad \text{y} \quad |f(x_n) - l| > \epsilon$$

La primera desigualdad establece que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a c, y la segunda que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a l. Esto lleva a una contradicción con las hipótesis de partida (*). Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$

Este teorema provee de numerosos ejemplos de funciones de sucesiones convergentes.

Ejemplo 6:

- $\left\{\sin\left(14+\frac{1}{n^2}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\sin(14)$
- $\left\{\cos\left(\sin\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\cos(\sin(1))$
- Si $r>0$, $\left\{\frac{1}{n^r}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0

5.1.4. Criterios de convergencia

Existen **criterios** que, dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, **garantizan su convergencia** en caso de que esta ocurra. Uno de los más importantes se expresa en términos de dos conceptos asociados a funciones reales de variable real, **monotonía** y **acotación**, que sin embargo también pueden aplicarse a sucesiones.

- **Monotonía.** Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se dice que es:

  Monótona creciente si

  $$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots, \qquad \forall n\in\mathbb{N} \tag{5.4}$$

  Monótona decreciente si

  $$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, \qquad \forall n\in\mathbb{N} \tag{5.5}$$

  Una sucesión monótona creciente/decreciente puede tener algunos o todos sus términos iguales, por ello también reciben el nombre de sucesión **no decreciente/no creciente**. En caso de que las desigualdades (5.4) y (5.5) se cumplan de forma estricta, se dirá que la sucesión es **monótona estrictamente creciente/decreciente**.

- **Acotación.** Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se dice que está:

  Acotada superiormente si

  $$\exists C\in\mathbb{R} \quad \text{tq} \quad a_n \leq C, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{5.6}$$

  El número C se denomina **cota superior** de la sucesión. En caso de que algún término de la sucesión alcance dicho valor, se dice que C es el valor **supremo** de la misma.

  Acotada inferiormente si

  $$\exists C\in\mathbb{R} \quad \text{tq} \quad a_n \geq C, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{5.7}$$

  El número C se denomina **cota inferior** de la sucesión. En caso de que algún término de la sucesión alcance dicho valor, se dice que C es el valor **ínfimo** de la misma.

Acotada si

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad |a_n| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.8}$$

Ejemplo 7:
La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{5}{n+7}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente dado que

$$\frac{5}{n+7} > \frac{5}{(n+1)+7} = \frac{5}{n+8}$$

luego $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$

Ejemplo 8: Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{3n}{5n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente
Hay que demostrar que $a_{n+1} < a_n$, i.e.,

$$\frac{3(n+1)}{5(n+1)^2+1} < \frac{3n}{5n^2+1}$$

Para ello, vamos operando con la desigualdad del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\frac{3(n+1)}{5(n+1)^2+1} < \frac{3n}{5n^2+1} &\Leftrightarrow (3(n+1))(5n^2+1) < 3n(5(n+1)^2+1) \\
&\Leftrightarrow 15n^3 + 15n^2 + 3n + 3 < 15n^3 + 30n^2 + 18n \\
&\Leftrightarrow 3 < 15n^2 + 15n \\
&\Leftrightarrow 1 < 5n^2 + 5n
\end{aligned}$$

Dado que $n \geq 1$, se tiene que la desigualdad anterior es cierta y por tanto se concluye que $a_{n+1} < a_n$, i.e., que la sucesión es decreciente.

Ejemplo 9: Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{3^n-1}{3^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente
Hay que demostrar que $a_n < a_{n+1}$, i.e.,

$$\frac{3^n-1}{3^n} < \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}$$

De igual forma que en el ejemplo anterior, realizamos manipulaciones sobre la desigualdad

$$\begin{aligned}
\frac{3^n-1}{3^n} < \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}} &\Leftrightarrow (3^n-1)3^{n+1} < (3^{n+1}-1)3^n \\
&\Leftrightarrow (3^n-1)3 < (3^{n+1}-1) \\
&\Leftrightarrow 3^{n+1} - 3 < 3^{n+1} - 1 \\
&\Leftrightarrow -3 < -1
\end{aligned}$$

Dado que la última desigualdad se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que la desigualdad de partida es cierta y por tanto se concluye que $a_n < a_{n+1}$, i.e., que la sucesión es creciente.

Ejemplo 10: Sucesiones acotadas

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está monótona decreciente dado que sus términos son de la forma
$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$$
y está acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0, i.e.,
$$0 < \left|\frac{1}{3^n}\right| < 1,$$
de hecho $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos términos son de la forma
$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$$
está acotada superiormente por 2 e inferiormente por 1, i.e.,
$$1 < \left|\frac{n+1}{n}\right| \leq 2,$$
de hecho $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

- La sucesión de términos
$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$
de término n-ésimo $a_n = n$ no tiene cota superior

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n}{e^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y está acotada superiormente por $\frac{1}{e}$ e inferiormente por 0.
Vamos a demostrarlo haciendo uso de la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$ que presenta la misma estructura que el término general de la sucesión. De hecho, en los números naturales el valor de la función f coincide con los elementos de la sucesión $\left\{\frac{n}{e^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Para determinar si la sucesión es creciente o decreciente, i.e., monótona, estudiamos la monotonía de la función f. Así,
$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$$
En el intervalo $(1, \infty)$ se tiene que $f'(2) < 0$ por lo tanto f es decreciente (en los naturales se tiene entonces $f(1) > f(2) > f(3) > \ldots > f(n) > \ldots$), lo que se traduce en que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, i.e., $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$.
La cota superior, que de hecho la alcanza (máximo), es el primer término de la sucesión, $a_1 = \frac{1}{e}$; mientras que la cota inferior, dado que todos los términos son positivos, es 0, de hecho $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente para $n \geq 3$
  De forma análoga al ejemplo anterior, vamos demostrar este hecho haciendo uso de la función
  $$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$
  que presenta la misma estructura que la sucesión $\{n^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Así, para determinar si la sucesión es decreciente/creciente estudiaremos la monotonía de la función.
  $$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(x)} \Rightarrow \quad f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\log(x)}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = e$$
  El intervalo $(e, +\infty)$ se tiene que $f'(4) < 0$ por lo tanto f es decreciente en $(e, +\infty)$. Como $e < 3$ se tiene entonces que la sucesión $\{n^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente en $[3, +\infty)$.

El siguiente teorema establece un criterio de convergencia para sucesiones monótonas crecientes/decrecientes que alcanzan su valor supremo/ínfimo.

Teorema 5

i) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **no decreciente** y **acotada superiormente**
$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \text{converge,}$$
i.e., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ siendo l su cota superior más pequeña

ii) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **no creciente** y **acotada inferiormente**
$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \text{converge,}$$
i.e., $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ siendo l su cota inferior más grande

Nota 10
El teorema anterior establece bajo qué condiciones una sucesión es convergente, pero no dice cuál es el valor hacia el que dicha sucesión tiende, esto es, se trata de un *teorema de existencia*

Corolario 1
*Toda sucesión **convergente** es **acotada***

Demostración
Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Entonces, por la definición de sucesión convergente, se tiene que $\forall\epsilon\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N\ |a_n - l| < \epsilon$. En particular para $\epsilon = 1$ se

tiene que $|a_n - l| < 1$, esto significa que

$$\forall n \geq m \Rightarrow |a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

Dado que el conjunto $\{a_n\}_{n \leq m} \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y finito, tiene un máximo, M. Luego,

$$|a_n| \leq 1 + |x| + M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Nota 10

Para demostrar que una sucesión está acotada a veces puede ser conveniente aplicar el siguiente hecho:
Sea una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si para cierto $m \in \mathbb{N}$ se demuestra que el conjunto $\{a_n\}_{n\geq m}$ está acotado, entonces se concluye que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Ejemplo 11: Estudiar la convergencia de la sucesión definida a través de la siguiente relación de recurrencia

$$\mathbf{a_1 = 6}, \quad \mathbf{a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 2}, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$$

Algunos términos de la sucesión son

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2.5, \quad a_4 = 2.41667, \quad a_5 = 2.40278, \quad \ldots$$

lo que hace pensar que la sucesión sea no creciente y que los términos se aproximan a 2.4. Como la sucesión está dada a través de una relación de recurrencia, demostramos que es no creciente (i.e., $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$) aplicando el *método de inducción*:

1. $n = 1 \Longrightarrow a_2 = 3 < a_1 = 6 \quad \checkmark$
2. Suponemos que la sucesión es decreciente para $n = k$ (*hipótesis de inducción*), y hemos de demostrar que se cumple igualmente para $n = k + 1$. Así

$$\begin{aligned} a_{k+1} &< a_k \text{ (HI)} \\ \frac{1}{6}a_{k+1} &< \frac{1}{6}a_k \\ \frac{1}{6}a_{k+1} + 2 &< \frac{1}{6}a_k + 2 \\ \Longrightarrow \quad a_{k+2} &< a_{k+1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Luego la sucesión es decreciente $\forall n \in \mathbb{N}$.
Resta demostrar que está acotada inferiormente por 2.4 $\forall n \in \mathbb{N}$ y procedemos aplicando de nuevo el método de inducción:

1. $n = 1 \Longrightarrow a_1 = 6 > 2.4 \quad \checkmark$

2. Suponemos que la cota se cumple para $n = k$ (*hipótesis de inducción*), y hemos de demostrar que ocurre para $n = k + 1$. Así

$$\begin{aligned} a_k &> 2.4 \text{ (HI)} \\ \frac{1}{6}a_k &> \frac{1}{6}2.4 \\ \frac{1}{6}a_k + 2 &> \frac{1}{6}2.4 + 2 \\ \Longrightarrow \quad a_{k+1} &> 2.4 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Luego se demuestra por inducción que $a_n > 2.4 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Como la sucesión es decreciente y acotada inferiormente por el Teorema 3 se concluye que es convergente, i.e., $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$, aunque no conocemos dicho valor. Sin embargo, en este caso podemos utilizar la relación de recursividad para obtener su valor, dado que:

- si $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \Longrightarrow a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$
- $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}a_n + 2\right) = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} a_n + 2 = \frac{1}{6}L + 2$

De forma que $L = \frac{1}{6}L + 2 \Rightarrow L = 2.4$, tal y como se predecía al principio.

Aunque el Teorema 3 se refiere a un caso particular de sucesiones (i.e., monótonas) dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, **siempre** es posible extraer de ella una sucesión que es no decreciente o no creciente. Este hecho lleva al concepto de **subsucesión** de una sucesión.

5.1.5. Subsucesiones

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se define una **subsucesión** de esta como el conjunto infinito de números

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$$

con $n_k \in \mathbb{N}$ y $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Ejemplo 12: Subsucesiones

1. Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{3n^2(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Algunos de sus elementos son

$$(-3, 12, -27, 48, -75, 108, -147, 192, -243, 300, -363, \ldots)$$

   Una subsucesión posible sería aquella constituida por los términos positivos, i.e.,

$$(12, 48, 108, 192, 300, \ldots)$$

concretamente, la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es aquella tal que $n_k = 2k$ (dado que son los términos pares los que son no negativos) y por tanto el término general de la subsucesión es $a_{n_k} = 3(2k)^2(-1)^{2k} = 12k^2$

2. Sea la sucesión de término general $\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$. Algunos de sus términos son

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \dots\right)$$

La subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ constituida por los elementos negativos tiene como términos

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \dots\right)$$

Lema

Cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es no decreciente o no creciente

Suponiendo entonces que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 6: Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda **sucesión acotada** tiene una **subsucesión convergente**

Nota 11

Luego toda sucesión no acotada tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$ o $-\infty$

Teorema 7

Toda subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ tiene el **mismo** límite que la sucesión de la que procede, i.e.,

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = l$$

Este teorema tiene como consecuencia que, dadas dos subsucesiones, $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{c_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} c_{n_k} \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{k\to\infty} a_n$$

Es interesante observar el siguiente hecho: si una sucesión es convergente, entonces sus términos eventualmente <u>todos</u> se aproximarán a un <u>mismo valor</u>, lo cual necesariamente implica que la diferencia entre dos términos cualesquiera tiende a hacerse cada vez más pequeña a medida que n aumenta. En otras palabras, si $\lim_{k\to\infty} a_n = l$, entonces $\forall\epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > N$$

Si consideramos $n, m \in \mathbb{N}$ tq $n > N$ y $m > N$, entonces

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_m - l + l| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así, la desigualdad $|a_n - a_m| < \epsilon$ establece una condición necesaria, sin involucrar el valor del límite, para la convergencia de una sucesión que requiere de la siguiente definición.

5.1.6. Sucesión de Cauchy

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que es una **sucesión de Cauchy** si $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\text{si} \quad n, m > N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

o equivalentemente

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |a_n - a_m| = 0 \tag{5.9}$$

La importancia de este tipo de sucesiones radica en que establece una **condición suficiente** para asegurar la **convergencia** de una sucesión.

Teorema 8: Condición de Cauchy

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** sí y sólo sí es una **sucesión de Cauchy**

Nota 12

La ventaja de la condición de Cauchy es que para su aplicación **no** necesita conocer el valor del límite de antemano para determinar si una sucesión es o no convergente. Se trata pues de un teorema de **existencia**, i.e., establece la condición bajo la cual se garantiza que una sucesión es convergente, pero **no** proporciona los medios para hallar el valor límite hacia el que se aproxima dicha sucesión

Ejemplo 13: Demuestra que la sucesión

$$\{\mathbf{a_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\mathbf{n+3}}{\mathbf{n-5}}\right\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$$

es de Cauchy para $\mathbf{n \geq 8}$. Calcula su límite

Para comprobar si la sucesión cuyo término n-ésimo viene dado por $a_n = \frac{n+3}{n-5}$ es de Cauchy, consideramos $n, m \in \mathbb{N}$ calculamos $|a_n - a_m|$ para determinar si la distancia entre ambos elementos cuando $n \to \infty$ y $m \to \infty$ se aproxima a 0. Así,

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \frac{n+3}{n-5} - \frac{m+3}{m-5} \right| \\ &= \left| \frac{8(m-n)}{(n-5)(m-5)} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{8m}{(n-5)(m-5)} \right|}_{(I)} + \underbrace{\left| \frac{8n}{(n-5)(m-5)} \right|}_{(II)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Buscamos ahora acotar los términos (I) y (II). Para ello, nos damos cuenta de que

$$\frac{8m}{m-5} \leq \frac{8m}{\frac{m}{2}} = 16$$

dado que si $m - 5 \geq \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{1}{m-5} \leq \frac{1}{\frac{m}{2}}$. De hecho, esta desigualdad se cumple siempre que $m \geq 10$. De forma similar, $\frac{8n}{n-5} \leq 16$ si $n \geq 10$.
Por lo tanto, continuando con (5.10), podemos decir que

$$|a_n - a_n| \leq \frac{16}{n-5} + \frac{16}{m-5}, \quad \text{si} \quad n, m \geq 10$$

Queremos asegurar que $\frac{16}{n-5} < \frac{\epsilon}{2}$ y $\frac{16}{m-5} < \frac{\epsilon}{2}$ tal que su suma esté acotada por ϵ. Esto ocurre con tal de que

$$\frac{n-5}{16} > \frac{2}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \frac{m-5}{16} > \frac{2}{\epsilon}$$

que es lo que sucede, despejando n y m de estas desigualdades, si $m > \frac{32}{\epsilon} + 5$ y $n > \frac{32}{\epsilon} + 5$.
Por lo tanto, la sucesión es de Cauchy, i.e., $|a_n - a_m| < \epsilon$ si

$$n, m > \max\left\{10, \frac{32}{\epsilon} + 5\right\}$$

tomando $N = \max\left\{10, \frac{32}{\epsilon} + 5\right\}$.
Procedemos ahora a calcular el límite hacia el que tiende la sucesión cuando $n \to \infty$, i.e.,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n-5} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{n}{n} - \frac{5}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{5}{n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego cuando $n \to \infty$ la sucesión converge a 1

Ejemplo 14: Demostrar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy,

entonces

$$\{\mathbf{c_n}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} = \{|\mathbf{a_n} - \mathbf{b_n}|\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$$

también es de Cauchy. **Suponiendo que** $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{l_1}$ **y** $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{b_n} = \mathbf{l_2}$**, calcular** $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{c_n}$
Sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tq si $n, m \geq N_1$ y $n, m \geq N_2$ entonces $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}$. Definimios $N = N_1 + N_2 \in \mathbb{N}$. Si $n, m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} |c_n - c_m| &= ||a_n - a_m| - |b_n - b_m|| \\ &\underset{(*)}{\leq} |(a_n - b_n) + (a_m - b_m)| \\ &\leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

(*) Desigualdad triangular inversa: $||x| - |y|| \leq |x - y|$
Luego $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
Calculamos ahora el valor hacia el que converge la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| \\ &= \left|\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)\right| \\ &= \left|\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n\right| \\ &= |l_1 - l_2| \end{aligned}$$

Luego $c_n \to |l_1 - l_2|$ cuando $n \to \infty$

5.1.7. Indeterminaciones

Con respecto al cálculo de límites de sucesiones, dada la conexión existente con el cálculo de límites de funciones, es posible aplicar las **técnicas de resolución de indeterminaciones**, entre ellas la **regla de Bernoulli-L'Hôpital** siempre que la indeterminación sea del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$. Sin embargo, cabe hacer notar que existe un análogo de esta regla en el cálculo de límites de sucesiones proporcionada por el siguiente teorema.

Teorema 9: Criterio de Stolz-Cesàro (1879)
Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que se cumplen una de las dos condiciones siguientes:

1. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es <u>monótona creciente estricta no acotada</u>, i.e., $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
2. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es <u>monótona decreciente estricta acotada</u>, con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces, si

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l \ (\leq \infty)$$

se tiene que

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Bajo las condiciones de este teorema se derivan los siguientes resultados.

Teorema 10

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l \ (\leq \infty)$ entonces,

- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = l$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = l$, $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema 11

Si $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l \ (\leq \infty)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Teorema 12: Indeterminación 1^∞

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ y $\exists \lim_{n\to\infty} (a_n - 1)b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} (a_n - 1)b_n}$$

Por último, cabe esperar que en algunos límites aparezcan expresiones con factoriales. Cuando esto suceda se hará uso del siguiente teorema:

Teorema 13: Teorema de Stirling

Para $n \to \infty$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

es decir,

$$n! \underset{n\to\infty}{\approx} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Se dice entonces que los infinitos de $n!$ y $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ son **equivalentes**

Ejemplo 15: Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a_n} = \mathbf{l}\ (\leq \infty)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_n}}{\mathbf{n}}$$

Para demostrar la igualdad anterior, aplicamos el Teorema de Stolz puesto que una de sus hipótesis se cumplen, i.e., la sucesión en el denominador $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es monótona creciente no acotada y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.
Llamamos $c_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y comprobamos si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})}{n - (n-1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \\
&= l
\end{aligned}$$

Como este límite existe, entonces

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l$$

Ejemplo 16: Calcular $\lim_{n\to\infty} -\frac{5n}{(n!)^{1/n}}$
Para calcular este límite hemos de hacer uso del Teorema de Stirling dado que en el denominador aparece una expresión que involucra $n!$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} -\frac{5n}{(n!)^{1/n}} &= \lim_{n\to\infty} -\frac{5n}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^{1/n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{5n}{(ne^{-1}\sqrt[n]{2\pi n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{5e}{\sqrt[n]{2\pi n}} \\
&= -5e \lim_{n\to\infty} (2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \\
&= -5e
\end{aligned}$$

dado que si llamamos $l = \lim_{n\to\infty} (2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}$ y tomamos logaritmos a ambos lados, operando llegamos al siguiente resultado

$$\begin{aligned}\log l = \log\left(\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\log\left[(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{\log(2\pi n)}{2n}\left(= -\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{\frac{2\pi}{2\pi n}}{2} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n}\\ &= 0\end{aligned}$$

luego si $\log l = 0 \;\Rightarrow l = e^0 = 1$. De ahí el resultado anterior

5.1.8. Sucesiones particulares

A continuación se presentan algunos ejemplos de sucesiones junto con su correspondiente límite en caso de que sean convergentes:

1. $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a\in\mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$; $\left\{n^b\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $b\in\mathbb{R}^-$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^b = 0$
2. $\left\{(n+c)^{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{n\to\infty}(n+c)^{\frac{1}{n}} = 1,\ \forall c\in\mathbb{R}$; $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1,\ \forall a>0$
3. $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $|x|<1$; $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$; $\left\{1+x+x^2+\ldots+x^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $|x|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x+x^2+\ldots+x^n) = \frac{1}{1-x}$
4. $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x\in\mathbb{R}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$; $\left\{\frac{n^a}{b^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $b>1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{b^n} = 0$
5. **Sucesión de Fibonacci**
   La sucesión de Fibonacci se define a través de una relación de recurrencia a dos términos, i.e.,
   $$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \tag{5.11}$$
   Algunos elementos de esta sucesión son
   $$(0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,\ldots)$$
   Propiedades
   i) Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifican la relación (5.11), entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{C_1\alpha_n + C_2\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también cumple (5.11) $\forall C_1, C_2\in\mathbb{R}$
   ii) Las sucesiones cuyo término general es de la forma $a_n = r^n$, $r\in\mathbb{R}$ son soluciones de (5.11)

En base a las propiedades anteriores, se tiene que el término general de la sucesión de Fibonacci viene dado por

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{5.12}$$

Ejemplo 17: Demostrar las propiedades y término general de la *sucesión de Fibonacci*

i) Consideramos $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones que verifican (5.11) y comprobamos si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{C_1\alpha_n + C_2\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también la cumple:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= C_1\alpha_{n+1} + C_2\beta_{n+1} = C_1(\alpha_n + \alpha_{n-1}) + C_2(\beta_n + \beta_{n-1}) \\ &= (C_1\alpha_n + C_2\beta_n) + (C_1\alpha_{n-1} + C_2\beta_{n-1}) = a_n + a_{n-1}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii) Si la sucesión de término general $a_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$ satisface (5.11) hemos de sustituir su expresión en dicha relación con el objetivo de determinar para qué valores de r ocurre. Así,

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \underset{(a_n = r^n)}{\Longrightarrow} r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$$

$$\Longrightarrow r^n r = r^n + r^n r^{-1} \Longrightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \quad \Longrightarrow \quad r^2 - r - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De hecho, el número r_1 se conoce como *razón áurea* y se denota como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots$

iii) El término general de la *sucesión de Fibonacci* se obtiene a partir de las propiedades anteriores, i.e., escribimos a_n como una combinación lineal de dos sucesiones del tipo r^n con $r = r_1, r_2$. Así,

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para hallar las constantes C_1 y C_2 utilizamos los valores iniciales de la relación de recurrencia, $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, de forma que

$$a_0 = 0 \Longrightarrow \quad C_1 + C_2 = 0 \tag{5.13}$$

$$a_1 = 1 \Longrightarrow \quad C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \tag{5.14}$$

De (5.13) se tiene que $C_2 = -C_1$ y sustituyendo en (5.14) se tiene que $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y por tanto $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Luego, el término general de la sucesión viene dado por

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

6. **Progresión aritmética**
   Sucesión cuyo término general es de la forma
   $$a_n = b + c\,n\,, \quad b, c \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$
   c es la *razón* o *diferencia* de la progresión
   Sus términos son equidistantes
   Convergencia:
   - $c = 0$, convergente
   - $c \neq 0$, divergente
7. **Progresión geométrica**
   Sucesión cuyo término general es de la forma
   $$a_n = r^n\,, \quad r \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$
   r es la *razón* de la progresión
   Convergencia:
   - Si $|r| < 1$, convergente
   - Si $|r| > 1$, divergente
   - Si $r = 1$, convergente
   - Si $r = -1$, divergente

Ejemplo 18: Suma de los N primeros términos de una progresión aritmética de término general

$$\mathbf{a_n = 4 + 3n}$$

¿Es convergente?

La suma de los N primeros términos de la progresión aritmética resulta

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_N &= (3 \cdot 1 + 4) + (3 \cdot 2 + 4) + \ldots + (3 \cdot N + 4) \\ &= 3(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + N) + 4N = 3\frac{N(N+1)}{2} + 4N \\ &= \frac{3}{2}N^2 + \frac{3}{2}N + 4N = \frac{3}{2}N^2 + \frac{11}{2}N \\ &= \frac{N}{2}(3N + 11) \end{aligned}$$

La sucesión **no** es convergente dado

$$\lim_{n\to\infty}(3n + 4) = \infty$$

Esto ocurre porque existe $M \in \mathbb{R}$ tan grande como queramos tal que se cumple

$$3n + 4 > M$$

que ocurre cuando

$$n > \frac{M - 4}{3} = N \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 19: Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de término general

$$\mathbf{a_n = \frac{1}{8^n}}$$

¿Es convergente?

Para obtener la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r empleamos el siguiente método:

1. Definimos S_n como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8^k} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \ldots + \frac{1}{8^k} \tag{5.17}$$

2. Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{8}$,

$$\frac{1}{8}S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{8^k} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \ldots + \frac{1}{8^{k+1}} \tag{5.18}$$

3. Calculamos (5.17)-(5.18) y despejamos S_n,

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{8}S_n = \frac{7}{8}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8^k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{8^k} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8^{n+1}} \\ S_n &= \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8^{n+1}}\right) \\ \Rightarrow \quad S_n &= \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{8^n}\right) \end{aligned}$$

La sucesión es convergente dado que $|r| = |\frac{1}{8}| < 1$, de hecho,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8^n} = 0$$

pues dado $\epsilon > 0$ para conseguir $\frac{1}{8^n} < \epsilon$ es suficiente con tomar $8^n > \frac{1}{\epsilon}$, i.e., $n > \log_8\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = N \in \mathbb{N}$

Como nota final, cabe mencionar que es posible calcular el límite de la suma anterior, cuyo valor es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{7}$$